

doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-1-167-178

УДК 351.814.334.3

## Построение на базе задачи машины Дубинса опорных траекторий движения объектов с учетом постоянных внешних воздействий

Сергей Петрович Хабаров<sup>1</sup>, Мария Львовна Шилкина<sup>2</sup>✉

<sup>1,2</sup> Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С.М. Кирова, Санкт-Петербург, 194021, Российская Федерация

<sup>1</sup> [Serg.Habarov@mail.ru](mailto:Serg.Habarov@mail.ru), <https://orcid.org/0000-0003-1337-0150>

<sup>2</sup> [mchernobay@inbox.ru](mailto:mchernobay@inbox.ru)✉, <https://orcid.org/0000-0001-6501-5789>

### Аннотация

**Предмет исследования.** Рассмотрен основанный на решении задачи машины Дубинса подход к формированию опорных траекторий движения подвижных объектов (судов, беспилотников) из начальной в заданную конечную конфигурацию. Движение происходит за минимальное время с учетом ограниченной управляемости объектов по угловым скоростям и действия на них постоянных по величине и направлению внешних возмущений. **Метод.** Предложено вместо аналитического исследования прямой и сопряженной систем, вытекающих из принципа максимума Понтрягина, и оставаясь в парадигме задачи машины Дубинса, воспользоваться простым перебором возможных типов траекторий с целью определения среди них наилучшей по быстродействию. Для каждой траектории расчет точек переключения управления на траектории производится на основе минимизации разности расстояния между координатами конечной заданной точки и точки, в которую траектория приходит в зависимости от выбора параметров двух промежуточных точек переключения управления. **Основные результаты.** Решена задача поиска наилучшей по быстродействию траектории движения объекта из одной точки в другую с использованием подхода Дубинса, причем для обеих точек заданы их координаты и курсовые углы. Все расчеты произведены с учетом искажающих траекторию постоянных по величине и направлению внешних воздействий. Задача поиска кривых Дубинса сводится к поиску параметров двух промежуточных точек, в которых происходит смена управления. Рассмотрены возможные варианты смены управлений с учетом имеющихся ограничений. Вычислены длины траекторий движения и выбрана наилучшая по времени прохождения. Предложенный метод рассматривает нескольких допустимых по ограничениям траекторий, учитывающих влияние внешнего воздействия, из которых перебором выбирается оптимальная. Наличие нескольких допустимых траекторий дает преимущества при выборе траектории в зависимости от окружающей обстановки. **Практическая значимость.** Вместо решения задачи нелинейной оптимизации принципа максимума Понтрягина использован простой перебор возможных типов траекторий с целью определения среди них наилучшей по быстродействию. Поиск каждой из возможных траекторий выполняется из условия минимизации невязки аналитического решения и краевого условия на конце траектории. При поиске возможных траекторий учтены ограничения на управление, влияние постоянных по величине и направлению внешних воздействий и постоянство значения управления на каждом участке траектории. Выполнение данных ограничений позволяет правильно моделировать движение судна. Физически ограничения на управление (радиус поворота) связаны с тем, что не все значения угла поворота руля реализуемы на практике. Ограничения могут быть связаны не только с величиной радиуса поворота, но и с географическими особенностями конкретной местности: для беспилотных летательных аппаратов — здания и рельеф, а для судов — береговая линия, мели, острова и другие. В связи с этим может оказаться, что найденное оптимальное по быстродействию решение не может быть реализуемым на практике. Тогда предложенный в работе метод предоставляет возможность выбора другой траектории среди менее оптимальных по быстродействию.

### Ключевые слова

кривая Дубинса, алгоритмы, оптимальное управление, навигация по путевым точкам, беспилотные летательные аппараты, кратчайший путь, оптимизация

**Ссылка для цитирования:** Хабаров С.П., Шилкина М.Л. Построение на базе задачи машины Дубинса опорных траекторий движения объектов с учетом постоянных внешних воздействий // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2022. Т. 22, № 1. С. 167–178 doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-1-167-178

© Хабаров С.П., Шилкина М.Л., 2022

## Construction of movement trajectories for objects based on the Dubins car problem, taking into account constant external influences

Sergey P. Khabarov<sup>1</sup>, Maria L. Shilkina<sup>2</sup>✉

<sup>1,2</sup> St. Petersburg State Forest Technical University, Saint Petersburg, 194021, Russian Federation

<sup>1</sup> Serg.Habarov@mail.ru, <https://orcid.org/0000-0003-1337-0150>

<sup>2</sup> mchernobay@inbox.ru✉, <https://orcid.org/0000-0001-6501-5789>

### Abstract

The paper considers an approach in terms of optimal speed problem for Dubins cars to the formation of control trajectories of moving objects (airplanes, ships), that have control restrictions, under external influences that are constant in magnitude and direction and constant control values at each part of the trajectory. Instead of solving the Pontryagin maximum principle, it is proposed to use a simple comparison of possible control strategies in order to determine the best among them in terms of speed. For each strategy, the calculation of control switching points on the trajectory is based on minimizing the difference between the specified coordinates of the endpoint and the coordinates of the point at which the trajectory comes, depending on the choice of the parameters of two intermediate control switching points. The problem of finding the best speed trajectory for an object from one point to another is solved using the Dubins approach, and their coordinates and heading angles are given for both points. All calculations were carried out taking into account wind and water disturbances, which are constant in magnitude and direction and distort the trajectory. The problem of finding the Dubins paths is reduced to finding the parameters of two intermediate points at which the control changes. Different possibilities for changing controls are considered, taking into account the existing restrictions. The lengths of the trajectories are calculated and the best travel time is selected. The proposed method considers several trajectories acceptable in terms of constraints, taking into account the external influences, from which the optimal path is selected by comparison. Having multiple feasible strategies is beneficial when choosing a trajectory depending on the environment. Instead of solving the problem of nonlinear optimization of the Pontryagin maximum principle, a simple comparison of possible control strategies is used in order to determine the best among them in terms of speed, each of the possible strategies is sought from the condition of minimizing the residual of the analytical solution and the boundary condition at the end of the trajectory. When searching for possible trajectories, control constraints, the influence of external influences, that are constant in magnitude and direction, and the constancy of the control value at each part of the trajectory are taken into account. And all these factors make it possible to sufficiently and adequately simulate the movement of the ship. Physically, restrictions on control (turning radius) are associated with a limited steering angle. Restrictions can be associated not only with restrictions on the turning radius, but also with geographical features of a specific area: for unmanned aerial vehicles this may be due to the buildings and terrain, and for ships this may be due to the coastline, shoals, islands, etc. In this regard, it may turn out that the solution found optimal in terms of speed cannot be realizable in practice. Then the method proposed in the work has the ability to choose another trajectory among the less optimal in terms of speed.

### Keywords

Dubins path, algorithms, optimal control, waypoint navigation, unmanned aerial vehicles, shortest path, optimization

**For citation:** Khabarov S.P., Shilkina M.L. Construction of movement trajectories for objects based on the Dubins car problem, taking into account constant external influences. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 167–178 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2022-22-1-167-178

### Введение

Для мониторинга состояния линейных объектов, таких как линии электропередач, газопроводов, границ лесных массивов, а также при исследовании речных и прибрежных акваторий, используются беспилотные летательные аппараты (БПЛА), исследовательские суда и подводные роботы. Они должны передвигаться по заданным программным траекториям и характеризуются ограниченной управляемостью по угловым скоростям. Как правило, объекты, осуществляющие мониторинг, при перемещении в естественной среде испытывают на себе постоянное по силе и направлению воздействие ветра, а водные суда еще и воздействие течений. Программные траектории определяют генеральное направление движения подвижных объектов, и в окрестности точек, задающих эти траектории, должны стабилизироваться все кинематические параметры движения объектов. Программные траектории, как правило, задаются в виде упорядоченного набора путевых точек  $\{P_i, i = 1, \dots, n\}$ , который рассматривается как совокупность прямолинейных участков траектории, соединяющих между собой путевые точки  $P_i$

и  $P_{i+1}$  для  $i = 1, \dots, n - 1$ . В связи с этим практически значимая задача — гладкое сопряжение всех участков опорной траектории движения между собой так, чтобы она проходила через заданные путевые точки, удовлетворяла ограничениям на угловые скорости и учитывала возмущения, вызванные воздействием ветра и водных течений. Предположение о фиксированности сигналов управления на каждом из участков траектории позволяет для решения поставленной задачи сформировать подход, в основе которого решение известной в теории управления задачи машины Дубинса.

