

УДК 62-133.26

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-756-766

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВРАЩАЮЩИХСЯ ВАЛОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ИНЕРЦИОННЫМИ, УПРУГИМИ И ЭКСЦЕНТРИСИТЕТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

И.Р. Муртазин, А.В. Лукин, И.А. Попов

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация
 Адрес для переписки: murtazin_ir@spbstu.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 25.02.19, принята к печати 17.05.19
 Язык статьи — русский

Ссылка для цитирования: Муртазин И.Р., Лукин А.В., Попов И.А. Исследование изгибных колебаний вращающихся валов с распределенными инерционными, упругими и эксцентриситетными характеристиками // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 4. С. 756–766. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-756-766

Аннотация

Предмет исследования. Исследована одна из основных проблем обеспечения упругой устойчивости и длительной прочности системы при циклически изменяющихся внешних воздействиях. Роторные системы обладают широкой областью применимости: энергетическая, машино- и авиастроительная промышленности, медицина не обходятся без оборудования с вращательными элементами (турбины, двигатели, бормашины). **Метод.** Выполнен обзор и сравнительное исследование ряда аналитических и численных методов расчета изгибных колебаний вращающихся валов. Построение прямого аналитического решения проведено с использованием метода продолжения по параметру, реализованному в модуле MATLAB/MATCONT. Также рассмотрен приближенный метод решения дифференциальных уравнений, bvp4c-метод, являющийся встроенной функцией MATLAB. Численное решение задач выполнено методом конечных элементов с применением программных средств ANSYS и COMSOL. **Основные результаты.** Для определения критических скоростей вращения построены диаграммы Кэмпбелла с применением распределенной модели деформируемого вала, описываемой уравнениями в частных производных, в общем случае с переменными коэффициентами. Данная модель позволяет учесть распределенность упругих, инерционных и эксцентриситетных свойств системы, а также применима для любого диапазона рабочих частот. Исследованы свободные и вынужденные колебания вала, вызванные наличием эксцентриситета. **Практическая значимость.** Рассмотренная общая модель и верифицированные методы позволяют провести численное моделирование экспериментальной установки. Решена обратная задача по определению величины эксцентриситета элемента установки. Жесткость и демпфирование податливой анизотропной опоры определялась по экспериментальным данным и с помощью теоретической оценки. Исследована чувствительность установки к добавочному внешнему силовому фактору заданного порядка. Построены частотные характеристики рассматриваемой системы и приведено сравнение с результатами натурных испытаний. Предложены методы гашения вибраций вала с помощью управляемых (активных) магнитных подшипников.

Ключевые слова

нестационарные изгибные колебания, вал, анизотропные опоры, распределенные характеристики, прочность, аналитические методы, численные методы, эксперимент, диаграмма Кэмпбелла, частотные характеристики, чувствительность системы, гашение вибраций, магнитные подшипники

Благодарности

Исследование выполнено при поддержке стипендиальной программы Siemens.

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-756-766

RESEARCH OF FLEXURAL VIBRATIONS OF ROTATING SHAFTS WITH DISTRIBUTED INERTIAL, ELASTIC AND ECCENTRICITY PROPERTIES

I.R. Murtazin, A.V. Lukin, I.A. Popov

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation
 Corresponding author: murtazin_ir@spbstu.ru

Article info

Received 25.02.18, accepted 17.05.19
 Article in Russian

For citation: Murtazin I.R., Lukin A.V., Popov I.A. Research of flexural vibrations of rotating shafts with distributed inertial, elastic and eccentricity properties. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 4, pp. 756–766 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-4-756-766

Abstract

Subject of Research. The paper presents the study of one of the main problems of elastic stabilization and long-term strength of the system under cyclically changing external impacts. Rotary systems have a wide range of applications: power, machine and aircraft-building industries; medicine cannot exist without equipment with rotational elements (turbines, engines, drills). One of the main problems is to ensure the system elastic stability and long-term strength during cyclically changing external impacts. **Method.** The paper presents a survey and comparative research for a number of analytical and numerical methods of calculating the flexural vibrations of rotating shafts. The direct analytical solution was received by the continuation method in MATLAB/MATCONT module. We also considered such approximate method as *bvp4c*-method, that is a MATLAB built-in function. The numerical problem was solved by the finite element method using ANSYS и COMSOL software. **Main Results.** For determination of the rotation critical speeds Campbell's diagrams are plotted using a distributed model of deformable shaft described by partial differential equations with variable coefficients. This model takes into account the distribution of elastic, inertial and eccentricity properties of the system, and is applicable to any range of working frequencies. Free and forced vibrations caused by the eccentricity are studied. **Practical Relevance.** Considered general model and verified methods give the possibility to carry out numerical simulation of the experimental facility. The inverse problem of determining the facility element eccentricity was solved. The anisotropic support stiffness and damping were determined by experimental data and theoretical estimation. The facility sensitivity to an additional external force is researched. The frequency characteristics are built up and their comparison with the results of full-scale tests is given. The methods of the shaft vibration damping by means of controlled (active) magnetic bearings are proposed.

Keywords

transient flexural vibrations, shaft, anisotropic supports, distributed properties, strength, analytical methods, numerical methods, experiment, Campbell's diagram, frequency response, system sensitivity, vibration damping, magnetic bearings

Acknowledgements

The research was supported by Siemens scholarship program.

Введение

Обеспечение упругой устойчивости вращающихся валов и роторов является одной из важных и не полностью решенных задач прикладной механики в области машиностроения [1, 2]. Неизбежное наличие геометрических и материальных несовершенств в конструкции приводит к возникновению изгибных колебаний, способных вызвать выход системы из строя и ее разрушение [3, 4]. В настоящей работе выполнено исследование динамики вращающегося вала с учетом распределенных инерционных, упругих и эксцентриситетных характеристик, а также рассмотрены методы управления изгибными колебаниями с применением активных магнитных подшипников [5, 6].

В первой части работы разработана детальная математическая модель пространственных движений вала с анизотропной опорой с учетом распределенных характеристик. Данная модель описывается системой уравнений в частных производных, в общем случае с переменными коэффициентами [5]. Исследована необходимость учета влияния инерции вала на поворот в зависимости от геометрических и материальных параметров системы. Была рассмотрена задача на собственные значения для однородного и неоднородного по длине вала [4, 7, 8], и построены диаграммы Кэмпбелла для обоих случаев. Исследована задача о нестационарных изгибных колебаниях, вызванных наличием эксцентриситета [5].

