УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
январь–февраль 2019 Том 20 № 1 ISSN 2226-1494 http://ntv.itmo.ru/
SCIENTIFIC AND TECHNICAL JOURNAL OF INFORMATION TECHNOLOGIES, MECHANICS AND OPTCS
January–February 2020 Vol. 20 No 1 ISSN 2226-1494 http://ntv.itmo.ru/en/
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
июль–август 2019 Том 19 Номер 4

УДК 51-72 doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-141-146

ОСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМАХ

П.П. Рымкевич, В.В. Головина, А.И. Алтухов

Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация
Адрес для переписки: victoria_gol@mail.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 24.12.19, принята к печати 15.01.20
Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Рымкевич П.П., Головина В.В., Алтухов А.И. Осреднение уравнений движения в потенциальных автономных системах // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 1. № 1. С. 141–146. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-141-146

Аннотация

Предмет исследования. Предложен метод осреднения уравнений движения. В различных разделах физики (механика, электродинамика и др.), а также при рассмотрении вибрационных процессов возникает необходимость осреднения имеющихся уравнений движения по некоторому масштабу времени. Чаще всего требуется рассмотреть процессы в масштабе реального времени и исключить высокочастотные колебания. При этом процедура осреднения приводит к тому, что уравнения движения для «медленного» времени существенно меняют свой вид. Использование обычного среднего арифметического – в равной степени всех значений времени в заданном интервале — не позволяет решить задачу определения явного вида новых уравнений движения в масштабе «медленного» времени. **Метод.** Для процедуры осреднения предложено использовать интегральное преобразование с гладким нормированным ядром. В качестве ядра выбрана функция Гаусса, позволяющая эффективно «обрезать» высокие частоты и обладающая удобными алгебраическими свойствами. Построенный на этих свойствах алгебраический подход позволяет эффективно решать задачу осреднения — построение системы осредненных по некоторому масштабу уравнений. **Основные результаты.** Показано, что в результате осреднения по некоторому малому масштабу времени появляются дополнительные слагаемые, зависящие от этого масштаба. Если в исходной системе уравнений движения отсутствуют скорости, то в новой осредненной системе появляются дополнительные слагаемые, зависящие не только от координат, но и от скоростей. Это позволяет объяснить природу диссипативных сил. При этом в построенном алгебраическом решении осреднения уравнения сохраняют первоначальный вид. **Практическая значимость.** Предлагаемый метод может быть применен к любой системе дифференциальных уравнений, в которой необходимо получить сглаженные решения. В частности, областью применения предложенного метода является механика деформируемого твердого тела и вибрационная механика.

Ключевые слова
потенциальная система, кольцо, линейный оператор, коммутативное умножение, осреднение

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-141-146

MOTION EQUATION AVERAGING IN POTENTIAL AUTONOMOUS SYSTEMS

P.P. Rymkevich, V.V. Golovina, A.I. Altukhov

Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation
Corresponding author: victoria_gol@mail.ru

Article info
Received 24.12.19, accepted 15.01.20
Article in Russian

For citation: Rymkevich P.P., Golovina V.V., Altukhov A.I. Motion equation averaging in potential autonomous systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 141–146 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-141-146

Abstract

Subject of Research. The paper proposes the averaging method of motion equations. In various branches of physics (mechanics, electrodynamics) and while analyzing vibration processes, we may need to average the existing equations of motion over a certain time scale. Most often it is required to consider processes in real time and to exclude highfrequency oscillations. In this case, the averaging procedure leads to the fact that the equations of motion for "slow" time change significantly their form. The usually applied arithmetic mean, i.e. equally all-time values in the given interval, does not solve the problem of determining the explicit form of the new motion equations for a "slow" time scale. **Method.** For the averaging procedure we propose to use the integral transformation with a smooth normalized kernel. The Gauss function is chosen as this kernel, because it "cuts off" adequately high frequencies and has convenient algebraic properties. The algebra based on these properties gives the possibility to solve efficiently the averaging problem and create a system of equations averaged over a certain scale. **Main Results.** It is shown that additional terms depending on this scale appear as a result of averaging over a certain small time scale. In contrast to the absence of velocities in the original system of motion equations, additional terms appear in the new averaged system depending not only on the coordinates, but also on the velocities. This fact explains the nature of dissipative forces. Moreover, in the created averaging algebra, the equations remain in their original form. **Practical Relevance.** The proposed method can be applied to any system of differential equations when it is necessary to obtain smoothed solutions. In particular, deformable solid mechanics and vibration mechanics are the proposed method application areas.