В работе [1] приведено решение проблемы построения множества разрешимости в задаче проводки самолета при ветровом возмущении с помощью нелинейной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка, упрощенно описывающей движение самолета в горизонтальной плоскости при наличии заданного уровня возмущений. Отметим, что с точки зрения меньшей сложности расчетов, особенно для случая сложной программной траектории и специфических требований к прохождению каждого из ее участков, полезным является подход к формированию кривых сопряжения как кратчайших траекторий движения объекта из некоторой

исходной точки в заданную конечную точку, которые лежат на сопрягаемых участках программной траектории, с использованием машины Дубинса. Результаты, полученные Л. Дубинсом [2], используются для исследования объектов, двигающихся в горизонтальной плоскости с постоянной по величине линейной скоростью, и с ограничениями на радиус поворота. Такие объекты называют машиной Дубинса, и для них на базе принципа максимума Л.С. Понтрягина Дубинс показал, что наискорейший переход из точки в точку с заданными начальным и конечным направлениями линейной скорости осуществляется при помощи кусочно-постоянного управления не более чем с двумя переключениями. Именно этот подход используется в работах [3–5], но без учета внешних возмущений, действующих на движущийся объект, а именно ветра или течений.

Модель Дубинса применяется для решения многих задач, таких как определение множества достижимости при симметричном и несимметричном ограничениях на управление [6–8], поиске оптимального управления для задачи с подвижным концом траектории с использованием генетического алгоритма [9]. Модель используется для решения задач перехвата движущейся по предписанной траектории цели и оптимального управления по критерию быстродействия с произвольным направлением вектора скорости при перехвате [10]. А также для формулировки требований к минимальному объему экспериментов с математическими моделями подвижных объектов, необходимых для создания математических соотношений, определяющих параметры участков искомых траекторий [11]. В общем случае модели машины Дубинса находят применение при построении траекторий движения в горизонтальной плоскости [12–14], также существуют методы распространения подхода Дубинса к построению 3D-траекторий [15].

В данной работе предложен подход с использованием машины Дубинса к задаче о движении объекта в горизонтальной плоскости для формирования режимов маневрирования подвижных объектов при наличии постоянных по величине и направлению внешних воздействий и для поиска гладких кривых сопряжения участков программной траектории. При этом модель динамики движения объекта характеризуется постоянной по величине линейной скоростью и ограничениями на угловую скорость (радиус поворота). Эта модель движения описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений третьего порядка, где две фазовые переменные характеризуют геометрическое положение объекта на плоскости, а третья — угол направления вектора скорости.

Аналитическое исследование и решение прямой и сопряженной систем, вытекающих из принципа максимума Понтрягина, предлагается заменить перебором возможных типов траекторий с учетом постоянных по величине внешних возмущений с целью определения среди них оптимальной по быстродействию. Данный подход связан с ограниченным для машин Дубинса количеством возможных траекторий. Все расчеты произведены с учетом постоянных по величине значений управления на каждом участке траектории.

Отметим, что рассматриваемые методы поиска наилучших по быстродействию кривых сопряжения связаны с вычислительной сложностью. По этой причине при реализации методов в информационных системах необходимо учитывать тот факт, что они функционируют в параллельных потоках с алгоритмами других подсистем, и возникает задача обеспечения своевременности реализации вычислительных процессов [16, 17]. Успешной работе выбранных алгоритмов в составе крупных информационных систем во многом может способствовать приоритетное обслуживание с репликацией критически важных запросов.

### Постановка задачи

Выполним исследование множества достижимости для нелинейной управляемой системы третьего порядка, называемой машиной Дубинса. Объект перемещается на плоскости с постоянной по величине скоростью и имеет ограничения на угловые скорости поворота вправо и влево. Требуется найти кратчайшую траекторию движения объекта из некоторой исходной точки  $A(x_0, y_0, \varphi_0)$  в заданную конечную точку  $B(x_k, y_k, \varphi_k)$  при наличии постоянного внешнего воздействия на объект. В этом случае движение управляемого объекта на плоскости описывается системой дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} x'(t) = |V|\sin\varphi(t) + W_x \\ y'(t) = |V|\cos\varphi(t) + W_y \\ \varphi'(t) = u(t) \\ u(t) \in [-U, U] \\ x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, \varphi(t_0) = \varphi_0 \\ x(t_k) = x_k, y(t_k) = y_k, \varphi(t_k) = \varphi_k \end{cases}, \quad (1)$$

где  $x(t), y(t)$  — координаты объекта в неподвижной системе координат;  $\varphi(t)$  — угол курса (между направлением вектора скорости и направлением на север);  $V$  — постоянная по величине скорость движения объекта;  $u(t)$  — скалярный сигнал управления;  $W_x = |W|\sin\Theta$ ,  $W_y = |W|\cos\Theta$ , где  $W, \Theta$  — постоянные по величине скорость и угол внешнего воздействия.

Известно [2], что при отсутствии внешних воздействий управления  $u(t)$ , которые приводят систему (1) на границу множества достижимости в момент  $t_k$ , удовлетворяют принципу максимума Понтрягина, а соответствующие траектории на плоскости состоят из конечного числа дуг окружностей (при  $u(t) = \pm U$ ) и прямолинейных участков траекторий (при  $u(t) = 0$ ). При этом в работе [18, глава 15] показано, что существует всего три примитива движения, из которых могут быть построены все оптимальные кривые для машины Дубинса, которые имеют вид: R (если  $u(t) = U$ ); S (если  $u(t) = 0$ ) и L (если  $u(t) = -U$ ).

При использовании данных символов каждый возможный вид кратчайшего пути может быть обозначен как последовательность из трех символов, соответствующих порядку, в котором применяются примитивы, тем самым кодируются стратегии управления, используемые на каждом из трех участков кривой Дубинса.

Нет необходимости иметь два последовательных примитива одного и того же типа, потому что их можно объединить в один. При этом возможны двенадцать слов длиной в три символа, но Дубинс показал, что оптимальными являются только следующие шесть слов, кодирующие соответствующие типы траекторий:

$$\{RLR, LRL, LSL, LSR, RSL, RSR\}. \quad (2)$$

Кратчайший путь между любыми двумя точками опорной траектории всегда можно охарактеризовать одним из этих слов. Они называются кривыми Дубинса. Таким образом, переход из любой произвольной точки  $A$  в точку  $B$  может быть осуществлен не более чем тремя переключениями управляющего сигнала в моменты времени  $t_0, t_1$  и  $t_2$ . На каждом участке траектории с временем движения  $\Delta t_0 = t_1 - t_0, \Delta t_1 = t_2 - t_1$  и  $\Delta t_2 = t_3 - t_2$  управляющий сигнал  $u(t)$  является кусочно-постоянным и принимает значения  $u(\Delta t_0) = u_0, u(\Delta t_1) = u_1$  и  $u(\Delta t_2) = u_2$  в соответствии с одним из возможных типов траекторий (2).

Основываясь на принципе решения классической задачи машины Дубинса, предлагается применить

аналогичный подход и в случае наличия внешних постоянных воздействий на объект. Тогда исходная задача может быть сведена к поиску параметров двух промежуточных точек  $P$  и  $Q$  (рис. 1). Это позволит определить не только вид отдельных участков кривой Дубинса, но и время, затрачиваемое на прохождение каждого из трех участков.

