УДК 517.93 doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262

МЕТОД ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ ГРУБОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ПРИЛОЖЕНИЯ К СИНЕРГЕТИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

Р.О. Оморов

Институт физики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика
Адрес для переписки: romano_ip@list.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 02.02.20, принята к печати 11.03.20
Язык статьи — русский

Ссылка для цитирования: Оморов Р.О. Метод топологической грубости динамических систем: приложения к синергетическим системам // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 2. С. 257–262. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262

Аннотация
Рассмотрен метод исследования грубости динамических систем, основанный на понятии грубости по Андронову–Понтрягину (метод топологической грубости). Сформулировано понятие грубости по Андронову–Понтрягину. Определены условия достижимости требуемой грубости динамической системы. Приведены определения понятий максимальной грубости и минимальной негрубости динамических систем. Сформулированы теоремы о необходимых и достаточных условиях достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости, возникновения бифуркаций топологических структур динамических систем. Приведено утверждение, что множества грубых и негрубых систем составляют непрерывные по показателю грубости множества. В качестве показателя грубости использовано число обусловленности матрицы приведения к диагональному (квазидиагональному) виду матрицы Якоби в особых точках фазового пространства системы. Метод позволяет управлять грубостью систем управления на основе теоремы, сформулированной с использованием матричного уравнения Сильвестра. Изложены основные понятия о синергетике и синергетических системах. Метод может быть использован для исследований грубости и бифуркаций динамических систем, а также синергетических систем и хаоса различной физической природы. Метод апробирован на примерах многих синергетических систем: аттракторы Лоренца и Рёсслера, систем Белоусова–Жаботинского, Чуа, «хищник-жертва», Хенона, бифуркации Хопфа и других. Представлены основные положения метода топологической грубости. Возможности метода проиллюстрированы на примерах синергетических систем Белоусова–Жаботинского и Чуа.

Ключевые слова
динамическая система, топологическая грубость, синергетическая система, грубость по Андронову–Понтрягину, бифуркация, максимальная грубость и минимальная негрубость систем, гиперболические и негиперболические особые точки

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262

METHOD OF TOPOLOGICAL ROUGHNESS OF DYNAMIC SYSTEMS: APPLICATIONS TO SYNERGETIC SYSTEMS

R.O. Omorov

Institute of Physics of National Academy of Sciences KR, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic
Corresponding author: romano_ip@list.ru

Article info
Received 02.02.20, accepted 11.03.20
Article in Russian

For citation: Omorov R.O. Method of topological roughness of dynamic systems: applications to synergetic systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 2, pp. 257–262 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-2-257-262

Abstract
The paper presents a method of dynamic system roughness research, based on Andronov-Pontryagin concept of roughness (method of topological roughness). Andronov-Pontryagin concept of roughness has been formulated. Reachability conditions of dynamic system required roughness are defined. Concept definition for maximum roughness and minimum non-roughness of dynamic systems is given. Theorems on necessary and sufficient conditions of

reachability of maximum roughness and minimum non-roughness and occurrence of bifurcations of dynamic system topological structures are formulated. It is claimed that the sets of rough and non-rough systems are continuous in terms of the set roughness. The condition number of the matrix of bringing to the diagonal (quasi-diagonal) view of the Jacobi matrix at special points of the system phase space is used as an indicator of roughness. The method gives the possibility to control the roughness of control systems based on a theorem formulated using Sylvester's matrix equation. The basic concepts on synergetics and synergetic systems are presented. The method can be used for studies of roughness and bifurcations of dynamic systems, as well as synergetic systems and chaos of various physical nature. The method is tested on the examples of many synergetic systems: Lorenz and Rössler, Belousov-Zhabotinsky, Chua, "predator-prey", Henon, and Hopf bifurcation. The main provisions of the topological roughness method are given. The possibilities of the method are illustrated by examples of Belousov-Zhabotinsky and Chua synergetic systems.

Keywords
dynamic system, topological roughness, synergetic system, Andronov-Pontryagin roughness, bifurcation, maximum roughness and minimum non-roughness of systems, hyperbolic and non-hyperbolic special points

Введение

Проблемам исследования грубости динамических систем, оценки робастности и синтеза грубых (робастных) систем управления уделяется большое внимание в современной теории динамических систем и теории управления [1–4].