Во второй части работы на основе верифицированных методов решения задач было проведено численное моделирование экспериментальной установки, представляющей собой вал с барабаном. Ось барабана не совпадает с осью вала, что приводит к возникновению центробежной силы инерции и появлению изгибных колебаний. Вал приводится в движение с помощью двигателя, расположенного на левом конце. На правом конце расположен тензодатчик, измеряющий поперечную (перерезывающую) силу. Эксперимент проводился на разных временных развертках. По итогам численного моделирования и сопоставления результатов были найдены критические скорости вращения вала, была определена величина эксцентриситета барабана и исследована чувствительность установки к дополнительному силовому фактору. Была выявлена необходимость минимизации побочных эффектов, влияющих на динамику вращающегося вала путем замены упругой опоры на управляемую магнитную опору [6].

Исследование динамики вращающегося вала

Постановка задачи. Рассматривается математическая постановка пространственных движений вала с учетом распределенных характеристик [5]. Исследуемая система с заданными физико-механическими характеристиками и граничными условиями представлена на рис. 1. На левом конце вал шарнирно оперт в обоих направлениях, на правом конце случай анизотропной опоры — шарнирное опирание в горизонтальном направлении и упругая опора жесткостью c в вертикальном направлении. Принято, что свойства вала (в том числе положение центра тяжести) могут быть произвольно меняющимся по длине вала L .

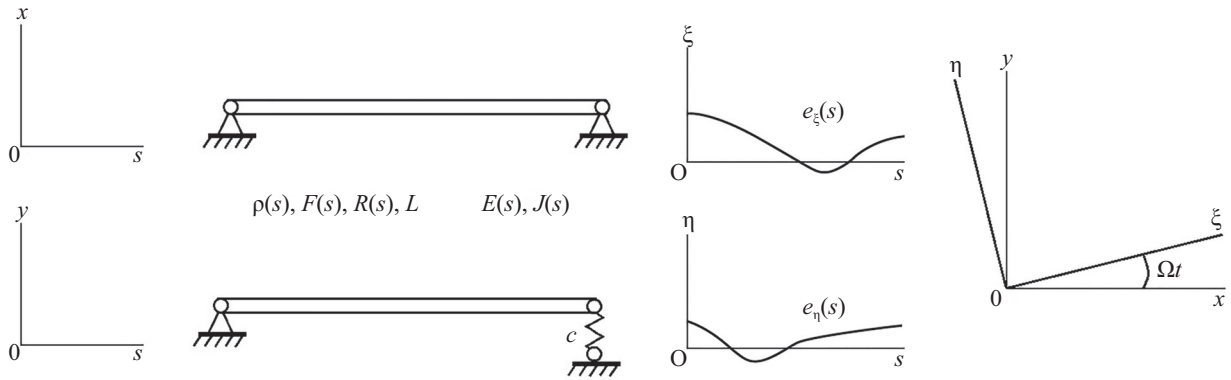


Рис. 1. Объект исследования и изменение эксцентриситета по длине вала

Данная модель описывается связанной системой двух уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} (E(s)J(s)u''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{u} - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{2}(\ddot{u}' + 2\Omega\dot{v}') \right]' + b\dot{u} = \\ = \rho(s)F(s)\Omega^2 [e_\xi(s)\cos\Omega t - e_\eta(s)\sin\Omega t] \\ (E(s)J(s)v''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{v} - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{2}(\ddot{v}' - 2\Omega\dot{u}') \right]' + b\dot{v} = \\ = \rho(s)F(s)\Omega^2 [e_\xi(s)\sin\Omega t + e_\eta(s)\cos\Omega t] \end{cases}, \quad (1)$$

где $E(s)$ — модуль упругости Юнга; $J(s)$ — момент инерции поперечного сечения; $\rho(s)$ — плотность; $F(s)$ — площадь поперечного сечения; $R(s)$ — радиус поперечного сечения; b — коэффициент демпфирования; Ω — угловая скорость вращения вала; $u = u(s,t)$, $v = v(s,t)$ — прогибы в двух плоскостях; $e_\xi(s)$, $e_\eta(s)$ — эксцентриситеты; ξ , η — координаты в подвижной системе отсчета; s — продольная координата; t — время.

В левую часть уравнений последовательно входят слагаемые, характеризующие упругую силу, силу инерции, учет инерции на поворот, гироскопический момент и демпфирование.

Система уравнений (1) может быть записана в комплексной форме:

$$w(s,t) = u(s,t) + iv(s,t). \quad (2)$$

Тогда система (1) с учетом (2) представима в виде:

$$(E(s)J(s)w''')'' + \rho(s)F(s)\ddot{w} - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{2}(\ddot{w} - 2i\Omega\dot{w}') \right]' + b\dot{w} = \rho(s)F(s)\Omega^2 \bar{e}(s)\exp(i\Omega t).$$

Граничные условия в стандартном и комплексном виде имеют вид:

$$\begin{cases} u(0,t) = v(0,t) = 0 \\ u''(0,t) = v''(0,t) = 0 \\ u''(L,t) = v''(L,t) = 0 \\ E(L)J(L) \cdot u'''(L,t) = c \cdot u(L,t) \\ v(L,t) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{Re}\{w(0,t)\} = \operatorname{Im}\{w(0,t)\} = 0 \\ \operatorname{Re}\{w''(0,t)\} = \operatorname{Im}\{w''(0,t)\} = 0 \\ \operatorname{Re}\{w''(L,t)\} = \operatorname{Im}\{w''(L,t)\} = 0 \\ E(L)J(L) \cdot \operatorname{Re}\{w'''(L,t)\} = c \cdot \operatorname{Re}\{w(L,t)\} \\ \operatorname{Im}\{w(L,t)\} = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

где c — трансляционная жесткость анизотропной опоры в направлении оси OY .

Методы решения. Для исследования задачи на собственные значения и построения диаграммы Кэмпбелла рассматривается три различных метода.

1. Метод прямого аналитического решения уравнений.

2. Приближенный метод решения краевых задач bvp4c (boundary value problems), позволяющий решать краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод является встроенной функцией вычислительной системы MATLAB [9] и может быть применен также к уравнениям с переменными коэффициентами.

3. Численное решение с помощью метода конечных элементов в программных системах ANSYS и COMSOL.

Синтез аналитических и численных методов позволит верифицировать численные алгоритмы и использовать прикладные программы для описания экспериментальной установки.