### Методика исследования

Для решения поставленной задачи применим аналитическое решение системы (1) для поиска параметров точек  $P, Q$  и  $B$  на основе данных об исходной точке  $A(x_0, y_0, \varphi_0)$  и заданном курсовом угле  $\varphi_3 = \varphi_k$  в конечной точке. Это решение будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} u(t)dt = \varphi_0 + u_0(t_1 - t_0), \\ x_1 &= x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} (V \sin \varphi(t) + W_x)dt = \\ &= x_0 + \frac{V}{u_0} \cos \varphi_0 - \frac{V}{u_0} \cos \varphi_1 + W_x(t_1 - t_0), \end{aligned} \quad (3.1)$$

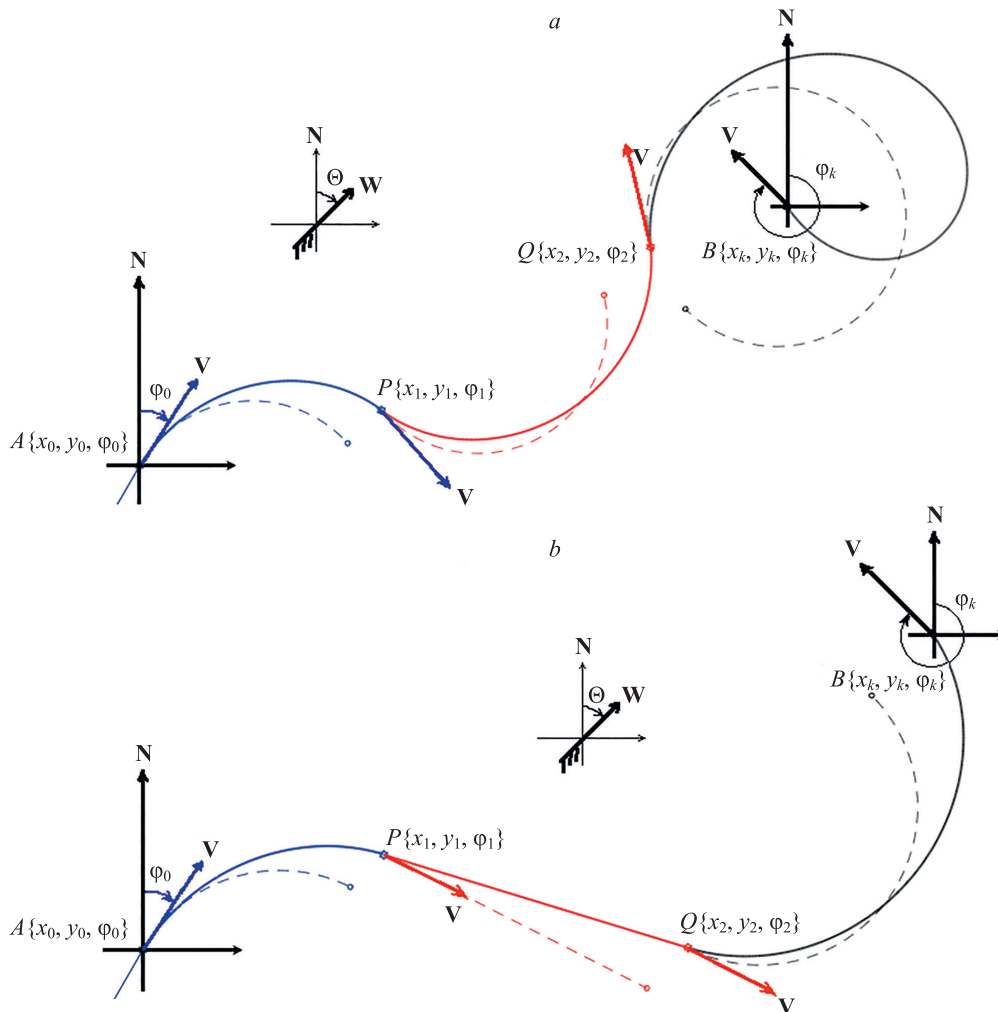


Рис. 1. Пример реализации траекторий RLR (a) и RSL (b). Пунктиром показан вид участков траектории в условиях отсутствия внешнего воздействия  $W$

Fig. 1. An example of the implementation of trajectories RLR (a) and RSL (b). The dotted line shows the view of the trajectory sections in the absence of external influence  $W$

$$y_1 = y(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} (V \cos \varphi(t) + W_y) dt = y_0 - \frac{V}{u_0} \sin \varphi_0 + \frac{V}{u_0} \sin \varphi_1 + W_y(t_1 - t_0). \quad (3.2)$$

При  $t_0 = 0$  сигнал управления  $u_0$  может принимать одно из двух возможных значений в зависимости от выбранного значения управления ( $u_0 = u(0) = \pm U$ ). Так как  $u_0$  представляет собой угловую скорость перемещения объекта, то выражение  $V/u_0$  является радиусом циркуляции ( $R_0$ ) объекта на данном участке кривой Дубинса. Тогда, введя новые обозначения вида

$$\begin{aligned} a &= x_0 + R_0 \cos \varphi_0, \\ b &= y_0 - R_0 \sin \varphi_0 \end{aligned} \quad (4)$$

уравнения (3.1) и (3.2), характеризующие точку  $P$ , можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= a - R_0 \cos \varphi_1 + W_x \Delta t_0, \\ y_1 &= b + R_0 \sin \varphi_1 + W_y \Delta t_0. \end{aligned} \quad (5)$$

### Траектории RLR и LRL

У траекторий типов RLR и LRL на интервалах времени  $\Delta t_0$  и  $\Delta t_2$  сигнал управления имеет один и тот же знак, а на интервале  $\Delta t_1$  он противоположного знака. Иначе говоря,  $R_2 = R_0$ , а  $R_1 = -R_0$ . Различие траекторий данных типов в том, что при выборе RLR  $u_0 = U$ , а при LRL  $u_0 = -U$ . Решение системы (1) на интервале  $\Delta t_0$  имеет вид (5). Используя уравнения (5), для траекторий RLR и LRL можно записать выражения для вычисления параметров точки  $Q$ :

$$\begin{aligned} x_2 &= a - R_0(2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + W_x(\Delta t_0 + \Delta t_1), \\ y_2 &= b + R_0(2 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + W_y(\Delta t_0 + \Delta t_1) \end{aligned} \quad (6)$$

и для точки  $B$ :

$$\begin{aligned} x_3 &= (a - R_0 \cos \varphi_3) - 2R_0(\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) + \\ &\quad + W_x(\Delta t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2), \\ y_3 &= (b + R_0 \sin \varphi_3) + 2R_0(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + \\ &\quad + W_y(\Delta t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2). \end{aligned} \quad (7)$$

Движение по трем фрагментам траекторий RLR и LRL осуществляется по дугам, длина которых при заданной угловой скорости позволяет определить время прохождения каждого участка траектории:

$$\Delta t_i = \Delta f_i / u_i,$$

где  $\Delta f_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  — разность курсовых углов в начале и в конце дуги.

Однако изменение курсового угла на каждом из фрагментов траектории зависит не только от начального и конечного значений курсового угла, но и от того, в каком направлении (по или против часовой стрелки) осуществляется это движение.

Считая, что оба значения курсовых углов  $\varphi_i$  и  $\varphi_{i+1}$  приведены к значениям в диапазоне от 0 до  $2\pi$ , вычисление значения  $\Delta f_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$  должно быть скорректи-

ровано с учетом направления движения на конкретном  $i$ -ом фрагменте траектории:

$$\Delta f_i = \begin{cases} 2\pi - \Delta f_i, & \text{если } \Delta f_i > 0 \text{ и } \Delta f_i < 2\pi \text{ и } R_i < 0, \\ -\Delta f_i, & \text{если } \Delta f_i < 0 \text{ и } R_i < 0, \\ 2\pi + \Delta f_i, & \text{если } \Delta f_i < 0 \text{ и } R_i > 0, \\ \Delta f_i, & \text{во всех иных случаях.} \end{cases}$$

После вычисления  $\Delta f_i$  и соответствующих временных интервалов  $\Delta t_i$ , которые могут быть подставлены в (7), можно заключить, что координаты точки  $B(x_3, y_3)$  являются нелинейными функциями от  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x_3 &= F_1(\varphi_1, \varphi_2, C_1), \\ y_3 &= F_2(\varphi_1, \varphi_2, C_2), \end{aligned}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  соответствуют постоянным параметрам, определяемым набором начальных данных решаемой задачи.