Keywords
potential system, ring, linear operator, commutative multiplication, averaging

Введение

В ряде задач физики и механики сплошных сред встает проблема учета дискретности строения вещества, т. е. внутренних (скрытых) степеней свободы [1]. Так, например, учет внутренних вращений, называемый механикой Коссера [2], применяется в теории сыпучих тел. Все большее количество исследователей уходят от классической концепции бестелесной материальной точки к концепции тела-точки Коссера. На базе этой концепции построена механика деформируемого тела Коссера [1, 3]. Следующим примером может служить теория Миндлина [4], в которой материальная точка наделяется дополнительно еще шестью степенями свободы однородной деформации. Еще более сложная теория Грина–Равлина [5] — мультиполярная теория. Во всех теориях упругих сред с учетом их структуры [6] возникает проблема, каким образом учесть влияние быстропротекающих внутренних процессов в масштабе макроскопического времени. Для этой цели чаще всего микроскопические уравнения осредняют по времени. Аналогичная проблема возникает в теории вибрационных процессов и устройств [7]. Решение задач вибрационной механики, предложенное И.И. Блехманом [7], получило дальнейшее развитие в рамках его школы [8, 9] в методе разделения движений. При этом вводятся два масштаба времени — обычное «медленное» время t и «быстрое» — ωt, где ω — частота вибраций. По периоду вибраций $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ производится осреднение, что приводит к разделению движений и определению искомой вибрационной силы.

Постановка задачи

Для достаточно общего случая проблему осреднения движения можно свести к задаче, в которой рассматривается потенциальная автономная система N уравнений движения – обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{q}_n(t) = f_n(\mathbf{q}(t)) = f_n(q_1, q_2, ..., q_N), \tag{1}$$

где $q_n(t)$ — обобщенные координаты, зависящие от времени t; $f_n(\mathbf{q})$ — силовая функция, зависящая от вектора состояния $\mathbf{q}(t)$.

В результате осреднения всех обобщенных координат по некоторому масштабу времени τ меняется вид уравнений движения. Таким образом, требуется найти новое поле сил $F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s)$, т. е. явный вид новых силовых функций в масштабе макровремени («медленного» времени):

$$\ddot{\tilde{q}}_n = F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s),$$

где $\mathbf{q}$ — вектор обобщенных координат; $\dot{\tilde{\mathbf{q}}}$ — вектор обобщенных скоростей; s — параметр осреднения.

Описание предлагаемого метода решения

В подавляющем большинстве физических задач среднее по масштабу времени τ определяется как среднее арифметическое

$$\langle x \rangle_\tau = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} x(t)dt. \tag{2}$$

Однако использование соотношения (2) непосредственно к системе (1) не позволяет решить обозначенную выше задачу [6]. Чтобы эти вопросы исключить, в данной работе предлагается провести операцию осреднения с разным весом. Так, в соотношении (2) значения, близкие к фиксированному значению момента времени t, необходимо брать с бóльшим весом. Для этого целесообразно воспользоваться интегральным преобразованием с гладким нормированным обрезающим ядром:

$$\langle x \rangle_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta)\varphi(t-\theta)d\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\theta)\varphi(\theta)d\theta = x(t) * \varphi(t),$$

где φ — ядро преобразования; θ — переменная интегрирования.

