УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
март–апрель 2019 Том 19 № 2 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTICS
March–April 2019 Vol. 19 No 2 ISSN 2226-1494 http://ntv.ifmo.ru/en

УДК 28.15.15

ОТНОСИТЕЛЬНЫЙ ПОРЯДОК ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В.А. Бондарко

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация
Адрес для переписки: vbondarko@gmail.com

Информация о статье
Поступила в редакцию 17.01.19, принята к печати 25.02.19
doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-339-346
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Бондарко В.А. Относительный порядок дискретных моделей линейных стационарных систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 2. С. 339–346. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-339-346

Аннотация
Рассматривается вопрос об изменении ранга матричного старшего числителя передаточной функции дискретной модели многомерной линейной стационарной системы при стремлении к нулю шага дискретизации. Модель строится в предположении, что входное воздействие кусочно-постоянно. Показано, что при всех достаточно малых значениях шага ранг рассматриваемого коэффициента максимален, если выполнено естественное условие невырожденности исходной непрерывной системы-прототипа. В частности, если размерности входа и выхода системы совпадают, то в результате дискретизации с достаточно малым шагом получается дискретная модель с невырожденным старшим коэффициентом. Это свойство играет важную роль при решении многих задач теории управления. Например, классический критерий расщепляемости (decouplability) линейных систем требует невырожденности интерактора системы, а для систем с невырожденным старшим коэффициентом это условие выполняется автоматически. Другие примеры приведены в работах по построению минимаксных регуляторов. Одним из первых шагов синтеза оптимального регулятора дискретных систем общего вида служит искусственное приведение системы к такой форме, что ранг старшего коэффициента максимален. Показано, что этот шаг лишний, если дискретный объект управления получен в результате дискретизации невырожденной системы. Приведен пример дискретной модели асинхронного электродвигателя.

Ключевые слова
дискретизация, линейные системы, невырожденность, асимптотика

Благодарности
Работа поддержана грантом РФФИ 19-08-00865.

RELATIVE ORDER OF SAMPLED LINEAR TIME-INVARIANT SYSTEMS

V.A. Bondarko

Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation
Corresponding author: vbondarko@gmail.com

Article info
Received 17.01.19, accepted 25.02.19
doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-339-346
Article in Russian

For citation: Bondarko V.A. Relative order of sampled linear time-invariant systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 2, pp. 339–346 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-2-339-346

Abstract
The paper considers the rank behavior of the matrix leading coefficient of transfer function numerator of a sampled multidimensional linear time-invariant system when the sampling period tends to zero. Zero order hold sampling method is used. It is shown that the rank of the coefficient under consideration for all sufficiently small values of the sampling period is maximal if the natural condition of nonsingularity of the initial continuous prototype system is satisfied. In particular, if the dimensions of the system input and output coincide, then sampled system with a nonsingular leading coefficient is generated with any sufficiently small sampling period. This feature plays an important role in solving many problems of control theory. For example, the classical criterion of decouplability of linear systems requires the nonsingularity of the system interactor, and for systems with a nonsingular leading coefficient, this condition is satisfied automatically. The other examples are given in the works dedicated to the synthesis of minimax regulators. The artificial reduction of the system to the form with the maximal rank of the leading coefficient is one of the first steps in an optimal regulator design. The results of this work have

proved that this step is superfluous if a discrete system under control is a result of sampling of a nonsingular system. The example of an induction motor discrete model is given.

Keywords
sampling, linear time-invariant systems, nonsingularity, asymptotics

Acknowledgements
This work is supported by the grant No. 19-08-00865 of the Russian Foundation for Basic Research.

Введение

Большинство физических процессов протекают в непрерывном времени, а их обработка часто производится в дискретные временные моменты. В связи с этим возникает задача дискретизации, т.е. построения дискретного описания процесса или, в более общей постановке, построения дискретной по времени модели динамической системы-прототипа, исходное описание которой сформулировано в терминах непрерывного времени. Под динамической системой здесь понимается оператор, заданный на фиксированном классе входных сигналов, со значениями в классе выходных сигналов. Этот оператор может, например, быть задан обыкновенным дифференциальным уравнением, уравнением в частных производных, разностным уравнением и т.п.

Задачу дискретизации, т.е. построения дискретной по времени модели непрерывных систем, можно отнести к методам решения дифференциальных уравнений [1], однако она обладает некоторой спецификой. Как правило, дискретная модель должна быть адекватна моделируемой непрерывной системе на потенциально бесконечном временном интервале, что не всегда справедливо для классических методов. Кроме того, дискретная модель должна быть работоспособна для широкого класса входных воздействий, которые могут не удовлетворять, например, условиям гладкости.