В теории динамических систем существуют два различных подхода к проблеме грубости:

1) на основе понятия грубости по Пейксото или иначе «структурной устойчивости»;
2) на основе понятия грубости по Андронову–Понтрягину, когда в отличие от предыдущего требуется ε-близость исходной и возмущенного гомеоморфизмов [1, 2, 5].

В работе [6] на базе понятия грубости по Андронову–Понтрягину были заложены основы «метода топологической грубости», который позволяет исследовать грубость (робастность) и бифуркации динамических систем различной природы, в частности синергетических систем, а также синтезировать грубые (робастные) системы управления [7].

В данной работе представлены основные положения «метода топологической грубости», разработанного автором, а также приложения этого метода к синергетическим системам Белоусова–Жаботинского и Чуа [8].

Основы метода

В классической постановке вопросы грубости и бифуркаций систем были поставлены еще в начале становления топологии как нового научного направления математики великим французским ученым А. Пуанкаре [9]. Термин «бифуркация» впервые введен А. Пуанкаре и означает дословно «раздвоение» или другими словами, от решений уравнений динамических систем ответвляются новые решения. Грубость динамических систем при этом определяется как свойство систем сохранять качественную картину разбиения фазового пространства на траектории при малом возмущении топологий, при рассмотрении близких по виду уравнений систем.

В современной терминологии бифуркация употребляется как название любого скачкообразного изменения, происходящего при плавном изменении параметров в любой системе. Таким образом, бифуркация означает переход между пространствами грубых систем.

Переход между грубыми системами осуществляется через негрубые области (пространства). Многие основополагающие результаты в теории грубости и бифуркации получены А.А. Андроновым и его школой [1, 2].

В работе [1] впервые дано понятие грубости, которое впоследствии названо понятием грубости по Андронову–Понтрягину [2], и сформулированы качественные критерии грубости.

В многомерной постановке рассматривается динамическая система n-го порядка

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)), \tag{1}$$

где $\mathbf{z}(t) \in R^n$ — вектор фазовых координат; $\mathbf{F}$ — n-мерная дифференцируемая вектор-функция.

Система (1) называется топологически грубой по Андронову–Понтрягину в некоторой области G, если исходная система и возмущенная система, определенная в подобласти $\widetilde{G}$, области G:

$$\dot{\widetilde{\mathbf{z}}} = \mathbf{F}(\widetilde{\mathbf{z}}) + \mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{z}}), \tag{2}$$

являются ε-тождественными в топологическом смысле.

Системы (1) и (2) ε-тождественны, если существуют открытые области D, $\widetilde{D}$ в n-мерном фазовом пространстве при $D \subset \widetilde{D} \subset \widetilde{G} \subset G$:

$$\exists\ \varepsilon, \delta > 0:$$

если $\|\mathbf{f}(\widetilde{\mathbf{z}})\| < \delta$, $|\mathbf{df}_i(\widetilde{\mathbf{z}})/\mathbf{d}\widetilde{\mathbf{z}}_j| < \delta$, $i, j = \overline{1, \mathrm{n}}$ то $|\|\mathbf{z}\| - \|\widetilde{\mathbf{z}}\|| < \varepsilon$, или

$$(\widetilde{D}, (2)) \overset{\varepsilon}{\equiv} (D, (1)), \tag{3}$$

иначе, разбиение областей $\widetilde{D}$ и D траекториями систем (2) и (1) ε-тождественны (имеют одинаковые топологические структуры с траекториями близкими до ε).

Если (3) не выполняется, то система (1) негруба по Андронову–Понтрягину.

Топологическая структура динамических систем определяется особыми траекториями и многообразиями типов:

- особых точек (положений равновесия);
- особых линий (сепаратрис);
- замкнутых (периодических) траекторий;
- притягивающих многообразий (аттракторов).

В работе [6] на основе понятия грубости по Андронову–Понтрягину предложены основы метода топологической грубости на базе меры грубости в виде числа обусловленности $C\{\mathbf{M}\}$ — матрицы $\mathbf{M}$ — нормированной матрицы приведения системы к каноническому диагональному (квазидиагональному) виду в особых точках фазового пространства. Здесь впервые введено понятие максимальной грубости и минимальной негрубости на отношениях пары δ и ε.