Для решения исходной двухточечной краевой задачи надо потребовать, чтобы функции  $F_3$  и  $F_4$ , описывающие степень приближения  $(x_3, y_3)$  к  $(x_k, y_k)$ , были бы равны нулю, тогда:

$$\begin{cases} F_3(\varphi_1, \varphi_2, C_1) = \sqrt{(x_k - x_3)^2} = 0 \\ F_4(\varphi_1, \varphi_2, C_1) = \sqrt{(y_k - y_3)^2} = 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Таким образом, перебирая значения  $\varphi_1, \varphi_2$ , определяющие все возможные траектории движения типа RLR и LRL, можно определить среди траекторий кратчайшую, решив систему из двух нелинейных уравнений.

В частности, на рис. 2 приведен скриншот, соответствующий построению траекторий перехода динамического объекта, двигающегося с постоянной скоростью 10 узлов и допустимым радиусом циркуляции 500 м из точки  $A(0 \text{ м}, 0 \text{ м}, 30^\circ)$  в точку  $B(2500 \text{ м}, 1000 \text{ м}, -45^\circ)$  при скорости течения 1 м/с и углом между направлением скорости течения и направлением на север  $\Theta = 45^\circ$ .

Видно, что из траекторий типа RLR и LRL более короткой является траектория, полученная при решении системы (8) для типа RLR (при  $u = [U, -U, U]$ ), при значениях  $\varphi_1 = 138^\circ$  и  $\varphi_2 = 346^\circ 42'$  (рис. 2, а). Полученное решение нелинейной системы уравнений позволяет на основе формул (4)–(7) определить все параметры оптимальной траектории:

- точку  $P$  с координатами ( $x_1 = 933,8 \text{ м}, y_1 = 214,4 \text{ м}, \varphi_1 = 138^\circ$ );
- точку  $Q$  с координатами ( $x_2 = 1973,1 \text{ м}, y_2 = 845,2 \text{ м}, \varphi_2 = 346^\circ 42'$ );
- точку  $B$  с координатами ( $x_3 = 2500 \text{ м}, y_3 = 1000 \text{ м}, \varphi_3 = 315^\circ$ );
- общее время движения по траектории RLR  $T = 996 \text{ с}$  и время пребывания на каждом из фрагментов траектории:  $\Delta t_0 = 183 \text{ с}, \Delta t_1 = 256 \text{ с}$  и  $\Delta t_2 = 557 \text{ с}$ .

### Траектории RSR, RSL, LSL, LSR

Подход к расчету и построению кривых Дубинса для траекторий типов RSR, RSL, LSL, LSR аналогичен описанному в разделе «Траектории RLR и LRL».

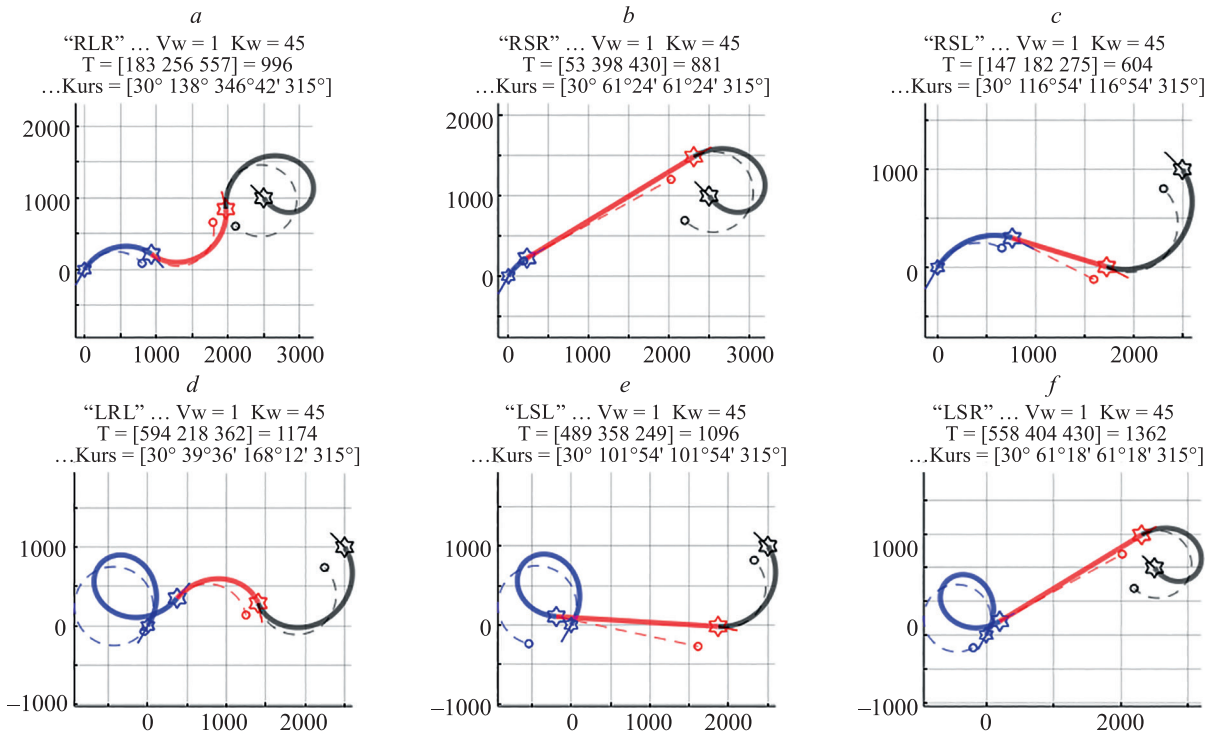


Рис. 2. Кривые Дубинса для 6 видов траекторий: RLR (a), RSR (b), RSL (c), LRL (d), LSL (e), LSR (f). Пунктиром показан вид участков траектории при отсутствии внешних воздействий

Fig. 2. Dubins paths for 6 types of trajectories: RLR (a), RSR (b), RSL (c), LRL (d), LSL (e), LSR (f). The dotted line shows how the sections of the trajectory would look in the absence of external influences

Данным типам траекторий соответствуют четыре варианта (таблица) управляющих воздействий и соответствующих им радиусов циркуляции, равных  $R_i = V/u_i, i = 0, 1, 2$ .

Основные различия данных типов траекторий:

- для траекторий RSR и LSL значение  $R_2 = R_0$ , в то время как для RSL и LSR  $R_2 = -R_0$ ;
- на втором временном интервале радиус циркуляции  $R_1 = \infty$ , т. е. выполняется прямолинейное движение с курсовым углом  $\varphi_1$ .

Особенность траекторий типа LSL, LSR, RSL, RSR в том, что начав свое движение по прямолинейному участку из точки  $P\{x_1, y_1, \varphi_1\}$ , объект должен попасть в точку  $Q$  с координатами  $\{x_2, y_2, \varphi_2\}$ , причем в точку  $Q$  движущийся объект придет с тем же курсовым углом, с которым началось его движение из точки  $P$  —  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

При реализации траекторий LSL, LSR, RSL, RSR курсовой угол  $\varphi_2$  в точке  $Q$  должен быть всегда равен

курсовому углу  $\varphi_1$  в точке  $P$ . Данное утверждение положено в основу предложенного алгоритма, основной целью которого является определение значения угла  $\varphi_1$  и длины прямолинейного участка траектории  $L$ , зная которые можно однозначно вычислить значения координат точек  $P$  и  $Q$ . Определение и подбор значений  $\varphi_1$  и  $L$  осуществляется из условия выполнения требования, что вся траектория должна прийти в точку с заданными по условию задачи координатами  $(x_k, y_k)$  и курсовым углом  $\varphi_3 = \varphi_k$ .