Для решения поставленной задачи в качестве ядра интегрального преобразования используется нормальное распределение Гаусса, обладающее рядом полезных свойств. Тогда получаем, что

$$\begin{aligned} \langle x \rangle_\tau = \tilde{x}(t) &\stackrel{def}{=} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x(\theta) e^{-\frac{(t-\theta)^2}{2\tau^2}} d\theta = \\ &= \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}} * x(t) = u(t) * x(t), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\tilde{x}$ — осредненное значение величины x; символ «*» представляет обычную свертку функций (умножение в смысле Микусинского [10]); $u(t) = \dfrac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$.

Изоморфизм между обычным умножением и умножением в смысле свертки устанавливается с помощью преобразования Лапласа. На этом и строится операционное исчисление [11]. Обратим внимание, что если $x(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная функция, то в силу свойств интеграла (3) полученная гладкая осредненная аналитическая функция дифференцируема сколь угодно число раз.

Свойства интегрального преобразования позволяют построить новую алгебру, примененную авторами в работах [12–15].

Приведем некоторые простейшие свойства данного интегрального преобразования.

1. Преобразование (3) линейно:

$$u*[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)] = \lambda_1 u*x_1 + \lambda_2 u*x_2,$$

где λ_1, λ_2 — произвольные комплексные числа; x_1, x_2 — некоторые функции от переменной t.

2. Осредненная функция в выражении (3) является фундаментальным решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \tilde{x}}{\partial S} = \frac{\partial^2 \tilde{x}}{\partial t^2}. \tag{4}$$

3. Операторное решение уравнения (4) приводит к тому, что оператор осреднения представляет собой линейный дифференциальный оператор:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) = e^{SD^2} = e^{\frac{\tau^2}{2}D^2}. \tag{5}$$

Здесь $D = \dfrac{\partial}{\partial t}$; $S = \dfrac{\tau^2}{2}$.

Функцию от оператора дифференцирования D следует понимать в смысле [16].

4. Осредненная функция (4) подчиняется следующему коммутационному соотношению:

$$\hat{\mathbf{u}}(S,t) f(t,D) = f(t + 2SD, D)\hat{\mathbf{u}}(S,t). \tag{6}$$

Впервые Фейнман [17] начал систематически использовать функции от упорядоченных операторов, а также исчисление вейлевских функций [17–19]. Умножение в смысле (6) тесно связано с алгеброй Гейзенберга [15, 20, 21].

5. В интегральном преобразовании (3) выполняется закон сложения дисперсий:

$$\hat{\mathbf{u}}(S + \lambda, t) = \hat{\mathbf{u}}(\lambda, t) * \hat{\mathbf{u}}(S, t) = \hat{\mathbf{u}}(\lambda, t) * \tilde{x}(t),$$

где $\hat{\mathbf{u}}(S + \lambda, t)$; $\hat{\mathbf{u}}(\lambda, t)$; $\hat{\mathbf{u}}(S, t)$ — операторы осреднения разного масштаба осреднения.

6. Наиболее интересным свойством данного преобразования является мультипликативность:

$$\hat{\mathbf{u}}(t) * [x_1(t) x_2(t) x_3(t) \ldots] = \tilde{x}_1(t) \circ \tilde{x}_2(t) \circ \tilde{x}_3(t) \circ \ldots,$$

где «○» — символ умножения, определяемый соотношением (7).

Пример реализации метода

Рассмотрим ассоциативное коммутативное кольцо $R_{\odot}$, в котором с естественным определением сложения определим умножение следующим образом:

$$\tilde{Z}(t) = \tilde{x}(t) \circ \tilde{y}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2n}}{n!} \tilde{x}^{(n)}(t) \tilde{y}^{(n)}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau^{2n}}{n!} \frac{\partial^n \tilde{x}(t)}{\partial t^n} \frac{\partial^n \tilde{y}(t)}{\partial t^n}, \tag{7}$$

где $\tilde{x}(t)$; $\tilde{y}(t)$; $\tilde{Z}(t)$ — элементы рассматриваемого кольца.