Определение 1. Грубая в области G система (1) называется максимально грубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина δ-близости систем (1) и (2), приводящая к ε-тождественности, будет (для каждого $\varepsilon > 0$) максимальна.

Определение 2. Негрубая в области G система (1) называется минимально негрубой на множестве топологически тождественных друг другу систем N, если величина ε-тождественности систем (1) и (2), при которой еще выполняется условие грубости, будет (для каждого $\delta > 0$) минимальна.

Условие достижимости максимальной грубости и минимальной негрубости в окрестности особых точек фазового пространства определяется следующей теоремой, доказанной в [6].

Теорема 1. Для того чтобы динамическая система в окрестности гиперболической особой точки ($\mathbf{z}_0$) была максимально грубой, а в окрестности негиперболической — минимально негрубой, необходимо и достаточно иметь:

$$\mathbf{M}^* = \operatorname{argmin} C\{\mathbf{M}\},$$

где $\mathbf{M}$ — матрица приведения матрицы линейной части $\mathbf{A}$ системы (1), в особой точке ($\mathbf{z}_0$) к диагональному (квазидиагональному) базису; $C\{\mathbf{M}\}$ — число обусловленности матрицы $\mathbf{M}$.

Замечание 1. Как следует из определений 1 и 2, а также теоремы 1, существуют и минимально грубые и максимально негрубые системы, для которых $C\{\mathbf{M}\} = \infty$. Иначе, множество грубых и негрубых систем образуют непрерывные множества. При этом системами с $C\{\mathbf{M}\} = \infty$ будут системы с жордановой квазидиагональной формой матриц линейного приближения $\mathbf{A}$.

Очевидно, число обусловленности $C\{\mathbf{M}\}$ как меру грубости можно использовать для кусочно-гладких динамических систем, рассматривая совокупную грубость по областям гладкости системы, если особые точки не находятся на границе этих областей.

Следует отметить, что для негладких систем, используя какую-либо обобщенную производную из негладкого анализа при определении матрицы линейной части, можно обобщить эту меру грубости.

Теоретические результаты метода топологической грубости, полученные в [6–8], позволяют управлять грубостью синергетических систем, соответствующая теорема доказана в [6].

Рассматривается система

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Q}(\mathbf{z}, \mathbf{u}), \tag{4}$$

где $\mathbf{z} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^r$ — соответственно вектора фазовых координат и управлений системы, $\mathbf{Q}(.)$ — n-мерная нелинейная дифференцируемая вектор-функция.

Возможности управления грубостью определяются условиями следующей теоремы.

Теорема 2. Для того чтобы в управляемой динамической системе (4), описываемой в n-мерном фазовом пространстве с помощью матриц линейного приближения $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ для фазовых координат и управлений соответственно, существовало управление $\mathbf{u}(t)$, обеспечивающее в окрестности соответствующей особой точки замкнутой системы максимальную грубость или минимальную негрубость, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия невырожденной разрешимости матричного уравнения Сильвестра.

Управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in U$ ищется в классе систем с обратной связью $\mathbf{u} = -\mathbf{Kx}$ такое, что матрица замкнутой системы $\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{BK}$, вблизи особых траекторий, в частности особых точек, удовлетворяет условиям

$$\mathbf{G}(\mathbf{F}) = \mathbf{G}(\mathbf{\Gamma}),\ \mathbf{M\Gamma} - \mathbf{AM} = -\,\mathbf{BH},\ \mathbf{K} = \mathbf{HM}^{-1},$$

где $\mathbf{\Gamma} \in R^{nxn}$ — диагональная (квазидиогональная) матрица состояния канонической модели; $\mathbf{H} \in R^{mxn}$ — матрица, задаваемая произвольно с ограничением на наблюдаемость пары ($\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{H}$); $\mathbf{A} \in R^{nxn}$, $\mathbf{B} \in R^{nxm}$ — матрицы координат и управления.

Вблизи особой точки:

$$\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{0},\ \mathbf{z} = \mathbf{Az} + \mathbf{Bu},$$

управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) \in U$ синтезируется так, чтобы достичь требуемого значения показателя $C\{\mathbf{M}\}$, используя какие-либо методы нелинейного программирования [10].