Оставаясь в заявленной ранее парадигме поиска траекторий аналогично траекториям Дубинса вида LSL, LSR, RSL, RSR, выражения координат точки  $B$ , полученные из решения нелинейных уравнений модели (1), зависящие от двух параметров  $\varphi_1$  и  $L$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} x_3 &= c - (R_0 - R_2)\cos\varphi_1 + |V|\cdot\Delta t_2\sin\varphi_1 + \\ &\quad + W_x(\Delta t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2), \\ y_3 &= d - (R_0 - R_2)\sin\varphi_1 + |V|\cdot\Delta t_2\cos\varphi_1 + \\ &\quad + W_y(\Delta t_0 + \Delta t_1 + \Delta t_2), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} c &= x_0 + R_0\cos\varphi_0 - R_2\cos\varphi_3, \quad d = y_0 - R_0\sin\varphi_0 + R_2\sin\varphi_3, \\ V &= UR_0, \quad \Delta t_0 = \Delta f_0/U, \quad \Delta t_2 = \Delta f_2/U, \\ L &= \end{aligned}$$

$$\Delta t_1 = \frac{L}{\sqrt{(V\sin\varphi_1 + W_x)^2 + (V\cos\varphi_1 + W_y)^2}}$$

а значения  $\Delta f_i$  вычисляются на основе курсовых углов  $\varphi_i$  и  $\varphi_{i+1}$  с учетом того, в каком направлении осуществляется движение. Значения  $\varphi_1, L$  подберем таким об-

Таблица. Значения управляющих сигналов на различных участках кривой Дубинса

Table. Control values at different parts of the Dubins path

Тип траектории	Значения сигнала управления		
	$u_0(t_1 - t_0)$	$u_1(t_2 - t_1)$	$u_2(t_k - t_2)$
RSR	$U$	$0$	$U$
RSL	$U$	$0$	$-U$
LSL	$U$	$0$	$-U$
LSR	$U$	$0$	$U$

разом, чтобы вычисленные значения координат  $(x_3, y_3)$  конечной точки программной траектории совпали со значениями координат  $(x_k, y_k)$ , требуемыми по краевому условию задачи.

После вычисления изменения курсового угла  $\Delta f_i$ , подставим его в уравнение (9). Тогда можно заключить, что координаты точки  $B(x_3, y_3)$  являются нелинейными функциями от  $\varphi_1$  и  $L$  имеют вид:

$$\begin{aligned} x_3 &= F_1(\varphi_1, L, C_1), \\ y_3 &= F_2(\varphi_1, L, C_2), \end{aligned}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — набор постоянных параметров, определяемых начальными данными решаемой задачи. Для решения исходной двухточечной краевой задачи требуется, чтобы функции невязки  $F_3$  и  $F_4$ , описывающие степень приближения  $(x_3, y_3)$  к  $(x_k, y_k)$ , были равны нулю, тогда

$$\begin{cases} F_3(\varphi_1, L, C_1) = \sqrt{(x_k - x_3)^2} = 0 \\ F_4(\varphi_1, L, C_1) = \sqrt{(y_k - y_3)^2} = 0 \end{cases}. \quad (10)$$

После решения системы (10) и определения всех возможных значений  $\varphi_1, L$  для различных типов траекторий появляется возможность на основании (4) и (5) определить координаты точек  $P(x_1, y_1, \varphi_1)$  и  $Q(x_2, y_2, \varphi_1)$ , используя следующие выражения:

$$\begin{aligned} x_2 &= a - R_0 \cos \varphi_1 + |\mathbf{V}| \cdot \Delta t_2 \sin \varphi_1 + W_x \Delta f_0 / U, \\ x_2 &= b + R_0 \sin \varphi_1 + |\mathbf{V}| \cdot \Delta t_2 \cos \varphi_1 + W_y \Delta f_0 / U. \end{aligned}$$

При этом, если время пребывания на начальном и конечном фрагментах траекторий оценивается, как и ранее, на основе длины пройденных дуг ( $\Delta t_i = \Delta f_i / u_i$ ,  $i = 0, 2$ ), то время движения на прямолинейном участке траектории можно определить из выражения:

$$\Delta t_1 = L / \sqrt{(V \sin \varphi_1 + W_x)^2 + (V \cos \varphi_1 + W_y)^2}.$$

Таким образом, решая систему (10) из двух нелинейных уравнений, можно определить набор значений  $\varphi_1, L$ , который позволит найти все возможные траектории движения среди траекторий типа RSR, RSL, LSL, LSR, и определить среди них кратчайшую. В общем случае, при определенных заданных краевых условиях, некоторые типы траекторий (2) оказываются недостижимы.

Из рис. 2 видно, что для выбранных краевых условий алгоритм обеспечил построение всех четырех траекторий RSR, RSL, LSL, LSR. Самая короткая траектория, полученная при решении системы (10), соответствует траектории RSL (при  $u = [-U, 0, U]$ ), для которой значения  $\varphi_1 = 116^\circ 54'$  и  $L = 1007,3$  м. Полученное решение нелинейной системы уравнений позволило на основе выражений (4), (5), (9) и (10) определить все параметры оптимальной траектории:

- точку  $P$  с координатами  $(x_1 = 763$  м,  $y_1 = 300,3$  м,  $\varphi_1 = 116^\circ 54'$ );
- точку  $Q$  с координатами  $(x_2 = 1726,5$  м,  $y_2 = 6,2$  м,  $\varphi_2 = 116^\circ 54'$ );
- точку  $B$  с координатами  $(x_2 = 2500$  м,  $y_2 = 1000$  м,  $\varphi_2 = 315^\circ$ );

— общее время движения по траектории RSL  $T = 604$  с и время пребывания на каждом из фрагментов траектории:  $\Delta t_0 = 147$  с,  $\Delta t_1 = 182$  с и  $\Delta t_2 = 275$  с.

## Обсуждение результатов

Особенностью программной реализации данного алгоритма является то, что, оставаясь в парадигме поиска траекторий в виде траекторий Дубинса, она позволяет не только получить наилучшую по времени траекторию перехода из точки в точку, но и при желании просмотреть все возможные варианты, что может быть очень полезно с практической точки зрения при наличии внешних ограничений на возможные движения объекта.

Для проверки адекватности работы предложенного алгоритма проведено исследование его работы в случае отсутствия внешних воздействий на переходе из точки  $A$  в точку  $B$ . На рис. 3 приведены графики, соответствующие построению траекторий перехода динамического объекта, движущегося с постоянной скоростью 10 узлов и допустимым радиусом циркуляции 500 м из точки  $A$  (0 м, 0 м,  $30^\circ$ ) в точку  $B$  (700 м, 700 м,  $-45^\circ$ ). Выполнено сравнение с одним из известных ранее аналитических алгоритмов [3, 4, 19], для которого получен набор возможных траекторий — кривых Дубинса — для всех возможных траекторий типа RLR и LRL (рис. 3,  $a, b, c, d$ ).

На рис. 3,  $e, f, g, h$  представлены результаты расчета, выполненного для тех же типов траекторий по описанному в настоящей работе алгоритму. Рис. 3 демонстрирует практически полное совпадение результатов, что доказывает адекватность работы предложенного алгоритма и его совпадение с аналитическим решением, по крайней мере при отсутствии внешних воздействий.

Для вывода систем (8) и (10) в случае наличия внешних воздействий применен строгий математический аппарат. Отметим, что аналитическое решение нелинейных систем (8) и (10) или нахождение областей существования их решения представляет собой трудную задачу. Потому в данной работе применен численный метод поиска решений данных систем, имеющих разрывы первого рода и множество локальных минимумов. В этих условиях уделено внимание не только поиску глобального минимума, но и проверке наличия решения выбранных нелинейных систем. В связи с этим до момента запуска основного алгоритма поиска проведено эвристическое определение областей изоляции корней (рис. 4), а в процессе реализации алгоритма в программном коде предусмотрен перехват ошибочных ситуаций, вызванных отсутствием решений этих систем. Определение факта отсутствия областей изоляции или возникновение исключений позволяет принять решение о реализуемости того или иного типа траектории при соответствующих наборах исходных данных. При этом для некоторых исследуемых наборов данных возможна одна из следующих ситуаций:

- точки  $A$  и  $B$  находятся достаточно близко между собой, и ни одна из траекторий LSR, RSL, LSL и RSR не может быть реализована;