Для линейных стационарных систем было предложено множество различных методов дискретизации. В [2] они используются для расчета цифровых фильтров с бесконечной импульсной характеристикой. Наиболее распространен метод, основанный на формуле Коши для решения линейных стационарных уравнений. При фиксированном временном шаге дискретизации $h>0$ он обеспечивает точное совпадение выхода модели с отсчетами выходного сигнала непрерывного прототипа, если при $k=0,1,\ldots$ входной сигнал на каждом временном интервале $[kh,(k+1)h)$ принимает постоянное значение. В англоязычной литературе этот способ дискретизации назван методом нулевого порядка (zero order hold, ZOH), поскольку для аппроксимации входа используются константы, т.е. многочлены нулевой степени.

Если прототипом служит линейная стационарная система, то дискретизацию можно рассматривать как отображение, которое дробно-рациональной передаточной функции прототипа ставит в соответствие также дробно-рациональную передаточную функцию модели. Размерность этих передаточных функций определяется размерностями входа и выхода, т.е. в общем случае они матричные. Если речь идет о вычислительном аспекте дискретизации, как, например, в [3], то многомерность сигналов проблем не создает, поскольку передаточные матрицы можно вычислять поэлементно. Если речь идет об анализе качественных свойств дискретной модели, то ситуация усложняется. В большинстве работ [4–8] рассматриваются скалярные системы, и полученные результаты автоматически на многомерный случай не переносятся. Если речь идет о многомерных системах [9, 10], то для решения задачи на прототип накладываются дополнительные условия типа расщепляемости (decouplability) системы. В настоящей работе вместо этого требуется невырожденность системы: должны рассматриваться только «существенные» компоненты входа и выхода, которые невозможно заменить на линейную комбинацию других компонент.

В простейшем случае, когда вход и выход рассматриваемых систем скалярны, числители и знаменатели передаточных функций суть скалярные многочлены, и относительным порядком системы называют разность их степеней. Для дискретной системы относительный порядок определяет запаздывание, с которым входной сигнал оказывает свое воздействие на выход системы. Таким образом, его значение играет ключевую роль при построении любой обратной связи, в том числе и оптимальной [11, 12]. В общем случае знаменатели скалярны, коэффициенты числителей – это матрицы соответствующей размерности, а векторный относительный порядок (по Исидори [13]) имеет ту же размерность, что и выход системы. Исследованию асимптотики относительного порядка и посвящена настоящая работа.

Постановка задачи

Рассмотрим функционирующую в непрерывном времени линейную стационарную систему с передаточной функцией $\mathbf{W}(\lambda)=\mathbf{C}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$, где $\mathbf{I}$ – единичная матрица, а $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ – матричные коэффициенты описывающего систему дифференциального уравнения в пространстве состояний:

$$\mathrm{d}\,\mathbf{x}(t)/\mathrm{d}\,t=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t),\ \mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t). \qquad (1)$$

Здесь t – непрерывное время, $t\in[0,\infty)$, $\mathbf{x}(t)$ – n-мерный вектор состояния системы, значения входного сигнала $\mathbf{u}(t)$ и выходного сигнала $\mathbf{y}(t)$ имеют размерность m и l соответственно. Будем предполагать поначалу, что m=l.

Если управляющее воздействие (входной сигнал) постоянно на каждом из последовательных временных интервалов длиной h>0, то по формуле Коши равноотстоящие (на h) отсчеты состояния $\mathbf{x}_k=\mathbf{x}(hk)$, входного $\mathbf{u}_k=\mathbf{u}(hk)$ и выходного $\mathbf{y}_k=\mathbf{y}(hk)$ сигналов связаны между собой разностным уравнением в пространстве состояний

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{P}\mathbf{x}_k + \mathbf{Q}\mathbf{u}_k, \quad \mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \quad k = 0,1,\dots \tag{2}$$

с коэффициентами $\mathbf{P} = e^{h\mathbf{A}}$, $\mathbf{Q} = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{P}-\mathbf{I})\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$. Это уравнение описывает дискретную систему – результат дискретизации исходной системы (1) по так называемому методу нулевого порядка, h называют шагом (или периодом) дискретизации.