Метод топологической грубости также позволяет определять бифуркации динамических систем на основе критериев, разработанных в [6–8]. Более того, метод представляет возможности прогнозирования бифуркаций, а также управления параметрами бифуркаций. В докторской диссертации автора доказана следующая теорема [11, С. 48–50].

Теорема 3. Для того чтобы в области G многомерной ($n > 2$) динамической системы при значении параметра $\mathbf{q} = \mathbf{q}^*$, $\mathbf{q} \in R^p$ возникла какая-нибудь бифуркация топологической структуры, необходимо и достаточно, чтобы:

1) либо в рассматриваемой области G динамической системы существуют негиперболические (негрубые) особые точки, или орбитально-неустойчивые предельные циклы, для которых имеет место равенство

$$C\{\mathbf{M}(\mathbf{q}^*)\} = \min \sum_{i=1}^{p} C_i\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\}, \tag{5}$$

где p — количество особых точек или предельные циклы в области G;

2) либо в области G динамической системы имеются какие-либо грубые особые точки или предельные циклы, для которых выполняется условие

$$C\{\mathbf{M}(\mathbf{q})\} = \infty. \tag{6}$$

Замечание 2. Тип бифуркации зависит, во-первых, от того, какое из условий (5) или (6) выполняется, во-вторых, от того, какая особая траектория — особых точек или предельных циклов — удовлетворяет этим условиям. Так, например, хаотические колебания («странные аттракторы»), возникающие из-за потери симметрии, происходят, когда условию (5) удовлетворяют особые точки, а хаотические колебания, возникающие через последовательности бифуркаций удвоения периода, происходят в том случае, когда условию (5) отвечают предельные циклы.

Синергетика. Приложения метода к синергетическим системам

В современной науке возрастает интерес к объединяющим направлениям, рассматривающим явления природы и общества, живой и неживой природы с единых точек зрения в зависимости от проявляемых ими свойств и характеристик. К одному из таких направлений науки относится синергетика, которая занимается самоорганизующимися процессами, явлениями и системами [12–15].

Синергетика в настоящее время вторгается во все области науки, начиная с естественных наук — физики, химии, биологии, геологии, геофизики и кончая неточными областями наук, такими как экономика, социология, психология, философия, распознавание образов, а также в области техники и технологий [7, 8, 12–20].

При исследовании и управлении синергетическими системами важнейшее значение имеют вопросы грубости и бифуркаций. Одним из методов в изучении свойств грубости и бифуркаций синергетических систем, а также управления этими свойствами служит «метод топологической грубости», основы которого изложены выше.

Возможности метода проиллюстрированы на двух примерах широко известных синергетических систем — Белоусова–Жаботинского и Чуа.

Система Белоусова–Жаботинского [15]. Эта система описывается уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{x} &= k_1ay + k_2ax - k_3xy - 2k_4x^2,\\ \dot{y} &= -k_1ay - k_3xy + 1/2fk_5bz,\\ \dot{z} &= 2k_2ax - k_5bz,\end{aligned} \qquad (7)$$

где x, y, z — химические вещества $HBrO_2$, Br^-, Ce^{4+} соответственно; $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ — скорости изменений этих веществ; a — вещества BrO_3^-, b — органические вещества, которые окисляются; k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 — коэффициенты реакций; f — безразмерный параметр реакций; значения коэффициентов следующие: $k_1 = 1{,}28$; $k_2 = 8{,}0$; $k_3 = 8{,}0\cdot10^5$; $k_4 = 2{,}0\cdot10^3$; $k_5 = 1{,}0$ (в единицах моль$^{-1}$лс$^{-1}$); концентрации веществ — $a = 0{,}06$ М; $b = 0{,}020$ М; интервал изменений параметра f: $0{,}5 < f < 2{,}4$.

Система Белоусова–Жаботинского — это химическая реакция, где возникают колебания концентрации веществ, и представляет собой каталитическое окисление малоновой кислоты $CH_2(COOH)_2$. Реакция происходит в водном растворе при простом смешении следующих реагентов:

$$[H^+] = 2{,}0 \text{ моль}; [CH_2(COOH)_2] = 0{,}28 \text{ моль};$$
$$[BrO_3^-] = 6{,}3\cdot10^{-2} \text{ моль}; [Ce^{4+}] = 2{,}0\cdot10^{-3} \text{ моль}.$$

Реакция наблюдается по изменению окраски раствора, вызванного изменениями концентрации Ce^{4+} от бесцветной до желтой.