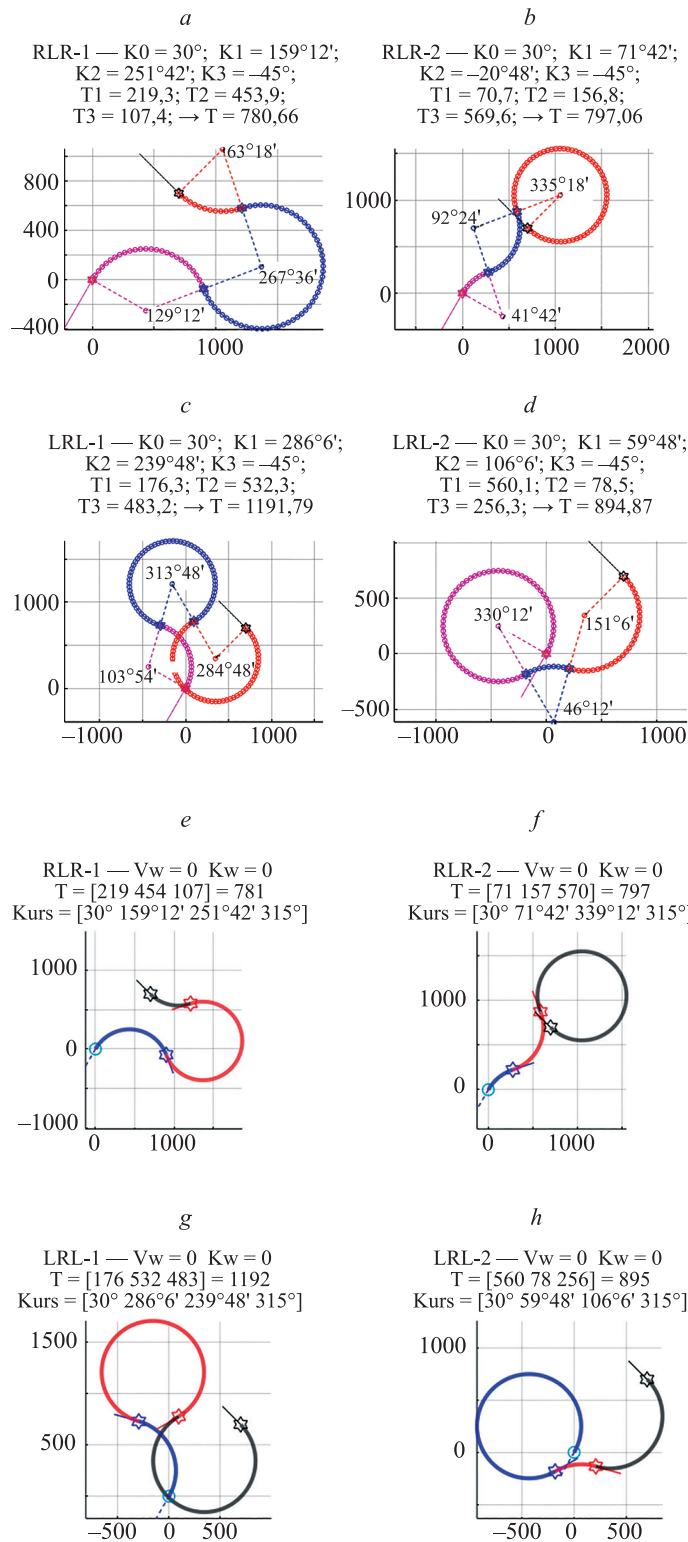


Рис. 3. Кривые Дубинса, полученные с использованием геометрического подхода: для случаев, когда центр средней окружности справа и слева от прямой, проходящей через центры крайних окружностей, — для RLR (a) и (b), для LRL (d) и (c) соответственно; а также кривые Дубинса, полученные по предложенному алгоритму при отсутствии внешних возмущений: для случаев, когда центр средней окружности справа и слева от прямой, проходящей через центры крайних окружностей, — для RLR (e) и (f), для LRL (h) и (g) соответственно

Fig. 3. Dubins paths obtained using the geometric approach: for the cases when the center of the middle circle is to the right and to the left of the line passing through the centers of the first and last circles — for RLR (a) and (b), for LRL (d) and (c), respectively; also Dubins paths obtained by the proposed algorithm in the absence of external disturbances: for the cases when the center of the middle circle is to the right and to the left of the line passing through the centers of the first and last circles — for RLR (e) and (f), for LRL (h) and (g), respectively



— точки  $A$  и  $B$  достаточно удалены, и траектории RLR и LRL нереализуемы, но даже в этих условиях всегда находилась наилучшая траектория среди, как минимум, одной или нескольких реализуемых траекторий.

Для траекторий типа RLR и LRL исследована зависимость расстояния между заданной конечной точкой траектории  $(x_k, y_k)$  и точкой  $(x_3, y_3)$ , в которую приходит программная траектория, в зависимости от выбора программных точек переключения, т. е. от выбора расчетных значений курсовых углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . На рис. 4 представлен трехмерный график функции невязки вида

$$\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) = \sqrt{(x_k - x_3)^2} + \sqrt{(y_k - y_3)^2},$$

где  $x_3, y_3$  рассчитаны по формулам (7), а параметры  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  изменяются в пределах от 0 до  $350^\circ$ .

Красным цветом на рис. 4 выделены точки локальных минимумов функции  $\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2)$ , для которых  $\varepsilon(\varphi_1, \varphi_2) < 100$  м. Расчет выполнен для тех же начальных и конечных условий, что и на рис. 2.

Ввиду того, что для решения исходной двухточечной краевой задачи требуется, чтобы функции  $F_3$  и  $F_4$  из системы (8), описывающие степень приближения  $(x_3, y_3)$  к  $(x_k, y_k)$ , были бы равны нулю, то определение областей возможных локальных минимумов способствует более обоснованному выбору начальных приближений для решения систем нелинейных уравнений типа (8) и (10).

На рис. 5 представлен ряд графиков, которые показывают, как траектории движущегося со скоростью 10 узлов объекта при переходе из точки  $A$  (0 м, 0 м,  $0^\circ$ )

в точку  $B$  ( $-500$  м, 0 м,  $180^\circ$ ) с радиусом циркуляции 500 м деформируются при изменении угла  $Kw = \Theta$  между направлением постоянного внешнего воздействия и направлением на север. Показано, как меняется внешний вид траекторий в зависимости от угла  $Kw = \Theta$  (рис. 1), изменяющегося в диапазоне от 0 до  $\pm 180^\circ$  с шагом  $\pm 45^\circ$ .

На рис. 5 представлены наилучшие по времени программные траектории движения объекта для режимов возврата на обратный курс (с курса 0 на  $180^\circ$ ), при ограничениях: внешнее воздействие постоянно по величине и направлению; радиус циркуляции задан; между тремя точками переключения управление остается постоянным. При этом рассмотрены два варианта требуемого отклонения от начальной точки разворота: 500 м на запад (рис. 5,  $a$ ) и 1500 м на восток (рис. 5,  $b$ ).

Видно, что в результате расчетов наилучшими по времени оказались разные типы траекторий: в первом случае это RLR, а во втором — RSR. Самая короткая траектория на рис. 5,  $a$  получается при боковом течении с запада, которое помогает осуществить крутой разворот на противоположное направление. Самая длинная траектория при боковом течении с востока, которое сильно сносит объект от заданной точки.

На рис. 5,  $b$  наоборот, траектория разворота является более сглаженной, поэтому наискорейшая траектория для такого маневра получается при течении, направленном в сторону требуемого отклонения от исходной точки, и самая долгая — при направлении течения в сторону, противоположную требуемому отклонению от исходной точки. Таким образом, из проведенного моделирования следует, что траектории типа