Уравнения (1) и (2) можно переписать в форме «вход–выход», исключив из них состояние с помощью тождества Кэли:

$$a(\mathrm{d}/\mathrm{d}\,t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{b}(\mathrm{d}/\mathrm{d}\,t)\mathbf{u}(t), \tag{3}$$

$$\alpha(\nabla)\mathbf{y}_k = \boldsymbol{\beta}(\nabla)\mathbf{u}_k, \tag{4}$$

где ∇ – оператор сдвига вперед на один шаг дискретного времени, т.е. $\nabla\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k+1}, \nabla^2\mathbf{y}_k = \mathbf{y}_{k+2}$ и т.д. Многочлены $a(\lambda), \mathbf{b}(\lambda), \alpha(\lambda), \boldsymbol{\beta}(\lambda)$ – это числители и знаменатели соответствующих передаточных функций:

$$a(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda-\lambda_j), \mathbf{b}(\lambda) = a(\lambda)\mathbf{W}(\lambda), \mathbf{W}(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},$$

$$\alpha(\lambda) = \det\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P}\right) = \prod_{j=1}^{n}(\lambda-e^{h\lambda_j}), \boldsymbol{\beta}(\lambda) = a(\lambda)\boldsymbol{\chi}(\lambda), \boldsymbol{\chi}(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{Q}.$$

Коэффициенты многочленов $a(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ скалярны, а у $\mathbf{b}(\lambda)$ и $\boldsymbol{\beta}(\lambda)$ они имеют размерность $m\times l$. В некоторых случаях, когда характеристический многочлен $a(\lambda)$ не является минимальным аннулятором матрицы $\mathbf{A}$, вместо $a(\lambda)$ и $\alpha(\lambda)$ в уравнениях (3), (4) можно использовать многочлены меньшей степени, но эти уравнения верны и в неизменном виде, так что на окончательный результат это не влияет. Под аннулятором матрицы здесь понимается многочлен со скалярными коэффициентами, старший из которых (единица) становится равным нулю, когда его аргументом служит данная матрица. Минимальный аннулятор – это аннулятор наименьшей степени. По теореме Гамильтона–Кэли, характеристический многочлен матрицы всегда служит ее аннулятором.

Выразим матричный многочлен $\boldsymbol{\beta}(\lambda)$ через его коэффициенты: $\boldsymbol{\beta}(\lambda) = \boldsymbol{\beta}_1\lambda^{n-1} + \boldsymbol{\beta}_2\lambda^{n-2} + \ldots + \boldsymbol{\beta}_n$, где, очевидно, $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{CQ}$. Действительно, прямым умножением можно проверить, что

$$\lambda\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)^{-1} - \mathbf{I} = (\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}, \tag{5}$$

поэтому $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\lambda\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P}\right)^{-1}\mathbf{Q} - \mathbf{CQ} = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\mathbf{C}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\mathbf{PQ} = 0,$ что и требовалось. Таким образом, предметом исследования служит асимптотика

$$r(h) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{rank}(\mathbf{CQ})$$

при всех достаточно малых h.

Теорема. *Пусть l=m и* $\det\mathbf{W}(\lambda)$ *не равен нулю тождественно. Тогда $r(h)$=l при всех достаточно малых h>0.*

Следствие. Для *произвольных l и m при всех достаточно малых h значение $r(h)$ равно максимальной размерности минора* $\mathbf{W}(\lambda)$, *не равного нулю тождественно.*

Обозначим i-ю строку произвольной матрицы $\mathbf{T}$ через $\mathbf{T}[i]$. Определим $\mathbf{R}$ – векторный относительный порядок по Исидори [13] для линейной стационарной системы с матричными коэффициентами $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, и ее интерактор $\mathbf{q}$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}[1] \\ \mathbf{R}[2] \\ \vdots \\ \mathbf{R}[l] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}[1]\mathbf{A}^{\mathbf{R}[1]-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}[2]\mathbf{A}^{\mathbf{R}[2]-1}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{C}[l]\mathbf{A}^{\mathbf{R}[l]-1}\mathbf{B} \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{R}[i]$ – первое из натуральных чисел k, для которого $\mathbf{C}[i]\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B} \neq 0$. Эти понятия широко используются в теории управления системами с векторным входом и выходом; нам они потребуются для доказательства теоремы.

Из теоремы следует, таким образом, что все компоненты векторного порядка дискретной модели при всех достаточно малых h имеют минимальное значение, т.е. равны единице.