Данное определение умножения — одно из возможных его представлений. Докажем утверждение (7).

Поскольку функции $\tilde{x}(t)$; $\tilde{y}(t)$ подчиняются уравнению теплопроводности (4) с начальными условиями: $\tilde{x}(t,s)|_{S=0} = x(t)$; $\tilde{y}(t,s)|_{S=0} = y(t)$, покажем, что и $\tilde{z}(t,s) = u(t)*xy$ также подчиняется уравнению теплопроводности (4). Действительно,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_S{}'(t,s) &= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2s)^{n-1}}{(n-1)!} \tilde{x}^{(n)}(t,s)\tilde{y}^{(n)}(t,s) + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2s)^n}{n!} [\tilde{x}_S{}^{(n)'}(t,s)\tilde{y}^{(n)}(t,s) + \tilde{x}^{(n)'}(t,s)\tilde{y}^{(n)'}(t,s)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2s)^n}{n!} \{\tilde{x}^{(n+2)'}(t,s)\tilde{y}^{(n)}(t,s) + \tilde{x}^{(n)}(t,s)\tilde{y}^{(n+2)'}(t,s) + \\ &+ 2\tilde{x}^{(n+1)'}(t,s)\tilde{y}^{(n+1)'}(t,s)\} = D^2[\tilde{x}(t,S) \circ \tilde{y}(t,S)] \end{aligned}$$

с начальными условиями $\tilde{z}(t,s)|_{S=0} = x(t)y(t)$.

В силу теоремы единственности для уравнения теплопроводности утверждение доказано.

Выражение (7) также вытекает из следующих рассуждений.

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(t) &= e^{SD^2}(x(t)y(t)) = e^{S(D_1+D_2)^2}(\overset{1}{x}(t)\overset{2}{y}(t)) = \\ &= e^{SD_1{}^2} e^{SD_2{}^2} e^{2SD_1D_2} \overset{1}{x}(t)\overset{2}{y}(t) = e^{2SD_1D_2}(e^{SD_1{}^2}\overset{1}{x}(t))(e^{SD_2{}^2}\overset{2}{y}(t)) = \\ &= e^{2SD_1D_2} \overset{1}{\tilde{x}}(t,s)\overset{2}{\tilde{y}}(t,s) \overset{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2s)^n}{n!} \tilde{x}^n(t,s)\tilde{y}(t,s). \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь авторы воспользовались известным тождеством Лейбница:

$$D(u(t)v(t)) = (D_1 + D_2)\overset{1}{u}(t)\overset{2}{v}(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t).$$

Представление (8) будем использовать далее в силу его простоты.

Если время осреднения устремить к нулю, то умножение в смысле (8) переходит в обычное умножение. Таким образом, кольцо C_f — кольцо функций с естественным умножением $C_f \subset R_{\odot}$.

Данное кольцо является кольцом с единицей $e(t) \equiv 1$.

С учетом фундаментальной теоремы математики [11] — всякое коммутативное кольцо R без делителей нуля может быть расширено до поля.

Над осредненными величинами с помощью преобразования (3) можно осуществлять все алгебраические операции.

Важность и полезность преобразования (3) заключается в том, что приведенные выше свойства предлагаемого в предыдущем разделе способа осреднения позволяют **сохранить инвариантность всех уравне-**

ний физики (и не только физики) **для осредненных величин**.

На основании вышесказанного можно сформулировать следующий вывод: **поскольку большинство физических величин есть результат осреднения**, то в точной формулировке во всех законах физики следует **перейти от обычного умножения к умножению в смысле** «$\circ$».