Свободные колебания. Полагая в уравнениях (1) и (2) $u(s,t) = \text{Re}\{U(s)\exp(i\omega t)\}$, $v(s,t) = \text{Re}\{V(s)\exp(i\omega t)\}$, $w(s,t) = \text{Re}\{W(s)\exp(i\omega t)\}$, $b = 0$ для упрощения и нулевую правую часть, получены уравнения свободных колебаний. В данной записи ω — собственная частота. В стандартной форме:

$$\begin{cases} (E(s)J(s)U''')'' - \rho(s)F(s)\omega^2 U - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{2}(2i\Omega\omega V' - \omega^2 U') \right]' = 0 \\ (E(s)J(s)V''')'' - \rho(s)F(s)\omega^2 V + \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{2}(2i\Omega\omega U' + \omega^2 V') \right]' = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

где $U = U(s)$, $V = V(s)$ — амплитуды прогибов.

В комплексной форме:

$$(E(s)J(s)W''')'' - \rho(s)F(s)\omega^2 W - \left[\rho(s)F(s)\frac{R^2(s)}{2}(2\Omega\omega - \omega^2 W') \right]' = 0, \quad (5)$$

причем

$$W = W(s) = U(s) + iv(s). \quad (6)$$

Для нахождения прямого аналитического решения методом продолжения по параметру удобнее использовать комплексную запись (5). Стоит отметить, что аналитическое решение возможно только для случая однородного вала. Тогда уравнение (5) примет вид:

$$EJW^{(IV)} - \rho F \frac{R^2}{2} (2\Omega\omega - \omega^2) W'' - \rho F \omega^2 W = 0. \quad (7)$$

Решение уравнения (7) отыскивается в виде:

$$W = \exp(\lambda s) \quad (8)$$

Система четвертого порядка имеет четыре корня, причем в данном случае два вещественных и два чисто мнимых: $\lambda_{1,2} = \pm \alpha(\omega\Omega)$, $\lambda_{3,4} = \pm i\beta(\omega\Omega)$. Тогда решение (8) примет вид:

$$W = B_1 \exp(\alpha s) + B_2 \exp(-\alpha s) + B_3 \exp(i\beta s) + B_4 \exp(-i\beta s). \quad (9)$$

Стоит отметить, что в общем случае неизвестные константы в (9) являются комплексными:

$$B_1 = B_{1R} + iB_{1I}, B_2 = B_{2R} + iB_{2I}, B_3 = B_{3R} + iB_{3I}, B_4 = B_{4R} + iB_{4I},$$

где $B_{1R}, B_{2R}, B_{3R}, B_{4R}$ — вещественные части констант; $B_{1I}, B_{2I}, B_{3I}, B_{4I}$ — мнимые части констант. Удовлетворяя 8 граничным условиям (3) (по 4 на вещественную и мнимую части) для нахождения 8 постоянных, получена система линейных алгебраических уравнений с неизвестной собственной частотой и параметром — угловой скоростью вращения вала. Нетривиальность решения системы обуславливается равенством нулю ее определителя:

$$f(\omega, \Omega) = 0. \quad (10)$$

Нахождение корней нелинейного трансцендентного уравнения (10) для каждого значения осуществляется с помощью метода продолжения по параметру [10, 11].

Аналогичные рассуждения применимы при использовании приближенных методов решения. Здесь удобнее оперировать системой уравнений, записанной в стандартном виде (4).

Вынужденные колебания. Задачу на вынужденные колебания вращающегося вала предполагается решать bvp4c-методом и численно в ANSYS. Основной особенностью здесь является явная зависимость граничных условий от времени. Объясняется это перевязкой $u(s,t)$, $v(s,t)$ — движений при вращении вала. В силу соотношений (2) и (6) было получено:

$$u(s,t) = (U(s)\cos\Omega t - V(s)\sin\Omega t), v(s,t) = (V(s)\sin\Omega t + U(s)\cos\Omega t).$$

Таким образом, стандартный вид граничных условий (3) приобретает вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(0)\cos\Omega t - V(0)\sin\Omega t = 0 \\ U''(0)\cos\Omega t - V''(0)\sin\Omega t = 0 \\ \frac{E(L)J(L)[U''(L)\cos\Omega t - V''(L)\sin\Omega t]}{c[U(L)\cos\Omega t - V(L)\sin\Omega t]} - 1 = 0 \\ U'''(L)\cos\Omega t - V'''(L)\sin\Omega t = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} U(0)\sin\Omega t + V(0)\cos\Omega t = 0 \\ U''(0)\sin\Omega t + V''(0)\cos\Omega t = 0 \\ U(L)\sin\Omega t + V(L)\cos\Omega t = 0 \\ U'''(L)\sin\Omega t + V'''(L)\cos\Omega t = 0 \end{array} \right\}. \quad (11)$$

Результаты верификации численных методов. Было принято ограничиться исследованием первых 3 критических скоростей вращения вала. На рис. 2 представлены формы колебаний, соответствующие данным скоростям. В силу неизменности граничных условий формы колебаний одинаковы для случаев однородного и неоднородного вала.

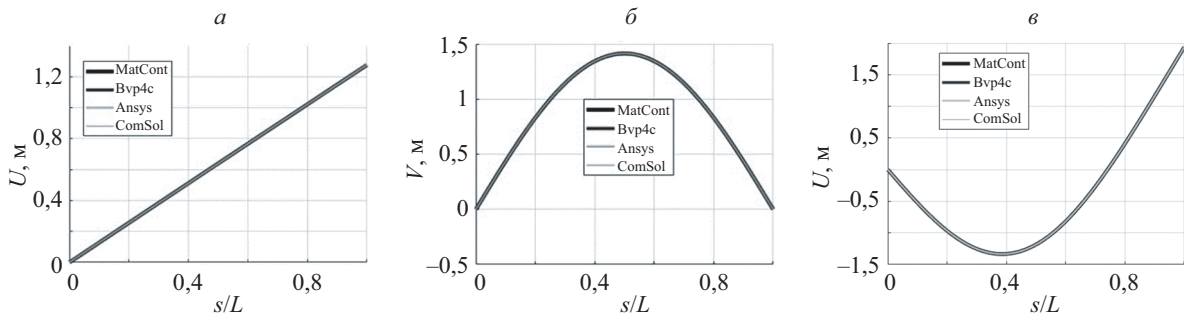


Рис. 2. Первые 3 формы колебаний: *a* — 1 форма, *b* — 2 форма, *v* — 3 форма

Также изучено влияние соотношения характерных размеров однородного вала $\alpha = L/d$ на эволюцию первой формы колебаний невращающегося вала, т. е. в условии отсутствия в исходных уравнениях (1) и (2) слагаемого, характеризующего гироскопический момент. В зависимости от данного соотношения будет определяться вклад инерции на поворот в искомых уравнениях. Исходная система становится развязанной, и U, V -движения исследуются независимо. На рис. 3 представлена эволюция первой формы в зависимости от параметра $\alpha = L/d$, а также диаграммы Кэмпбелла.