Лемма 1. *Пусть для некоторой* ($m\times l$)*-матрицы* $\mathbf{c}$ *справедливы равенства* $\mathbf{cB}=\mathbf{cAB}=\ldots=\mathbf{cA}^k\mathbf{B}=0$. *Тогда*

$$\mathbf{c}\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{k+1}\mathbf{B}=\lambda^{k+1}\mathbf{c}\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}. \qquad (6)$$

Доказательство. Применяя аналогичное (5) равенство $\lambda\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\mathbf{I}=(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A},$ получаем

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^2=\lambda\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}-\mathbf{A}=\lambda\left[\lambda\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\mathbf{I}\right]-\mathbf{A}=\lambda^2\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A},$$

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^3=\lambda^2\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}-\lambda\mathbf{A}-\mathbf{A}^2=\lambda^3\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}-\lambda^2\mathbf{I}-\lambda\mathbf{A}-\mathbf{A}^2,$$

и т.д. Домножив (k+1)-е такое тождество на $\mathbf{c}$ слева и на $\mathbf{B}$ справа, в силу условий леммы получаем искомое равенство (6). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть* $m=l$ и $\det\mathbf{C}\left(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{B}\neq 0$ *для некоторого* λ. *Тогда найдется такая невырожденная (*$m\times m$)-матрица $\mathbf{S}$, *что интерактор тройки* $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{SC}\right)$ *невырожден.*

Доказательство. Предположим, что, вопреки утверждению леммы, интерактор тройки $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{SC}\right)$ вырожден для любой ($m\times m$)-матрицы $\mathbf{S}$. Тогда и $\det\mathbf{q}=0$. Положим $\nu=0$ и $\mathbf{C}_\nu=\mathbf{C}_0=\mathbf{C}$. Значение ν будет использоваться для нумерации нескольких однотипных повторяющихся шагов в последующих рассуждениях.

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu$ со строками $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu[i]=\mathbf{C}_\nu[i]\mathbf{A}^{\mathbf{R}_\nu[i]-1}$, где $\mathbf{R}_\nu[i]$ – относительный порядок тройки $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu[i]\right)$ (при $\nu=0$ он совпадает с $\mathbf{R}[i]$). Относительный порядок тройки $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}_\nu\right)$ состоит из одних единиц, но интерактор $\mathbf{q}_\nu$ у нее – тот же, что и у $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}_\nu\right)$. По лемме 1 передаточные функции этих троек связаны равенством

$$\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\lambda^{\mathbf{R}_\nu[1]-1} & & & \\ & \lambda^{\mathbf{R}_\nu[2]-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{\mathbf{R}_\nu[m]-1}\end{bmatrix}\mathbf{C}_\nu(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}.$$

Следовательно,

$$\det\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\lambda^{\sum_i\mathbf{R}_\nu[i]-m}\det\mathbf{C}_\nu(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}. \qquad (7)$$

Поскольку интерактор $\mathbf{q}_\nu$ – вырожденная матрица, одна из ее строк – линейная комбинация остальных: $\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu[j]\mathbf{B}=\sum_{i\neq j}s_i\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu[i]\mathbf{B}.$ Положим

$$\mathbf{S}=\begin{bmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ -s_1 & \ldots & -s_{j-1} & 1 & -s_{j+1} & \ldots & -s_m \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{bmatrix}.$$

Очевидно, $\det\mathbf{S}=1$. Обозначим $\mathbf{C}_{\nu+1}=\mathbf{S}\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu$ и определим для тройки $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}_{\nu+1}\right)$ ее векторный относительный порядок $\mathbf{R}_{\nu+1}$ и интерактор $\mathbf{q}_{\nu+1}$. Интерактор останется вырожденным, поскольку $\det\mathbf{q}_{\nu+1}=\det\mathbf{S}\det\mathbf{q}_\nu=0$. Очевидно, далее, что $\mathbf{R}_{\nu+1}[j]>1$, поскольку $\boldsymbol{\mathcal{C}}_{\nu+1}[j]\mathbf{B}=\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu[j]\mathbf{B}-\sum_{i\neq j}s_i\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu[i]\mathbf{B}=0.$

Остальные компоненты векторного порядка тройки $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}_{\nu+1}\right)$ равны единице, поскольку i-е строки матриц $\mathbf{C}_\nu$ и $\mathbf{C}_{\nu+1}$ совпадают при $i\neq j$. Наконец,

$$\det\mathbf{C}_{\nu+1}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\det\mathbf{S}\det\boldsymbol{\mathcal{C}}_\nu(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\lambda^{\sum_i\mathbf{R}_\nu[i]-m}\det\mathbf{C}_\nu(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$$

в силу (7).

Увеличим значение ν на единицу и повторим рассуждения.

После nm таких итераций получим

$$\det \mathbf{C}_{nm+1}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \lambda^K \det \mathbf{C}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\,, \tag{8}$$

где $K>nm$.