В системе (7) в зависимости от f существуют две или три особые точки (ОТ), одна из которых — начало координат. Особые точки ОТ$_i$ (x_0, y_0, z_0), в которых правые части уравнений (7) равны нулю, определяются соотношениями:

$$x_0 = [6\cdot10^{-5}(1 - f) - 0{,}48\cdot10^{-7}] \pm \{[6\cdot10^{-5}(1 + f) - 0{,}48\cdot10^{-7}]^2 - 0{,}1152\cdot10^{-10}(1 + f)\}^{1/2},$$

$$y_0 = 0{,}48fx_0/(0{,}078 + 8\cdot10^5x_0),$$

$$z_0 = 0{,}48x_0.$$

Результаты исследований системы (7) с использованием показателя грубости $C\{\mathbf{M}\}$ показаны на рис. 1.

В реакции Белоусова–Жаботинского обнаружены разнообразные колебания, включая хаотические [15]. Последние происходят при $0{,}9208 < f < 1{,}0808$, бифуркации при $f = 0{,}9208$, $f = 1{,}0808$. При этом максимальная грубость колебаний наблюдается при $f \approx 2{,}0$.

Система (цепь) Чуа [19, 21]. Как известно, система Чуа представляет собой электронную цепь с одним нелинейным элементом, которая способна генерировать разнообразные, в частности хаотические колебания.

Система Чуа описывается уравнениями:

$$\dot{x} = p(y - f(x)),\ \dot{y} = x - y + z,\ \dot{z} = -qy, \qquad (8)$$

где x, y, z — безразмерные переменные цепи; p, q — постоянные параметры цепи; M_1, M_0 — геометрические параметры нелинейности $f(x)$; $f(x) = M_1x + 0{,}5(M_1 - M_0)\times(|x + 1| - |x - 1|)$.

При $p = 9$, $q = 143$, $M_1 = -6/7$, $M_0 = 5/7$, в системе (8) наблюдаются хаотические колебания (рис. 2).

В данном случае имеем три особые точки: ОТ$_1$ (0,0,0); ОТ$_{2,3}$ (±11/6, 0, 11/6).

Исследованиями установлены [19, 21], что хаотические движения обнаруживаются и при значениях q: $-1{,}034 < q < -0{,}49$, а при $q = -3{,}8$ и $q = 1{,}05$ наблюдается максимальная грубость движений в системе (8) (минимум на рис. 2).

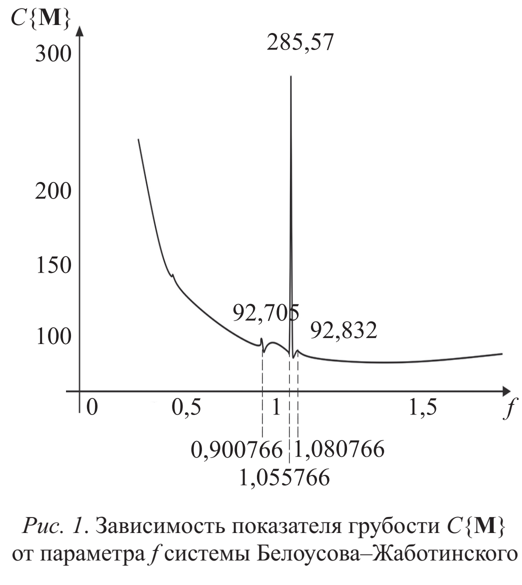

Рис. 1. Зависимость показателя грубости $C\{\mathbf{M}\}$ от параметра f системы Белоусова–Жаботинского