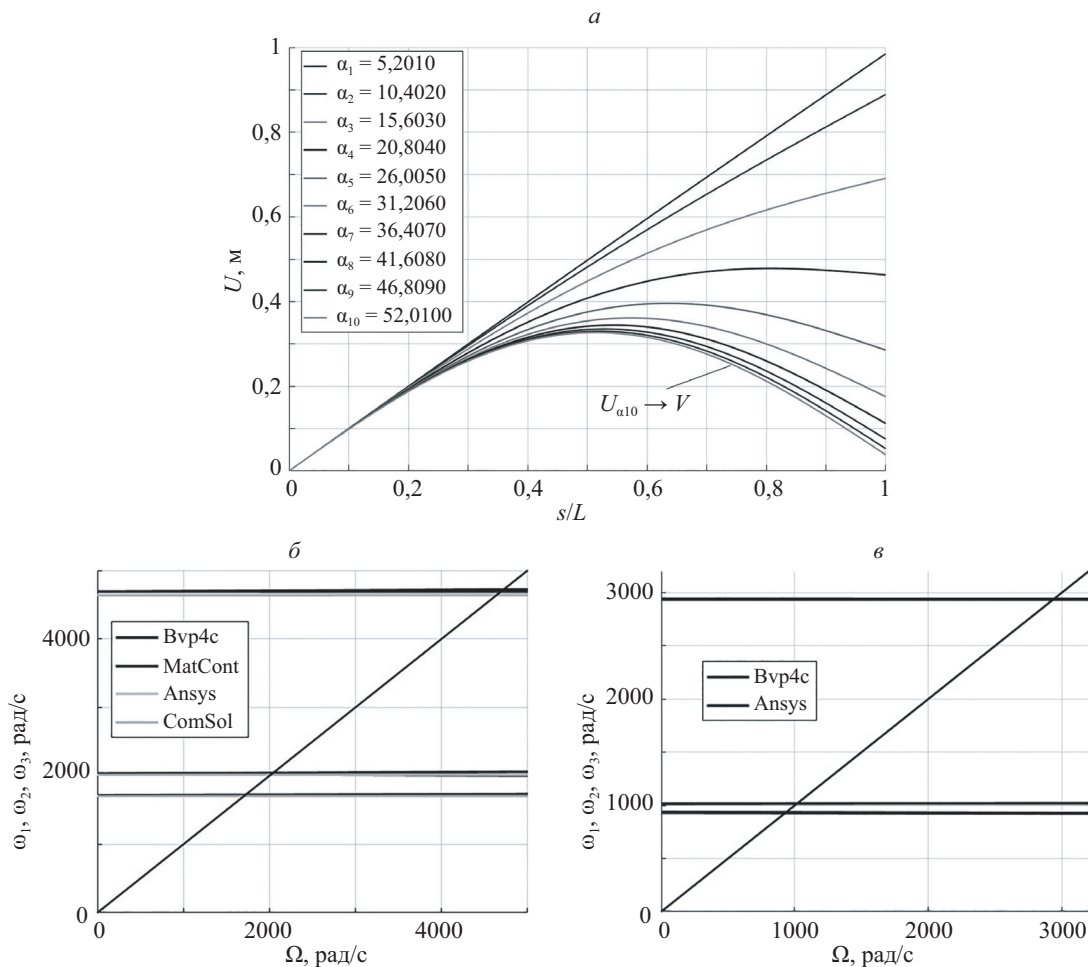


Рис. 3. Эволюция первой формы колебаний однородного вала (*a*) и диаграмма Кэмпбелла для однородного (*b*) и неоднородного (*v*) вала

Как видно из рис. 3, при увеличении параметра α , т. е. при увеличении длины вала или уменьшении радиуса его поперечного сечения жесткость вала уменьшается, становясь меньше жесткости упругой оп-

ры. В этом случае разумно ожидать эволюцию формы колебаний U от случая, где движение связано лишь с деформацией пружины, к случаю, где вал деформируется аналогично условию шарнирного опирания на правом конце в V -движении.

Диаграммы Кэмпбелла демонстрируют слабую зависимость критических скоростей вращения вала. Также не наблюдается эффекта расщепления частот и возникновения прямой и обратной прецессии в силу несимметричности граничных условий и отсутствия кратных частот.

На рис. 4 представлены результаты решения задачи на вынужденные колебания с граничными условиями (11) для однородного (рис. 4, а) и неоднородного (рис. 4, б) вала. Исследовался установившийся режим колебаний.