Обозначим $a(\lambda)=\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})$. По детерминантной лемме Шура

$$\det \mathbf{C}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{a(\lambda)}\det\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}.$$

Таким образом, тождество (8) эквивалентно многочленному равенству

$$\det\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ -\mathbf{C}_{nm+1} & 0\end{bmatrix} = \lambda^K \det\begin{bmatrix}\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ -\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}.$$

Оно может быть верно только если нулю равны оба определителя в его левой и правой частях, а иначе степени левой и правой части будут различны. Следовательно, $\det \mathbf{C}(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \equiv 0 \quad \forall\lambda$.

Итак, предположение о том, что для любой ($m\times m$)-матрицы $\mathbf{S}$ интерактор тройки $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{SC})$ вырожден, противоречит условию леммы. Значит, это предположение ложно, т.е. лемма доказана.

Доказательство теоремы. Требуется доказать невырожденность матрицы

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\left(e^{h\mathbf{A}}-\mathbf{I}\right)\mathbf{B} = h\mathbf{C}\left(\mathbf{I}+\frac{h}{2}\mathbf{A}+\frac{h^2}{6}\mathbf{A}^2+\ldots+\frac{h^k}{(k+1)!}\mathbf{A}^k+\ldots\right)\mathbf{B}. \tag{9}$$

Лемма 2 гарантирует существование такой невырожденной матрицы $\mathbf{S}$, что интерактор тройки $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{SC})$ невырожден. Не уменьшая общности, будем считать $\mathbf{S}=\mathbf{I}$, поскольку $\det(\mathbf{S}\boldsymbol{\beta}) = \det\mathbf{S}\det\boldsymbol{\beta}$.

Итак,

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix}\mathbf{C}[1]\mathbf{A}^{\mathbf{R}[1]-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{C}[2]\mathbf{A}^{\mathbf{R}[2]-1}\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{C}[l]\mathbf{A}^{\mathbf{R}[l]-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

– это невырожденный интерактор тройки $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$, $\mathbf{R}[i]$ – первое из натуральных чисел k, для которого $\mathbf{C}[i]\mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}\neq 0$. Из (9)

$$h^{m-\sum_i \mathbf{R}_v[i]}\det\beta_1 = \det\left[\mathbf{q}+O(h)\right]\xrightarrow[h\to 0]{}\det\mathbf{q}\neq 0,$$

где $O(h)\to 0$ при $h\to 0$. Теорема доказана.

Численный пример: исследование дискретной модели асинхронного электродвигателя

Рассмотрим задачу управления асинхронным электродвигателем с целью обеспечить заданные значения создаваемого двигателем электромагнитного момента T_e и абсолютной величины двумерного вектора потокосцепления ротора $\boldsymbol{\psi}$. Рассматриваемая электрическая машина с короткозамкнутыми обмотками ротора описывается уравнениями

$$\begin{cases} \mathrm{d}\,\omega/\mathrm{d}\,t = -\alpha\omega+\mu T_e+T,\\ \mathrm{d}\,\mathbf{i}/\mathrm{d}\,t = -\gamma\mathbf{i}+\beta(\eta I-\omega J)\boldsymbol{\psi}+\delta\mathbf{u},\\ \mathrm{d}\,\boldsymbol{\psi}/\mathrm{d}\,t = -(\eta\mathbf{I}-\omega J)\boldsymbol{\psi}+\eta M\mathbf{i}.\end{cases} \tag{10}$$

Здесь ω – скорость вращения ротора, $\mathbf{i}$ – двумерный вектор токов статора, $\mathbf{u}$ – двумерный вектор напряжений на обмотках статора, T – внешняя нагрузка на вал электродвигателя, $\mathbf{I}$ – единичная матрица,

$$T_e = \mathbf{i}'\mathbf{J}\boldsymbol{\psi},\ \mathbf{J} = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

штрих обозначает транспонирование вектора; конструктивные параметры двигателя: α – коэффициент трения, M – взаимная индуктивность ротора и статора, m – момент инерции ротора, $L_r = M+L_{lr}$ – индуктивность ротора, L_{lr} – индуктивность рассеяния ротора, $\beta = \delta M/L_r$, $\gamma = \delta(R_s + M^2R_r/L_r^2)$, $\delta = 1/\sigma L_s$, $\eta = R_r/L_r$, $\sigma = 1 - M^2/(L_r L_s)$ – параметр рассеяния, $L_s = M + L_{ls}$ – индуктивность статора, L_{ls} – индуктивность рассеяния статора, R_r и R_s – сопротивления ротора и статора. Для численных расчетов здесь будут использованы параметры реального электродвигателя [14], входящего в электроусилитель рулевого управления легкового автомобиля: $\alpha = 0{,}1$, $\beta = 6675{,}6$, $\gamma = 173$, $\delta = 7610$, $\eta = 21{,}05$, $\mu = 0{,}0005$, $M = 0{,}0005$.