Приведем также некоторые простейшие соотношения для элементарных функций:

1. $\tilde{\mathbf{u}}(\tau,t)e^{\lambda t} = e^{\frac{\tau^2}{2}\lambda^2}e^{\lambda t}$;

2. $\tilde{\mathbf{u}}(\tau,t)e^{\lambda t^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1-4s\lambda}}\,e^{\frac{\lambda t^2}{1-4s\lambda}}$;

3. $\tilde{\mathbf{u}}(\tau,t)A\cos\omega t = Ae^{-\frac{(\tau\omega)^2}{2}}\cos\omega t = \tilde{A}\cos\omega t$,

т. е. уменьшает амплитуду колебаний в $e^{\frac{(\tau\omega)^2}{2}}$ раз. И в частности, если $\tau = T$ (T — период колебаний), то $\tilde{A} = Ae^{-2\pi^2}$.

Здесь $\hat{\mathbf{u}}(\tau, t)$ — оператор усреднения, применяемый к различным функциям; A и $\tilde{A}$ — амплитуды колебаний до и после осреднения соответственно.

Таким образом, в результате осреднения функций, представленных рядом Фурье, происходит «обрезание» высоких частот.

4. Полином любой степени переходит в полином той же степени.

В частности для полиномов Чебышева–Эрмита [22]

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} D^n e^{-t^2} = (2t - D)^n \cdot 1.$$

Отсюда, с учетом (5), получим:

$$\tilde{H}_n(t) = (1-\tau^2)^{\frac{n}{2}} H_n\left[\frac{t}{(1-\tau^2)^{\frac{1}{2}}}\right],$$

т. е. у полиномов Чебышева–Эрмита меняется только масштаб времени.

Общее решение задачи и анализ результатов

Рассмотрим силовую функцию $F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s + \lambda)$ для малых λ.

С одной стороны:

$$F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s+\lambda) \overset{def}{=} e^{(s+\lambda)D^2} f_n(\mathbf{q}) = e^{\lambda \mathrm{D}^2} F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s) =$$
$$= [1 + \lambda \mathbf{D}^2] F_n = F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s) +$$
$$+ \lambda \sum_{\substack{m=1\\k=1}}^{N} \left\{ \left[\frac{\partial^2 F_n}{\partial \tilde{q}_m \partial \tilde{q}_k} \dot{\tilde{q}}_m \dot{\tilde{q}}_k + 2 \frac{\partial^2 F_n}{\partial \tilde{q}_m \partial \dot{\tilde{q}}_k} \dot{\tilde{q}}_m F_k + \frac{\partial^2 F_n}{\partial \dot{\tilde{q}}_k \partial \dot{\tilde{q}}_m} F_k F_m \right] + \right.$$
$$\left. + \lambda \sum_{m=1}^{N} \left[\frac{\partial F_n}{\partial \tilde{q}_m} F_m + \frac{\partial F_n}{\partial \dot{\tilde{q}}_m} \dot{F}_m \right] \right\} + 0(\lambda^2). \tag{9}$$

С другой стороны:

$$F_n(\tilde{\mathbf{q}}(s+\lambda), \dot{\tilde{\mathbf{q}}}(s+\lambda), s+\lambda) \overset{def}{=}$$
$$= F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s) + \lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s) + 0(\lambda^2) = \tag{10}$$
$$= F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s) + \lambda \left\{ \frac{\partial F_n}{\partial s} + \sum_{m=1}^{N} \left[\frac{\partial F_n}{\partial \tilde{q}_m} F_m + \frac{\partial F_n}{\partial \dot{\tilde{q}}_m} \dot{F}_m \right] \right\} + 0(\lambda^2).$$

Здесь $\tilde{q}_m$, $\tilde{q}_k$ — обобщенные координаты; $\dot{\tilde{q}}_m$, $\dot{\tilde{q}}_k$ — обобщенные скорости; F_n, F_k, F_m, $\dot{F}_m$ — компоненты осредненной силовой функции; «f_n» — компоненты исходной силовой функции; s — параметр осреднения.