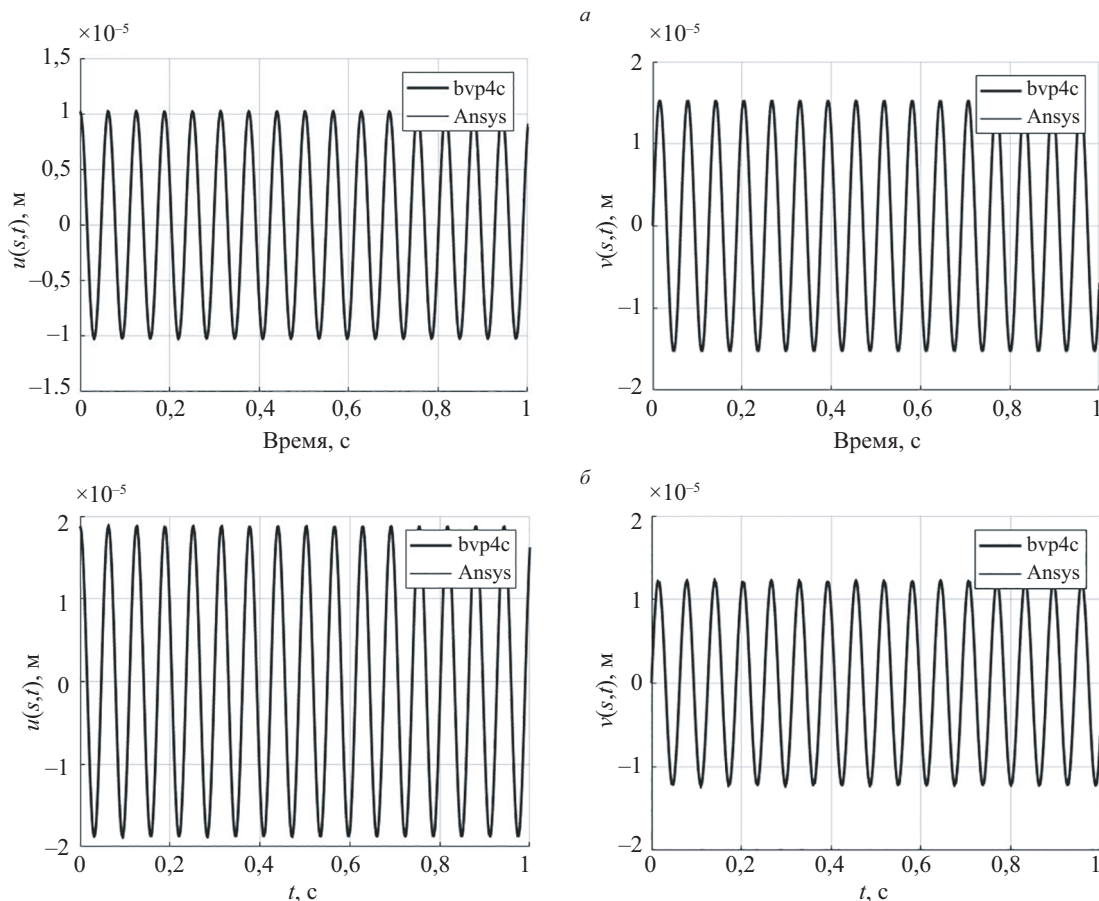


Рис. 4. Диаграммы Кэмпбелла для однородного (а) и неоднородного (б) вала

Таким образом, численные методы были верифицированы, и следующим шагом является моделирование экспериментальной установки.

Численное моделирование экспериментальной установки. На рис. 5 представлена схема экспериментальной установки, состоящая из медного вала и барабана из тефлона.

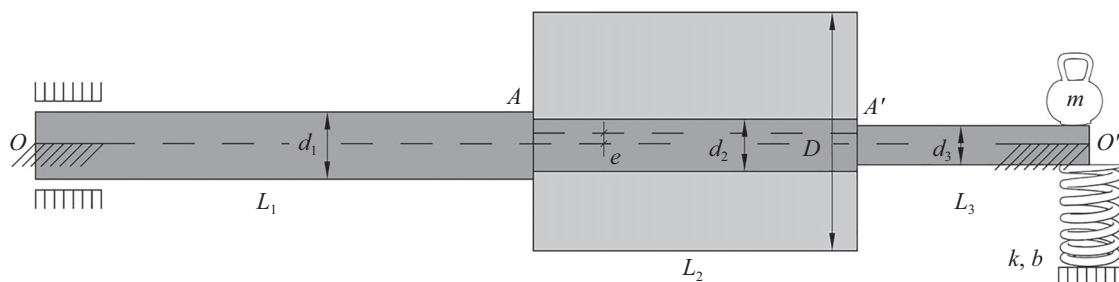


Рис. 5. Схема экспериментальной установки: OO' , AA' — оси вала и барабана соответственно; d_1, d_2, d_3 — диаметры участков вала; D — диаметр барабана; L_1, L_2, L_3 — длины участков вала; k, b — коэффициенты жесткости и демпфирования, определяемые из эксперимента и по теоретической формуле; m — дополнительный силовой фактор; e — неизвестный эксцентриситет

Теоретическая оценка жесткости пружины k_{th} может быть получена согласно справочной формуле, представленной в [12]:

$$k_{th} = \frac{Gt^4}{(D+d)^3 n},$$

где G — модуль сдвига, t — толщина (диаметр) проволоки, D, d — внешний и внутренний диаметр витка, n — количество витков.

Также жесткость и коэффициент демпфирования определялись из эксперимента на свободные колебания груза на пружине. Теоретическое значение жесткости $k_{th} = 13582$ Н/м хорошо согласуется с результатами эксперимента $k_{exp} = 14800$ Н/м. Значение коэффициента демпфирования $b = 258,4$ Нс/м.

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} u(0,t), v(0,t), u(L,t) = 0 \\ u''(0,t), v''(0,t), u''(L,t), v''(L,t) = 0 \\ E(L)J(L)u''(L,t) = m\ddot{u}(L,t) + b\dot{u}(L,t) + ku(L,t) \end{cases}, \quad (12)$$

где $k = k_{exp}$.

Граничные условия, описываемые соотношениями (12), отражают их схематичное представление на рис. 5. В таблице представлено описание расчетных моделей: способы геометрического моделирования барабана, способы задания нагрузки и используемые конечные элементы.

Таблица. Описание расчетных моделей

Модели	Моделирование барабана	Задание вынуждающей силы	Используемые конечные элементы
Модель 1	Сосредоточенная масса	Точно на массу	Beam188 Mass21 Combin14
Модель 2	Распределенная масса по длине второго участка L_2	Распределенно по узлам второго участка	Beam188 Combin14
Модель 3	Распределенная масса по длине второго участка L_2	На концевые узлы второго участка (в предположении закрепления барабана на торцах)	Beam188 Combin14
Модель 4	Явное моделирование барабана с эквивалентным модулем Юнга	Распределенно по узлам второго участка	Beam188 Combin14
Модель 5	Явное моделирование барабана с эквивалентным модулем Юнга	На концевые узлы второго участка (в предположении закрепления барабана на торцах)	Beam188 Combin14

Всего во внимание принимается 15 расчетных моделей: модели 1–5 с тремя разными значениями добавочной массы $m = 0$, $m = 0,0303$ и $m = 0,0544$ кг, которые также моделируются с использованием элемента Mass21.

Геометрическая неоднородность по длине вала моделируется настройками поперечного сечения на каждом из участков. На рис. 6 представлены конечно-элементные модели.