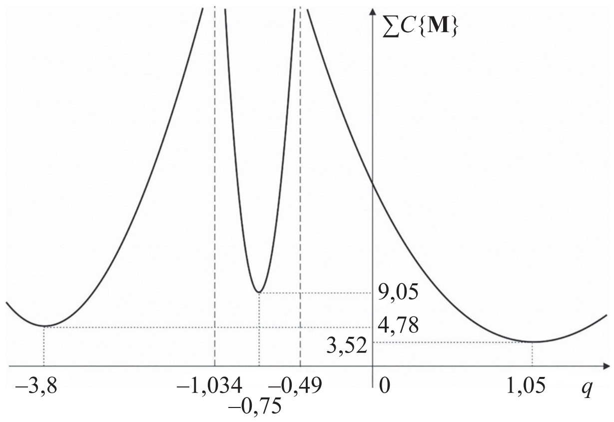

Рис. 2. Зависимость $C\{\mathbf{M}\}$ от параметра q в системе Чуа

Заключение

Рассмотренные в данной работе основные положения «метода топологической грубости», разработанного автором на базе понятия грубости по Андронову–Понтрягину является методом количественного исследования грубости и бифуркаций динамических систем самого широкого класса и различной физической природы. Возможности метода для исследований грубости и бифуркаций систем показаны на примерах синергетических систем Белоусова–Жаботинского и Чуа, но в работах автора [7, 8] и др. апробированы для исследований синергетических систем Лоренца, Рёсслера, «хищник–жертва», динамо Рикитаке, отображения Хенона, бифуркаций Хопфа, моделях экономических систем типа Шумпетера, Калдора и др. При этом результаты метода, полученные на вышеперечисленных системах, согласуются с известными результатами других исследователей этих систем. Отметим, что метод может быть использован для исследований как других синергетических систем различной природы, так и для исследований динамических систем более широкого класса, в частности при исследованиях колебательных систем, и бифуркаций Хопфа, а также аттракторов дискретных отображений [7, 8, 12–15].

Литература

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14. № 5. С. 247–250.
2. Аносов Д.В. Грубые системы // Труды Математического института им. В.А. Стеклова Академии наук СССР. 1985. Т. 169. С. 59–93.
3. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Робастная устойчивость линейных систем // Итоги науки и техники. Сер. Техническая кибернетика. ВИНИТИ. 1991. Т. 32. С. 3–31.
4. Оморов Р.О., Ушаков А.В. Оценки робастности в задачах управления и наблюдения // Известия. вузов. Электромеханика. 1991. № 1. С. 78–85.
5. Peixoto M.M. On structural stability // Annals of Mathematics. 1959. V. 69. N 1. P. 199–222. doi: 10.2307/1970100
6. Оморов Р.О. Максимальная грубость динамических систем // Автоматика и телемеханика. 1991. № 8. С. 36–45.
7. Оморов Р.О. Топологическая грубость синергетических систем // Проблемы управления и информатики. 2012. № 2. С. 5–12.
8. Оморов Р.О. Теория топологической грубости систем. Бишкек: Илим, 2019. 288 с.
9. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / пер. с франц. под ред. А.А. Андронова. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 392 с.
10. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / пер. с англ. М.: Мир, 1975. 534 с.
11. Оморов Р.О. Количественные меры грубости динамических систем и их приложения к системам управления: Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук. СПб.: Санкт-Петербургский институт точной механики и оптики, 1992. 188 с.
12. Хакен Г. Синергетика: иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах / пер. с англ. М.: Мир, 1985. 423 с.
13. Николис Г., Пригожин И. Познание сложного: Введение / пер. с англ. М.: Мир, 1990. 342 с.
14. Странные аттракторы: Сб. статей / пер. с англ. под ред. Я.Г. Синая, Л.П. Шильникова. М.: Мир, 1981. 253 с.
15. Пригожин И., Кондепуди Д. Современная термодинамика: От тепловых двигателей до диссипативных структур / пер. с англ. М.: Мир, 2002. 461 с.
16. Занг В.Б. Синергетическая экономика. Время и перемены в нелинейной экономической теории / пер. с англ. М.: Мир, 1999. 335 с.
17. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. 2-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2001. 288 с.