Сравнивая выражения (9) и (10), получим следующее уравнение для силовой функции:

$$\frac{\partial F_n}{\partial s} = \sum_{\substack{m=1\\k=1}}^{N} \left[\frac{\partial^2 F_n}{\partial \tilde{q}_m \partial \tilde{q}_k} \dot{\tilde{q}}_m \dot{\tilde{q}}_k + 2 \frac{\partial^2 F_n}{\partial \tilde{q}_m \partial \dot{\tilde{q}}_k} \dot{\tilde{q}}_m F_k + \frac{\partial^2 F_n}{\partial \dot{\tilde{q}}_k \partial \dot{\tilde{q}}_m} F_k F_m \right]$$
$$F_n|_{S=0} = f_n(\tilde{\mathbf{q}}). \tag{11}$$

Полученное нелинейное уравнение (11) достаточно сложное. Однако для малых времен τ можно получить следующее представление:

$$F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s) = f_n(\tilde{\mathbf{q}}) + \left.\frac{\partial F_n}{\partial s}\right|_{S=0} s + \frac{1}{2} s^2 \frac{\partial^2 F_n}{\partial s^2} + \ldots =$$
$$= f_n(\tilde{\mathbf{q}}) + \frac{\tau^2}{2} \sum_{\substack{m=1\\k=1}}^{N} \frac{\partial^2 f_n}{\partial \dot{\tilde{q}}_m \partial \dot{\tilde{q}}_k} \dot{\tilde{q}}_m \dot{\tilde{q}}_k + 0(\tau^4). \tag{12}$$

Таким образом, в результате осреднения для осредненных величин возникают силы, зависящие от скорости. С точностью до τ^2 (τ — масштаб осреднения) дополнительная сила имеет вид:

$$\delta F_n(\tilde{\mathbf{q}}, \dot{\tilde{\mathbf{q}}}, s) = \frac{\tau^2}{2} \sum_{\substack{m=1\\k=1}}^{N} \frac{\partial^2 f_n}{\partial \dot{\tilde{q}}_m \partial \dot{\tilde{q}}_k} \dot{\tilde{q}}_m \dot{\tilde{q}}_k. \tag{13}$$

В заключение приведем несколько формул для коммутативного умножения «$\circ$».

1. $e^{\alpha t} \circ e^{\beta t} = e^{\alpha\beta\tau^2} e^{(\alpha+\beta)t}$.

2. $\cos(\omega_1 t) \circ \cos(\omega_2 t) = \dfrac{1}{2}[e^{\omega_1\omega_2\tau^2}\cos[(\omega_1 - \omega_2)t] +$
$+ e^{-\omega_1\omega_2\tau^2}\cos[(\omega_1 - \omega_2)t]]$.

На это соотношение следует обратить внимание, поскольку величина $e^{\omega_1\omega_2\tau^2}$ может принимать достаточно большие значения! И при осреднении тригонометрических функций об этом следует помнить.

3. Произведение полиномов $P_n(t)$ и $P_m(t)$ любых степеней дает, как и в классической алгебре, умножение полиномов степени $k = n + m$.

Отметим, что осреднение не обязательно проводить по времени t. Данный способ осреднения применим и для любых непрерывных переменных, например, координат.

Заключение

В работе показано, что в результате осреднения по некоторому малому масштабу времени появляются дополнительные слагаемые, зависящие от этого масштаба. Если в исходной системе уравнений движения (1) отсутствуют скорости, то в новой осредненной потенциальной системе (12) появляются дополнительные слагаемые (13), зависящие не только от координат, но и от скоростей. Это позволяет объяснить природу диссипативных сил. При этом в построенной алгебре осреднения уравнения сохраняют первоначальный вид. Предлагаемый метод может быть применен к любой системе дифференциальных уравнений, в которой необходимо получить сглаженные решения. В частности, областями применения предложенного метода является механика деформируемого твердого тела и вибрационная механика.