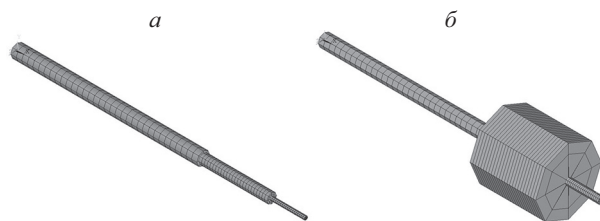


Рис. 6. Конечно-элементные модели: без учета жесткостных свойств и геометрических размеров барабана (модели 1–3) (а), с учетом жесткостных свойств и геометрических размеров барабана (модели 4, 5) (б)

Результаты. Результаты исследования показали, что каждый из трех способов моделирования барабана (сосредоточенная масса, распределенная масса или явное моделирование барабана) при разных значениях m демонстрирует полностью идентичную эволюцию критических скоростей с увеличением скорости вращения, что является первым признаком к отсутствию чувствительности системы к добавочному силовому фактору заданного порядка. На рис. 7 представлена диаграмма Кэмпбелла для экспериментальной установки, получаемая для всех представленных моделей.

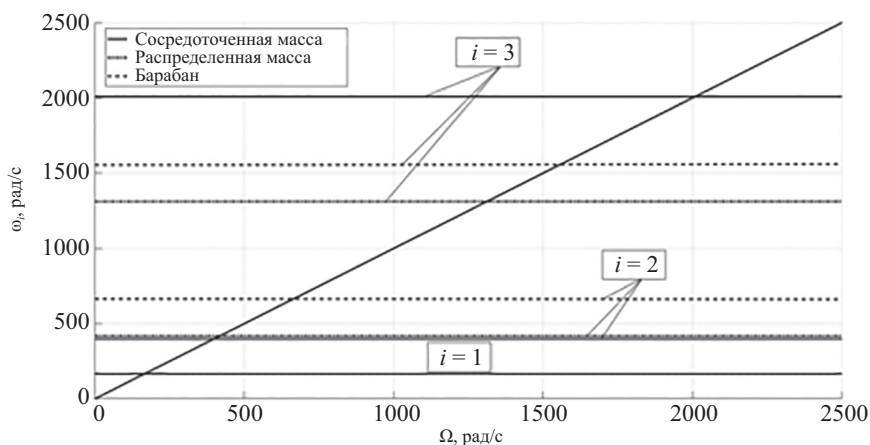


Рис. 7. Диаграмма Кэмпбелла

Примечательно, что как и в тестовых задачах, наблюдается слабая зависимость низших критических скоростей от скорости вращения вала. Помимо указанных ранее причин, есть основания полагать [5], что данная тенденция выражается все более ярко при увеличении скорости вращения, с одной стороны, и при рассмотрении высших критических скоростей – с другой. Однако эти вопросы выходят за рамки данного исследования.

Также стоит отметить, что вторая критическая скорость при явном моделировании барабана выше за счет большего модуля упругости и момента инерции сечения на втором участке. Третья критическая скорость оказалась выше для модели с сосредоточенной массой, так как точка расположения массы является узловой. Это свидетельствует о том, что данная масса не вносит вклад при вычислении собственной частоты. В свою очередь при других способах моделирования барабана масса вносит вклад именно за счет своей распределенности, несмотря на наличие узловой точки.

Далее путем решения обратной задачи была определена величина эксцентриситета барабана. Для этого подбирается величина эксцентриситета для одного значения скорости вращения вала и проверяется, насколько точного совпадения удастся достичь при других скоростях вращения. Эксцентриситет величиной $e = 1,7$ мм был подобран для скорости $\Omega = 1400$ об/мин.

На рис. 8 представлено сравнение установившихся вынужденных колебаний (по величине поперечной силы Q) для скорости вращения $\Omega = 1400$ об/мин и случая нулевой добавочной массы $m = 0$ кг.

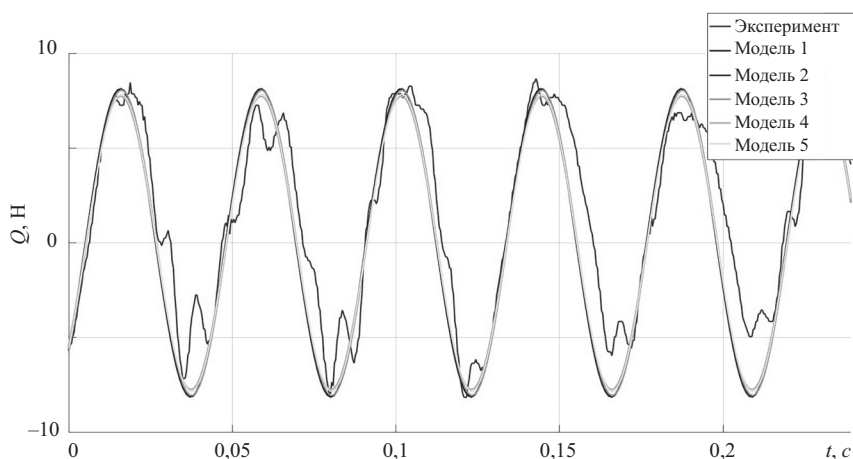


Рис. 8. Перерезывающая сила на правом конце для случая нулевой добавочной массы

На рис. 9 представлено сравнение по амплитуде перерезывающей силы для разных скоростей вращения вала и для различных величин добавочной массы, а также амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) для нулевой добавочной массы. Точками на графике обозначены экспериментальные данные.

Как видно из рис. 9, изменение величины добавочной массы в интересующем диапазоне не демонстрирует существенной разницы. Это свидетельствует о том, что экспериментальная установка слабо чувствительна к дополнительной нагрузке такого порядка, поэтому констатируется необходимость минимизации влияния побочных эффектов, заменив упругую опору на магнитную.