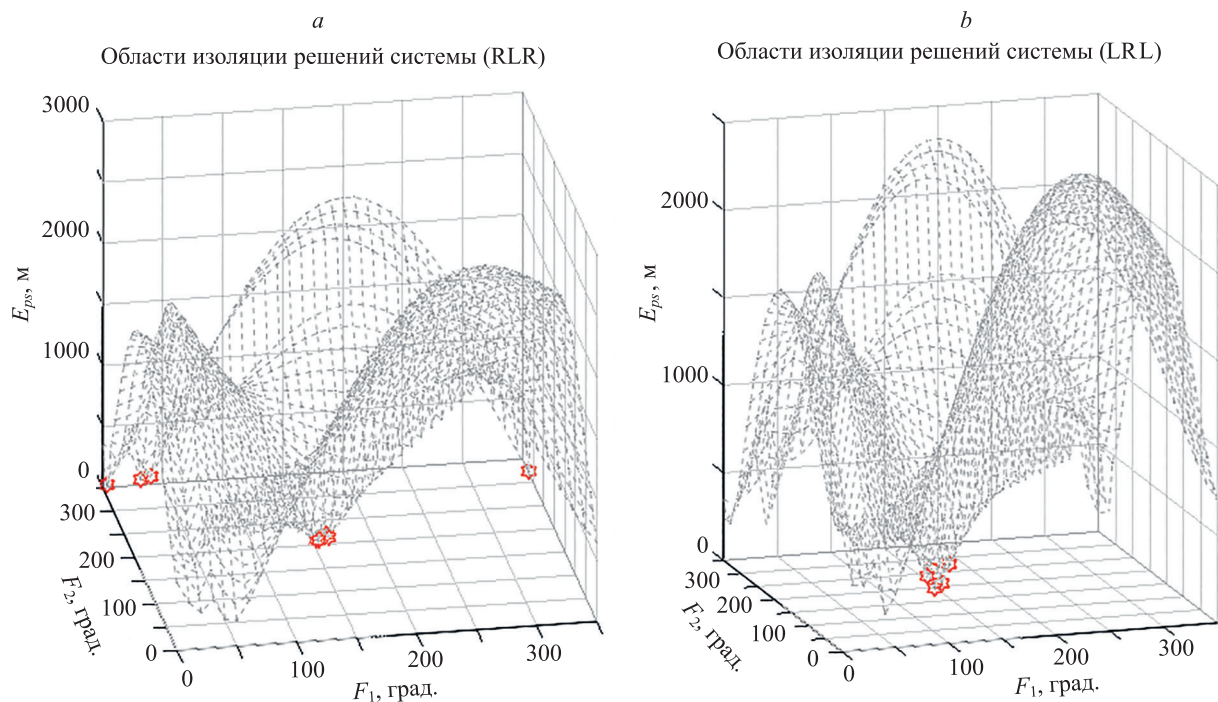


Рис. 4. Зависимость расстояния ( $E_{ps}$ ) между заданной конечной точкой траектории и точкой, в которую приходит программная траектория в зависимости от значения курсовых углов в точках переключения управления, для траекторий типа RLR ( $a$ ) и LRL ( $b$ )

Fig. 4. Dependence of the distance between the specified end point of the trajectory and the point at which the programmed trajectory comes for RLR ( $a$ ) and LRL ( $b$ ) strategies, depending on the value of the heading angles at points where the control is switched

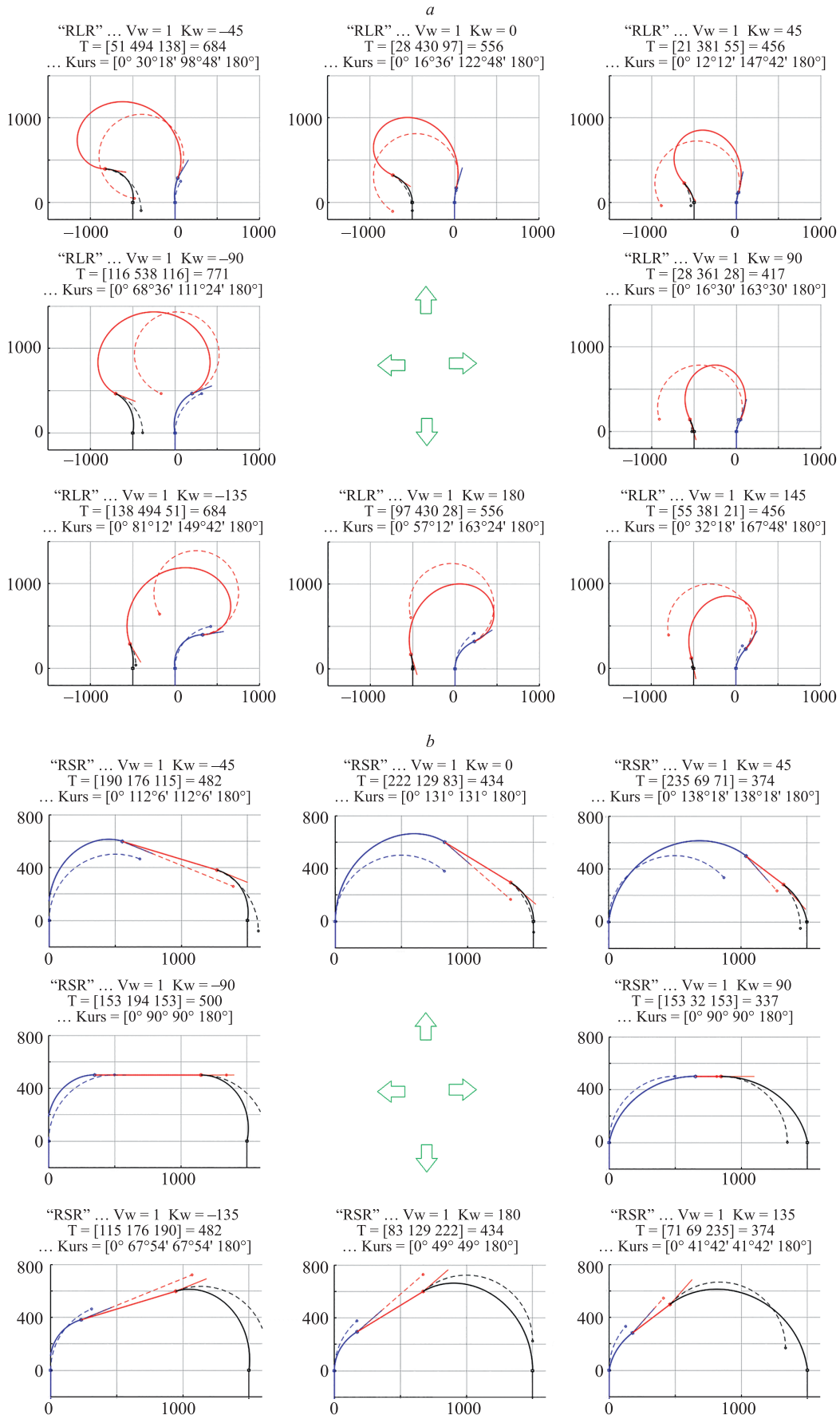


Рис. 5. Изменение траекторий RLR (a) и RSR (b) движения объекта в зависимости от направления внешнего воздействия  $K_w$ . Пунктиром показан вид участков траектории при отсутствии внешних воздействий

Fig. 5. Changing the trajectories RLR (a) and RSR (b) of object movement depending on the direction of external influence  $K_w$ . The dotted line shows the view of the trajectory sections in the absence of external influences

RLR и RSR по-разному реагируют на формирование программных траекторий при одинаковых типах постоянного возмущения, действующего на подвижный объект, но разных краевых условиях.

### Заключение

Рассмотрен подход к формированию программных траекторий движения объектов в горизонтальной плоскости под воздействием постоянных по значению и величине внешних воздействий (ветра, течений) с использованием решения оптимальной по быстродействию задачи для машины Дубинса. Вместо поиска оптимальной траектории на основе принципа максимума Понтрягина использован перебор возможных типов траекторий с целью определения среди них наилучшей по быстродействию. Для каждой траектории расчет точек переключения произведен на основе минимизации разности между заданными координатами конечной точки и точки, в которую траектория приходит в зависимости от выбора параметров двух промежуточных точек переключения управления.

Показано, что при отсутствии внешних воздействий полученные в соответствии с предложенным методом траектории совпадают с траекториями, рассчитанными аналитически в соответствии с известными результатами исследований и построенными с использованием геометрического подхода для кривых Дубинса. Эти данные подтверждают гипотезу о возможности решения классической задачи машины Дубинса в случае действия на объект постоянных внешних воздействий.

Дальнейшие исследования проблемы построения оптимальных по быстродействию траекторий для подвижных объектов, имеющих ограничения по управлению, планируется вести в направлении распространения описанного в работе подхода к движению в горизонтальной плоскости на случай движения объекта в пространстве. Отметим, что система уравнений (1) упрощенно описывает движение судна, и в более общем случае ее уравнения приходится дополнять слагаемыми, учитывающими скорость перекладки руля и угол дрейфа судна, что, в свою очередь, усложняет поиск оптимальной траектории, но позволяет получить наиболее реалистичные решения.