Литература

1. Пальмов В.А. Нелинейная механика деформируемых тел: учебное пособие. СПб: Изд-во Политехнического университета, 2014. 793 с.
2. Cosserat E., Cosserat F. Theory des corps deformables. Paris: Hermann, 1909. 226 p.
3. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 435 с.
4. Миндлин Р.Д. Микроструктуры в линейной упругости // Механика: Сборник переводов. 1964. Т. 86. № 4. С. 129–160.
5. Green A.E., Rivlin R.S. Multipolar continuum mechanics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1964. V. 17. N 2. P. 133–147. doi: 10.1007/BF00253051
6. Кунин И.А. Теория упругих сред с микроструктурой. Нелокальная теория упругости. М.: Наука, 1975. 416 с.
7. Блехман И.И. Теория вибрационных процессов и устройств. Вибрационная механика и вибрационная техника. СПб.: Издательский дом «Руда и металлы», 2013. 640 с.
8. Ivanov K.S., Vaisberg L.A. New modelling and calculation methods for vibrating screens and separators // Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2015. V. 22. P. 55–61. doi: 10.1007/978-3-319-15684-2_8
9. Demidov I.V., Vaisberg L.A., Blekhman I.I. Vibrational dynamics of paramagnetic particles and processes of separation of granular materials // International Journal of Engineering Science. 2019. V. 141. P. 141–156. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.002
10. Микусинский Я. Операторное исчисление. М.: Издательство иностранной литературы, 1956. 366 с.
11. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа, 1975. 407 с.
12. Головина В.В. Моделирование и прогнозирование деформационных свойств полимерных текстильных материалов: диссертация на соискание учёной степени кандидата технических наук. СПб., 2013. 168 с.
13. Рымкевич П.П. Введение в теорию распространения свойств // Труды XXVII летней международной школы «Анализ и синтез нелинейной механики колебательных систем». СПб, 2000. С. 455–497.
14. Горшков А.С., Макаров А.Г., Рымкевич О.В., Рымкевич П.П. Математическое моделирование процессов нестационарной теплопроводности через многослойные изделия текстильной и швейной промышленности // Дизайн. Материалы. Технология. 2010. № 4. С. 116–118.
15. Рымкевич П.П., Горшков А.С. Теория переноса. СПб.: Изд-во Политехнического университета, 2015. 120 с.
16. Маслов В.П. Операторные методы. М.: Наука, 1973. 621 с.
17. Фейнман Р.П. Об операторном исчислении, имеющем приложение в квантовой электродинамике // Проблемы современной физики. 1955. Т. 3. С. 37–79.
18. Карасев М.В., Маслов В.П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991. 365 с.
19. Карасев М.В. О вейлевском и упорядоченном исчислении некоммутирующих операторов // Математические заметки. 1979. Т. 26. № 6. С. 885–907.
20. Маслов В.П. Применение метода упорядоченных операторов для получения точных решений // Теоретическая и математическая физика. 1977. Т. 33. № 2. С. 185–209.
21. Березин Ф.А. Квантование // Известия АН СССР. Серия математическая. 1974. Т. 38. № 5. С. 1116–1175.
22. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1974. 430 с.