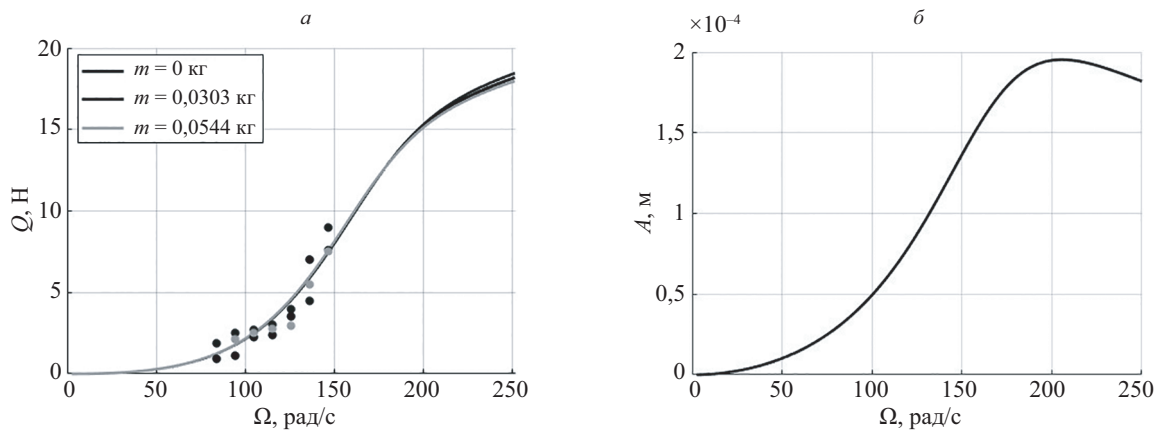


Рис. 9. Амплитуда перерезывающей силы (а), амплитудно-частотная характеристика (б) на правом конце

Стоит отметить, что на амплитудно-частотной характеристике отсутствует резонансный пик, найденный на частоте $\Omega = 170$ рад/с. Это связано с тем, что система является сильно задемпфированной, поэтому амплитуда в данной точке становится меньше, чем амплитуда, соответствующая нерезонансным частотам. Воспользуемся теоретической оценкой для вала Джеффкотта для резонансной амплитуды $P_{рез}$ [5]:

$$P_{рез} = \frac{\sqrt{Mke}}{b} = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ м,}$$

где M — масса вала. Данный результат хорошо согласуется со значением на АЧХ.

Направление дальнейших исследований

Как было сказано, возникает необходимость повышения чувствительности экспериментальной установки. Для этого необходимо избавиться от побочных эффектов, таких как прямой контакт вала с другими частями испытательного стенда, неучтенного в модели трения в опорах. На рис. 10 представлена схема установки с магнитной опорой.

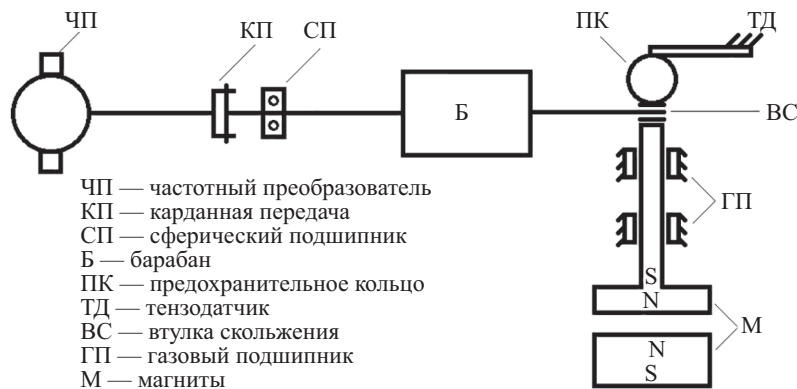


Рис. 10. Схема установки с магнитной опорой

Для записи уравнений движения применяется вариационный принцип Гамильтона [13]:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi) dt = 0, \tag{13}$$

где T, Π — кинетическая и потенциальная энергии, в которые входят перемещения $u(s,t), v(s,t)$, а также их производные по координате и времени. Предполагается осуществить переход от распределенной модели к модели вала Джеффкотта с использованием метода Релея-Ритца. Записывая выражения для прогибов в виде $u(s,t) = U(s)q_1(t), v(s,t) = V(s)q_2(t)$ и подставляя их в уравнение (13), будет получена система уравнений относительно $q_1(t), q_2(t)$. Координатные функции $U(s), V(s)$ определяются заранее из решения задачи на собственные значения для вала с сосредоточенной массой [14]. К данной системе будет добавлена управляющая сила [6], имеющая упрощенный вид в силу конструктивных особенностей:

$$\begin{cases} F_{q_1} = -k_0 \left\{ \frac{I_0 + i_{q_1}}{g_0 + q_1} \right\}^2, \\ F_{q_2} = 0 \end{cases}$$

где $q_1 = q_1(t)$, $q_2 = q_2(t)$ — обобщенные координаты; $F_{q_1} = F(q_1, i_{q_1})$, $F_{q_2} = F(q_2, i_{q_2})$ — управляющая электромагнитная сила; k_0 — постоянная электромагнитной силы; I_0 — ток смещения; g_0 — номинальный зазор между магнитами; $i_{q_1} = -k_s x$ — управляющий ток, который связан с переменной блока системы управления x с помощью коэффициента усиления сигнала k_s .

Управление предполагается осуществлять по принципу положительной обратной связи по перемещению (Positive Position Feedback, PPF) [15].

Таким образом, будет получена система дифференциальных уравнений рассматриваемой управляемой и управляющей моделей в общем виде [6]:

$$\begin{cases} m\ddot{q}_1 + c_1\dot{q}_1 + (k_1 + k_2 y_{st}^2)q_1 + 2k_2 y_{st} q_1 q_2 + k_2 (q_1^2 + q_2^2)q_1 = m e_d \Omega^2 \cos \Omega t - F_{q_1} \\ m\ddot{q}_2 + c_2\dot{q}_2 + (k_1 + 3k_2 y_{st}^2)q_2 + k_2 y_{st} (q_1^2 + 3q_2^2) + k_2 (q_1^2 + q_2^2)q_2 = m e_d \Omega^2 \sin \Omega t \\ m\ddot{x} + c_3\dot{x} + k_3 x = k_f q_1 \\ m\ddot{y} + c_3\dot{y} + k_3 y = k_f q_2 \end{cases}, \quad (14)$$

где x, y — переменная блока системы управления; y_{st} — статическое смещение геометрического центра из-за веса диска; e_d — эксцентриситет диска; k_f — коэффициент усиления сигнала обратной связи; $m, k_1, k_2, k_3, c_1, c_2, c_3$ — параметры модели.

Систему уравнений (14) предполагается решать методами возмущений, в частности, методом многих масштабов [16].

Заключение

В данной работе исследована динамика вращающегося вала с учетом распределенных инерционных, упругих и эксцентриситетных характеристик, а также рассмотрены методы управления изгибными колебаниями с применением активных магнитных подшипников.

Разработана детальная математическая модель изгибных колебаний вращающегося вала, учитывающая распределенность характеристик. Данная модель может быть использована в задачах расчета высокоскоростных паровых и газовых турбин, электродвигателей и т. д.