Напряжение на обмотках статора u имеет смысл управляющего воздействия. Применяя подход векторного управления (field-oriented control), входными сигналами помимо внешнего воздействия T

удобно считать компоненты вектора напряжения в системе координат, связанной с вектором потокосцепления:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, v_1 = \boldsymbol{\psi}'\mathbf{u},\ v_2 = \boldsymbol{\psi}'\mathbf{J}\mathbf{u},$$

а выходными сигналами – регулируемые переменные T_e и $|\boldsymbol{\psi}|^2$. Уравнения электродвигателя (10) преобразуются к виду

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\omega = -\alpha\omega + \mu T_e + T, \\ \dfrac{d}{dt}|\boldsymbol{\psi}|^2 = -2\eta|\boldsymbol{\psi}|^2 + 2\eta M\,\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi}, \\ \dfrac{d}{dt}T_e = -(\gamma+\eta)T_e - \beta\omega|\boldsymbol{\psi}|^2 - \omega\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi} + \delta v_2, \\ \dfrac{d}{dt}(\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi}) = -(\gamma+\eta)(\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi}) + \beta\eta|\boldsymbol{\psi}|^2 + \omega T_e + \eta M\left(T_e^2 + |\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi}|^2\right)|\boldsymbol{\psi}|^{-2} + \delta v_1. \end{cases} \tag{11}$$

Пусть внешняя нагрузка T мало отличается от постоянной: $T \approx T_c = \text{const}$. В реальности нагрузка меняется на несколько порядков медленнее остальных переменных, поэтому такое предположение не приводит к существенным погрешностям. При этом условии, приравняв левые части уравнений нулю, легко определить точку равновесия системы (11), которая соответствует поставленной цели управления $T_e = T_r$, $|\boldsymbol{\psi}|^2 = \Psi_r$. Линеаризуя систему относительно этой точки, для вектора отклонений $\mathbf{x} = \left[\omega - \omega_c,\ \ |\boldsymbol{\psi}|^2 - \Psi_r,\ \ T_e - T_r,\ \ \mathbf{i}'\boldsymbol{\psi} - (\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi})_c\right]'$ получаем уравнение

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} + \mathbf{D}(T - T_c) + o(\mathbf{x}), \quad \begin{bmatrix} |\boldsymbol{\psi}|^2 - \Psi_r \\ T_e - T_r \end{bmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \tag{12}$$

где $o(\mathbf{x})/|\mathbf{x}| \to 0$ при $\mathbf{x} \to 0$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -2\eta & 0 & 2\eta M \\ -\beta\Psi_r - (\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi})_c & -\beta\omega_c & -\gamma-\eta & -\omega_c \\ T_r & \beta\eta - \eta M\left(T_r^2 + (\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi})_c^2\right)\Psi_r^{-2} & \omega_c + 2\eta M T_r \Psi_r^{-1} & -\gamma - \eta + 2\eta M(\mathbf{i}'\boldsymbol{\psi})_c\Psi_r^{-1} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \delta \\ \delta & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Если пренебречь слагаемым $o(\mathbf{x})$ в правой части дифференциального уравнения системы (12), то получим ее передаточную функцию $\mathbf{W}(\lambda) = \mathbf{C}(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ с интерактором

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}[1]\mathbf{A}\mathbf{B} \\ \mathbf{C}[2]\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\delta\eta M & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}.$$

Поскольку значения всех конструктивных параметров рассматриваемого электродвигателя строго положительны, интерактор $\mathbf{q}$ невырожден и, следовательно, $\det \mathbf{W}(\lambda)$ не может быть тождественно равен нулю. Таким образом, условие теоремы выполнено независимо от значения внешней нагрузки.

Применив к линеаризованной системе (12) метод дискретизации нулевого порядка с шагом дискретизации h>0, получим дискретную модель системы с передаточной функцией $\boldsymbol{\chi}(\lambda) = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\left(e^{h\mathbf{A}} - \mathbf{I}\right)\left(\lambda\mathbf{I} - e^{h\mathbf{A}}\right)^{-1}\mathbf{B}$. Старший коэффициент ее числителя – (2×2)-матрица $\boldsymbol{\beta}_1 = \mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\left(e^{h\mathbf{A}} - \mathbf{I}\right)\mathbf{B}$. Согласно доказанной теореме, $\det\boldsymbol{\beta}_1 \neq 0$ при всех достаточно малых значениях шага дискретизации. Это подтверждается расчетами (см. рисунок).