References

1. Andronov A.A., Pontriagin L.S. Structurally stable systems. *Doklady AN SSSR*, 1937, vol. 14, no. 5, pp. 247–250. (in Russian)
2. Anosov D.V. Structurally stable systems. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 1986, vol. 169, pp. 61–95.
3. Poliak B.T., Tcypkin Ya.Z. Robust stability of linear systems. *Itogi nauki i tehniki. Tehnicheskaja kibernetika*, 1991, vol. 32, pp. 3–31. (in Russian)
4. Omorov R.O., Ushakov A.V. Robustness estimates in control and observation tasks. *Russian Electromechanics*, 1991, no. 1, pp. 78–85. (in Russian)
5. Peixoto M.M. On structural stability. *Annals of Mathematics*, 1959, vol. 69, no. 1, pp. 199–222. doi: 10.2307/1970100
6. Omorov R.O. Maximal robustness of dynamical systems. *Automation and Remote Control*, 1991, vol. 52, no. 8, pp. 1061–1068.
7. Omorov R.O. Topological roughness of synergetic systems. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2012, vol. 44, no. 4, pp. 61–70. doi: 10.1615/JAutomatInfScien.v44.i4.70
8. Omorov R.O. *Theory of Topological Roughness of Systems*. Bishkek, Ilim Publ., 2019, 288 p. (in Russian)
9. Poincaré H. Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. 1881-1886. (in French)
10. Himmelblau D.M. *Applied Nonlinear Programming*. McGraw-Hill, 1972, 498 p.
11. Omorov R.O. *Dynamical system quantitative robustness measures and their applications to control systems*. Dissertation for the degree of doctor of technical sciences, St. Petersburg, Saint Petersburg Institute of Fine Mechanics and Optics, 1992, 188 p. (in Russian)
12. Haken H. *Advanced Synergetics*. Berlin, Springer, 1983.
13. Nicolis G., Prigogine I. *Exploring Complexity: An Introduction*. W.H. Freeman, 1989, 313 p.
14. *Strange attractors*. Moscow, Mir Publ., 1981, 253 p. (in Russian)
15. Kondepudi D.K., Prigogine I. *Modern Thermodynamics: From Heat Engines to Dissipative Structures*. John Wiley, 1998, 486 p.
16. Zhang W.-B. *Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics*. Springer-Verlag, 1991, 246 p.
17. Kapitca S.P., Kurdiumov S.P., Malinetckii G.G. *Synergetics and Future Forecasts. Moscow*, URSS Publ., 2001, 288 p. (in Russian)
18. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Kudryashova E.V. Tunisia 2011-2014. Bifurcation, revolution, and controlled stabilization. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta seriya 10 Prikladnaya matematika informatika protsessy upravleniya*, 2016, no. 4, pp. 92–103. (in Russian). doi: 10.21638/11701/spbu10.2016.409

18. Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Кудряшова Е.В. Тунис 2011-2014. Бифуркация, революция и управляемая стабилизация // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2016. № 4. С. 92–103. doi: 10.21638/11701/spbu10.2016.409
19. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Управление хаосом: методы и приложения. I. Методы // Автоматика и телемеханика. 2003. № 5. С. 3–45.
20. Колесников А.А. Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза. 2-е изд. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. 240 с.
21. Брагин В.О., Вагайцев В.И., Кузнецов Н.В., Леонов Г.А. Алгоритмы поиска скрытых колебаний в нелинейных системах. Проблемы Айзермана, Калмана и цепи Чуа // Известия РАН. Теория и системы управления. 2011. № 4. С. 3–36.

19. Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Control of chaos: methods and applications. I. Methods. *Automation and Remote Control*, 2003, vol. 64, no. 5, pp. 673–713. doi: 10.1023/A:1023684619933
20. Kolesnikov A.A. *Synergetic Control Methods for Complex Systems: System Synthesis Theory*. Moscow, LIBROKOM Publ., 2012, 240 p. (in Russian)
21. Bragin V.O., Vagaitsev V.I., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Algorithms for finding hidden oscillations in nonlinear systems. the Aizerman and Kalman conjectures and Chua's circuits. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2011, vol. 50, no. 4, pp. 511–543. doi: 10.1134/S106423071104006X

Авторы

Оморов Роман Оморович — доктор технических наук, профессор, член-корреспондент Национальной академии наук Кыргызской Республики, главный научный сотрудник, Институт физики Национальной академии наук Кыргызской Республики, Бишкек, 720071, Кыргызская Республика, Scopus ID: 6602708366, ORCID ID: 0000-0003-3555-1323, romano_ip@list.ru

Authors

Roman O. Omorov — D.Sc., Professor, Corresponding member of National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic (KR), Chief Researcher, Institute of Physics of National Academy of Sciences KR, Bishkek, 720071, Kyrgyz Republic, Scopus ID: 6602708366, ORCID ID: 0000-0003-3555-1323, romano_ip@list.ru