Верифицированы численные методы решения задач на основе описанной модели.

На основе верифицированных методов была смоделирована экспериментальная установка. Первая критическая скорость вращения вала $\Omega = 170$ рад/с, величина эксцентриситета барабана $e = 1,7$ мм.

В качестве дальнейшего направления исследований для повышения чувствительности объекта предлагается минимизировать влияние побочных факторов на динамику путем исключения имеющейся упругой анизотропной опоры и ее замены на магнитную опору.

Литература

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд-во Академии Наук СССР, 1959. 248 с.
2. Циглер Г. Основы теории устойчивости конструкций. М.: МИР, 1971. 191 с.
3. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. М.: Техничко-теоретическая литература, 1956. 600 с.
4. Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. 2-е изд. М.: Наука, 1970. 512 с.
5. Yamamoto T., Ishida Y. *Linear and Nonlinear Rotordynamics*. Wiley, 2012. 474 p. doi: 10.1002/9783527651894
6. Saeed N.A., Kamel M. Active magnetic bearing-based tuned controller to suppress lateral vibrations of a nonlinear Jeffcott rotor system // *Nonlinear Dynamics*. 2017. V. 90. N 1. P. 457–478. doi: 10.1007/s11071-017-3675-y
7. Коллатц Л. Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). М.: Наука, 1968. 503 с.
8. Paidoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions*. Academic Press, 1998. V. 1. 572 p.

References

1. Dimentberg F.M. *Flexural Vibrations of Rotating Shafts*. Moscow, Academy of Science USSR Publ., 1959, 248 p. (in Russian)
2. Ziegler H. *Principles of Structural Stability*. Blaisdell Publ., 1968.
3. Bolotin V.V. *Dynamic Stability of Elastic Systems*. Moscow, Tekhniko-Teoreticheskaya Literatura Publ., 1956, 600 p. (in Russian)
4. Mikhlín S.G. *Variational Methods in Mathematical Physics*. 2nd ed. Moscow, Nauka Publ., 1970, 512 p. (in Russian)
5. Yamamoto T., Ishida Y. *Linear and Nonlinear Rotordynamics*. Wiley, 2012, 474 p. doi: 10.1002/9783527651894
6. Saeed N.A., Kamel M. Active magnetic bearing-based tuned controller to suppress lateral vibrations of a nonlinear Jeffcott rotor system. *Nonlinear Dynamics*, 2017, vol. 90, no. 1, pp. 457–478. doi: 10.1007/s11071-017-3675-y
7. Collatz L. *Eigenwertaufgaben Mit Technischen Anwendungen*. Leipzig, 1963.

9. Shampine L.F., Kierzenka J., Reichelt M.W. Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c. *MATLAB File Exchange*, 2000. 27 p.
10. Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 3rd ed. Springer, 2004. V. 112. 631 p. doi: 10.1007/978-1-4757-3978-7
11. Dhooge A., Govarets W., Kuznetsov Yu.A., Mestrom W., Riet A.M., Sautois B. *MATCONT and CL_MATCONT: Continuation Toolboxes in MATLAB*. Universiteit Gent Belgium, Utrecht University The Netherland, 2006. 100 p.
12. Гузенков Г. Краткий справочник к расчетам деталей машин. 4-е изд. М.: Высшая школа, 1964. 325 с.
13. Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
14. Low K.H. On the methods to derive frequency equations of beams carrying multiple masses // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2001. V. 43. N 3. P. 871–881. doi: 10.1016/s0020-7403(00)00052-7
15. Shan J., Liu H.T., Sun D. Slewing and vibration control of a single-link flexible manipulator by positive position feedback (PPF) // *Mechatronics*. 2005. V. 15. N 4. P. 487–503. doi: 10.1016/j.mechatronics.2004.10.003
16. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, 1981. 535 p.
8. Paidoussis M.P. *Fluid-Structure Interactions*. Academic Press, 1998, vol. 1, 572 p.
9. Shampine L.F., Kierzenka J., Reichelt M.W. Solving Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations in Matlab with bvp4c. *MATLAB File Exchange*, 2000. 27 p.
10. Kuznetsov Yu.A. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. 3rd ed. Springer, 2004, vol. 112, 631 p. doi: 10.1007/978-1-4757-3978-7
11. Dhooge A., Govarets W., Kuznetsov Yu.A., Mestrom W., Riet A.M., Sautois B. *MATCONT and CL_MATCONT: Continuation Toolboxes in MATLAB*. Universiteit Gent Belgium, Utrecht University The Netherland, 2006, 100 p.
12. Guzenkov G. *Quick Reference to the Calculations of Machine Details*. 4th ed. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 1964, 325 p. (in Russian)
13. Markeev A.P. *Theoretical Mechanics*. Moscow, CheRo Publ., 1999, 572 p. (in Russian)
14. Low K.H. On the methods to derive frequency equations of beams carrying multiple masses. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2001, vol. 43, no. 3, pp. 871–881. doi: 10.1016/s0020-7403(00)00052-7
15. Shan J., Liu H.T., Sun D. Slewing and vibration control of a single-link flexible manipulator by positive position feedback (PPF). *Mechatronics*, 2005, vol. 15, no. 4, pp. 487–503. doi: 10.1016/j.mechatronics.2004.10.003
16. Nayfeh A.H. *Introduction to Perturbation Techniques*. Wiley, 1981, 535 p.

Авторы

Муртазин Ильнар Робертович — инженер, ассистент, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-7580-5669, murtazin_ir@spbstu.ru

Лукин Алексей Вячеславович — кандидат физико-математических наук, ассистент, инженер, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, Scopus ID: 56373934800, ORCID ID: 0000-0003-2016-8612, lukin_av@spbstu.ru

Попов Иван Алексеевич — ассистент, инженер, Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, 195251, Российская Федерация, Scopus ID: 57198043927, ORCID ID: 0000-0003-4425-9172, popov_ia@spbstu.ru

Authors

Inar R. Murtazin — engineer, assistant, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-7580-5669, murtazin_ir@spbstu.ru

Alexey V. Lukin — PhD, assistant, engineer, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, Scopus ID: 56373934800, ORCID ID: 0000-0003-2016-8612, lukin_av@spbstu.ru

Ivan A. Popov — assistant, engineer, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, 195251, Russian Federation, Scopus ID: 57198043927, ORCID ID: 0000-0003-4425-9172, popov_ia@spbstu.ru