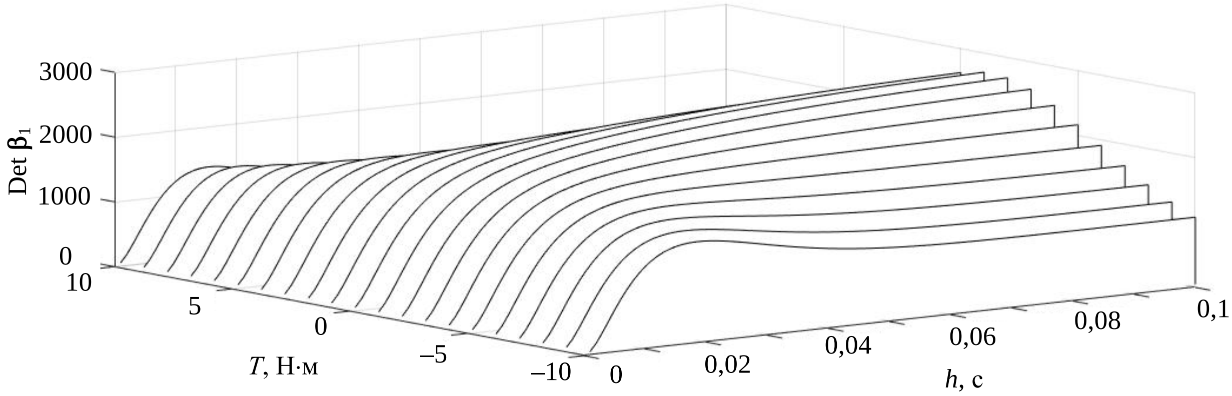

Рисунок. Значения определителя старшего коэффициента дискретной линейной модели асинхронного электродвигателя

Представлены значения $\det\boldsymbol{\beta}_1$, рассчитанные для внешней нагрузки T в диапазоне от –10 до 10 Н·м и шага дискретизации h от 0,001 до 0,1 с. Как и ожидалось, $\det\boldsymbol{\beta}_1$ стремится к нулю при малых значениях шага, но никогда в точности ему не равен.

Заключение

В этом простейшем случае, когда вход и выход системы-прототипа скалярны, доказанная теорема гарантирует, что дискретизация методом нулевого порядка не вносит дополнительного запаздывания, что весьма существенно при построении любых регуляторов типа обратной связи. Полная формулировка доказанной теоремы (с учетом следствия к ней) может быть применена к системам с произвольными размерностями входа и выхода. Отсутствие дополнительного запаздывания гарантируется и в этом случае. Кроме того, доказано, что дискретная модель имеет удобную для построения обратной связи структуру – новые значения входного сигнала входят в разностное уравнение модели с матричным коэффициентом, ранг которого максимален. Это свойство играет важную роль при решении многих задач теории управления. Например, классический критерий [15] расщепляемости (decouplability) линейных систем требует невырожденности интерактора системы, а для систем с невырожденным старшим коэффициентом это условие выполняется автоматически. Другие примеры возможного применения полученных результатов приведены в работах [11, 12].

Результаты работы легко и полностью могут быть перенесены на случай систем с транспортным запаздыванием (одинаковым для всех компонентов входа или выхода). Более сложным представляется случай бесконечномерных систем, дискретизация которых описана в [16]. Для таких систем решение поставленной задачи пока что отсутствует.

Литература

1. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Том II. М.: Наука, 1977. 400 с.
2. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1978. 835 с.
3. Stotent D.P., Harrison A.J.L. Generation of discrete and continuous time transfer function coefficients // International Journal of Control. 1994. V. 59. N 5. P. 1159–1172. doi: 10.1080/00207179408923125
4. Åström K.J., Hagander P., Sternby J. Zeros of sampled systems // Automatica. 1984. V. 20. N 1. P. 21–38. doi: 10.1016/0005-1098(84)90062-1
5. Bondarko V.A. Discretization of continuous linear dynamic systems – analysis of the methods // Systems and Control Letters. 1984. V. 5. P. 97–101. doi: 10.1016/0167-6911(84)90016-1
6. Weller S.R., Moran W., Ninness B., Pollington A.D. Sampling zeros and the Euler–Frobenius polynomials // IEEE Transactions on Automatic Control. 2001. V. 46. N 2. P. 340–343. doi: 10.1109/cdc.1997.657672
7. Hagiwara T., Yuasa T., Araki M. Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds // International Journal of Control. 1993. V. 58. N 6. P. 1325–1346. doi: 10.1080/00207179308923057
8. Błachuta M.J. On zeros of pulse transfer functions // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44. N 6. P. 1229–1234. doi: 10.1109/9.769380