References

1. Palmov V.A. *Nonlinear Mechanics of Deformable Bodies*. St. Petersburg, SPbPU Publ., 2014, 793 p. (in Russian)
2. Cosserat E., Cosserat F. *Theory des corps deformables*. Paris, Hermann, 1909, 226 p.
3. Novatckii V. *Theory of elasticity*. Moscow, Mir Publ., 1975, 435 p. (in Russian)
4. Mindlin R.D. Microstructures in linear elasticity. *Mechanics. Translation book*, 1964, vol. 86, no 4, pp. 129–160. (in Russian)
5. Green A.E., Rivlin R.S. Multipolar continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1964, vol. 17, no. 2, pp. 133–147. doi: 10.1007/BF00253051
6. Kunin I. A. *Elastic Media with Microstructure*. Berlin, Springer-Verlag, 1982, 296 p. doi: 10.1007/978-3-642-81748-9
7. Blekhman I.I. *Theory of Vibration Processes and Devices. Vibration Mechanics and Vibration Technology*. St. Petersburg, Publishing house "Ore&Metals", 2013, 640 p. (in Russian)
8. Ivanov K.S., Vaisberg L.A. New modelling and calculation methods for vibrating screens and separators. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*, 2015, vol. 22. pp. 55–61. doi: 10.1007/978-3-319-15684-2_8
9. Demidov I.V., Vaisberg L.A., Blekhman I.I. Vibrational dynamics of paramagnetic particles and processes of separation of granular materials. *International Journal of Engineering Science*, 2019, vol. 141, pp. 141–156. doi: 10.1016/j.ijengsci.2019.05.002
10. Mikusinskii Ya. *Operator Calculus*. Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1956, 366 p. (in Russian)
11. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operational Calculus*. Moscow, Vysshaja shkola Publ., 1975, 407 p. (in Russian)
12. Golovina V.V. *Modeling and Prediction of Deformation Properties of Polymer Textile Materials*. Dissertation for the degree of candidate of technical sciences. St. Petersburg, 2013, 168 p. (in Russian)
13. Rymkevich P.P. Introduction to properties propagation theory. *Proc. XXVII Summer International School "Analysis and synthesis of nonlinear mechanics of oscillatory systems"*, St. Petersburg, 2000, pp. 455–497. (in Russian)
14. Gorshkov A.S., Makarov A.G., Rymkevitch O.V., Rymkevitch P.P. Mathematical modelling of non− stationary heat transmission process through multi layered textile and clothing industry fabrics. *Design. Materials. Technology*, 2010, no. 4, pp. 116–118. (in Russian)
15. Rymkevich P.P., Gorshkov A.S. *Transport Theory*. St. Petersburg, SPbPU Publ., 2015, 120 p. (in Russian)
16. Maslov V.P. *Method of Operators*. Moscow, Nauka Publ., 1973, 621 p. (in Russian)
17. Feinman R.P. On the operator calculus applied in quantum electrodynamics. *Problemy sovremennoj fiziki*, 1955, vol. 3, pp. 37–79 (in Russian)
18. Karasev M.V., Maslov V.P. *Nonlinear Poisson Brackets. Geometry and Quantization*. Moscow, Nauka Publ., 1991, 365 p. (in Russian)
19. Karasev M.V. Weyl and ordered calculus of noncommuting operators. *Mathematical Notes of the Academy of Sciences of the USSR*, 1979, vol. 26, no. 6, pp. 945–958. doi: 10.1007/BF01142081
20. Maslov V.P. Application of the method of ordered operators to obtain exact solutions. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1977, vol. 33, no. 2, pp. 960–976. doi: 10.1007/BF01036594
21. Berezin F.A. Quantization. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1974, vol. 8, no. 5, pp. 1109–1165. doi: 10.1070/IM1974v008n05ABEH002140
22. Arsenin V.Ya. *Mathematical Physics Methods and Special Functions*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 430 p. (in Russian)

Авторы

Рымкевич Павел Павлович — доктор технических наук, доцент, профессор, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-9362-0561, pprymkevich@gmail.com

Authors

Pavel P. Rymkevich — D.Sc., Associate Professor, Professor, Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-9362-0561, pprymkevich@gmail.com

Головина Виктория Владимировна — кандидат технических наук, доцент, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-2691-7680, victoria_gol@mail.ru

Алтухов Александр Иванович — кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой, Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского, Санкт-Петербург, 197198, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-4105-029, aai_51@mail.ru

Victoria V. Golovina — PhD, Associate Professor, Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-2691-7680, victoria_gol@mail.ru

Alexander I. Altukhov — PhD, Associate Professor, Head of Chair, Mozhayskiy Military Space Academy, Saint Petersburg, 197198, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-4105-029, aai_51@mail.ru