References

1. Krylov V.I., Bobkov V.V., Monastyrnyi P.I. *Computational Methods*. Vol. 2. Moscow, Nauka Publ., 1977, 400 p. (in Russian)
2. Rabiner, L.R., Gold B. *Theory and Application of Digital Signal Processing*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1975, 762 p.
3. Stotent D.P., Harrison A.J.L. Generation of discrete and continuous time transfer function coefficients. *International Journal of Control*, 1994, vol. 59, no. 5, pp. 1159–1172. doi: 10.1080/00207179408923125
4. Åström K.J., Hagander P., Sternby J. Zeros of sampled systems. *Automatica*, 1984, vol. 20, no. 1, pp. 21–38. doi: 10.1016/0005-1098(84)90062-1
5. Bondarko V.A. Discretization of continuous linear dynamic systems – analysis of the methods. *Systems and Control Letters*, 1984, vol. 5, pp. 97–101. doi: 10.1016/0167-6911(84)90016-1
6. Weller S.R., Moran W., Ninness B., Pollington A.D. Sampling zeros and the Euler–Frobenius polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, vol. 46, no. 2, pp. 340–343. doi: 10.1109/cdc.1997.657672
7. Hagiwara T., Yuasa T., Araki M. Stability of the limiting zeros of sampled-data systems with zero- and first-order holds. *International Journal of Control*, 1993, vol. 58, no. 6, pp. 1325–1346. doi: 10.1080/00207179308923057
8. Błachuta M.J. On zeros of pulse transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, vol. 44, no. 6,

9. Weller S.R. Limiting zeros of decouplable MIMO systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1999. V. 44. N 1. P. 129–134. doi: 10.1109/9.739097
10. Бондарко В.А. Асимптотика нулей дискретной модели линейной непрерывной системы с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. С. 3–26.
11. Барабанов А.Е., Граничин О.Н. Оптимальный регулятор линейного объекта с ограниченной помехой // Автоматика и телемеханика. 1984. № 5. С. 39–46.
12. Барабанов А.Е. Синтез минимаксных регуляторов. СПб.: СПбГУ, 1996. 222 с.
13. Isidori A. Nonlinear Control Systems. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995. 549 p. doi: 10.1007/978-1-84628-615-5
14. Бондарко В.А. Адаптивное векторное управление асинхронным электродвигателем на основе метода рекуррентных целевых неравенств // Автоматика и телемеханика. 2010. № 9. С. 120–135.
15. Falb P.L., Wolovich W.A. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1967. V. AC-12. N 6. P. 651–659. doi: 10.1109/tac.1967.1098737
16. Бондарко В.А. Дискретизация бесконечномерных линейных динамических систем // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32. № 10. С. 1312–1321.

pp. 1229–1234. doi: 10.1109/9.769380
9. Weller S.R. Limiting zeros of decouplable MIMO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, vol. 44, no. 1, pp. 129–134. doi: 10.1109/9.739097
10. Bondarko V.A. Limiting zeros of sampled systems with time delay. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, no. 8, pp. 1327–1346.
11. Barabanov A.E., Granichin O.N. Optimal controller for linear plant with bounded noise. *Automation and Remote Control*, 1984, no. 5, pp. 39–46. (in Russian)
12. Barabanov A.E. *Synthesis of Minimax Regulators*. St. Petersburg, SPbSU Publ., 1996, 222 p. (in Russian)
13. Isidori A. *Nonlinear Control Systems*. 2nd ed. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1995, 549 p. doi: 10.1007/978-1-84628-615-5
14. Bondarko V.A. Adaptive vector control of an induction motor on the basis of the method of recurrent objective inequalities. *Automation and Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 9, pp. 1849–1863. doi: 10.1134/S0005117910090080
15. Falb P.L., Wolovich W.A. Decoupling in the design and synthesis of multivariable control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 651–659. doi: 10.1109/tac.1967.1098737
16. Bondarko V.A. Discretization of infinite-dimensional linear dynamical systems. *Differential Equations*, 1996, vol. 32, no. 10, pp. 1309–1318.

Автор

Бондарко Владимир Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация, Scopus ID: 7004163779, ORCID ID: 0000-0002-2327-5520, vbondarko@gmail.com

Author

Vladimir A. Bondarko – PhD, Associate Professor, Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation, Scopus ID: 7004163779, ORCID ID: 0000-0002-2327-5520, vbondarko@gmail.com