### Литература

1. Кумков С.И., Пацко В.С., Пятко С.Г., Федотов А.А. Построение множества разрешимости в задаче проводки самолета при ветровом возмущении // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2005. Т. 11. № 1. С. 149–159.
2. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents // *American Journal of Mathematics*. 1957. V. 79. N 3. P. 497–516. <https://doi.org/10.2307/2372560>
3. Вагизов М.Р., Хабаров С.П. Алгоритм формирования гладких программных траекторий движения БПЛА // *Информация и космос*. 2021. № 2. С. 122–130.
4. Хабаров С.П., Шилкина М.Л. Геометрический подход к решению задачи для машин Дубинса при формировании программных траекторий движения // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2021. Т. 21. № 5. С. 653–663. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2021-21-5-653-663>
5. Хабаров С.П., Шилкина М.Л. Формирование программных траекторий движения БПЛА с учетом ограничений на их управляемость // *Цифровые технологии в лесном секторе: Материалы II Всероссийской научно-технической конференции-вебинара. Санкт-Петербург*. 2021. С. 141–143.
6. Пацко В.С., Федотов А.А. Аналитическое описание множества достижимости для машины Дубинса // Труды Института математики и механики УРО РАН. 2020. Т. 26. № 1. С. 182–197. <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197>
7. Patsko V.S., Fedotov A.A. Three-dimensional reachable set at instant for the Dubins car: Properties of extremal motions // *Proc. of the 60<sup>th</sup> Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, (IACAS)*. 2020. P. 1033–1049.
8. Patsko V.S., Fedotov A.A. Reachable set for Dubins car and its application to observation problem with incomplete information // *Proc. of the 27<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation, (MED 2019)*. 2019. P. 489–494. <https://doi.org/10.1109/MED.2019.8798511>
9. Рогачев Г.Н. Использование генетического алгоритма с отсечением по времени в задаче синтеза программного регулятора для машины Дубинса // *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки*. 2011. № 3(31). С. 27–32.
10. Buzikov M.E., Galyaev A.A. Time-optimal interception of a moving target by a Dubins car // *Automation and Remote Control*. 2021. V. 82. N 5. P. 745–758. <https://doi.org/10.1134/S0005117921050015>

### References

1. Kumkov S.I., Patcko V.S., Piatko S.G., Fedotov A.A. Construction of the solvability set for guiding an aircraft under wind disturbance. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2005, vol. 11, no. 1, pp. 149–159. (in Russian)
2. Dubins L.E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents. *American Journal of Mathematics*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 497–516. <https://doi.org/10.2307/2372560>
3. Vagizov M.R., Khabarov S.P. Algorithm for the formation of smooth programmed trajectories of UAV motion. *Information and Space*, 2021, no. 2, pp. 122–130. (in Russian)
4. Khabarov S.P., Shilkina M.L. geometric approach to the solution of the dubins car problem in the formation of program trajectories. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2021, vol. 21, no. 5, pp. 653–663. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2021-21-5-653-663>
5. Khabarov S.P., Shilkina M.L. Building programmed motion trajectories for unmanned aircraft with control restrictions. *Proc. of the 2<sup>nd</sup> All-Russian Scientific and Technical Conference-Webinar "Digital Technologies in the Forestry Sector"*. St. Petersburg, 2021, pp. 141–143. (in Russian)
6. Patsko V.S., Fedotov A.A. Analytic description of a reachable set for the Dubins car. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 1, pp. 182–197. (in Russian). <https://doi.org/10.21538/0134-4889-2020-26-1-182-197>
7. Patsko V.S., Fedotov A.A. Three-dimensional reachable set at instant for the Dubins car: Properties of extremal motions. *Proc. 60<sup>th</sup> Israel Annual Conference on Aerospace Sciences, (IACAS)*, 2020, pp. 1033–1049.
8. Patsko V.S., Fedotov A.A. Reachable set for Dubins car and its application to observation problem with incomplete information. *Proc. of the 27<sup>th</sup> Mediterranean Conference on Control and Automation, (MED 2019)*, 2019, pp. 489–494. <https://doi.org/10.1109/MED.2019.8798511>
9. Rogachev G.N. Synthesis of the open-loop regulator for dubins' car by anytime genetic algorithm. *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*, 2011, no. 3(31), pp. 27–32. (in Russian)
10. Buzikov M.E., Galyaev A.A. Time-optimal interception of a moving target by a Dubins car. *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, no. 5, pp. 745–758. <https://doi.org/10.1134/S0005117921050015>

11. Ветчинкин А.С., Стариченков А.Л. Формирование траектории сближения морских подвижных объектов // Морские интеллектуальные технологии. 2020. № 1-1(47). С. 113–117. <https://doi.org/10.37220/MIT.2020.47.1.014>
12. Silverberg L., Xu D. Dubins waypoint navigation of small-class unmanned aerial // Open Journal of Optimization. 2019. V. 8. N 2. P. 59–72. <https://doi.org/10.4236/ojop.2019.82006>
13. Savla K., Frazzoli E., Bullo F. Traveling salesperson problems for the Dubins vehicle // IEEE Transactions on Automatic Control. 2008. V. 53. N 6. P. 1378–1391. <https://doi.org/10.1109/TAC.2008.925814>
14. Parlangeli G., Indiveri G. Dubins inspired 2D smooth paths with bounded curvature and curvature // IFAC Proceedings Volumes. 2010. V. 43. N 16. P. 252–257. <https://doi.org/10.3182/20100906-3-IT-2019.00045>
15. Cai W., Zhang M., Zheng Y.R. Task assignment and path planning for multiple autonomous underwater vehicles using 3D Dubins curves // Sensors. 2017. V. 17. N 7. P. 1607. <https://doi.org/10.3390/s17071607>
16. Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V., Bogatyrev S.V. Redundant servicing of a flow of heterogeneous requests critical to the total waiting time During the multi-path passage of a sequence of info-communication nodes // Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics). 2020. V. 12563. P. 100–112. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8_9)
17. Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V., Bogatyrev V.A. Priority maintenance with replication of wait-critical requests // Proc. of the 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF). 2021. P. 9470640. <https://doi.org/10.1109/WECONF51603.2021.9470640>
18. LaValle S.M. Planning Algorithms. Cambridge University Press, 2006. 1023 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546877>
19. Вагизов М.Р., Хабаров С.П. Построение программных траекторий движения на базе решения задачи «Машина Дубинса» // Информация и космос. 2021. № 3. С. 116–125.
11. Vetchinkin A.S., Starichenkov A.L. Formati on of the trajectory of convergence of marine mobile objects. *Marine Intellectual Technologies*, 2020, no. 1-1 (47), pp. 113–117. (in Russian). <https://doi.org/10.37220/MIT.2020.47.1.014>
12. Silverberg L., Xu D. Dubins waypoint navigation of small-class unmanned aerial. *Open Journal of Optimization*, 2019, vol. 8, no. 2, pp. 59–72. <https://doi.org/10.4236/ojop.2019.82006>
13. Savla K., Frazzoli E., Bullo F. Traveling salesperson problems for the Dubins vehicle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, vol. 53, no. 6, pp. 1378–1391. <https://doi.org/10.1109/TAC.2008.925814>
14. Parlangeli G., Indiveri G. Dubins inspired 2D smooth paths with bounded curvature and curvature. *IFAC Proceedings Volumes*, 2010, vol. 43, no. 16, pp. 252–257. <https://doi.org/10.3182/20100906-3-IT-2019.00045>
15. Cai W., Zhang M., Zheng Y.R. Task assignment and path planning for multiple autonomous underwater vehicles using 3D Dubins curves. *Sensors*, 2017, vol. 17, no. 7, pp. 1607. <https://doi.org/10.3390/s17071607>
16. Bogatyrev V.A., Bogatyrev A.V., Bogatyrev S.V. Redundant servicing of a flow of heterogeneous requests critical to the total waiting time During the multi-path passage of a sequence of info-communication nodes. *Lecture Notes in Computer Science (including subseries Lecture Notes in Artificial Intelligence and Lecture Notes in Bioinformatics)*, 2020, vol. 12563, pp. 100–112. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8\\_9](https://doi.org/10.1007/978-3-030-66471-8_9)
17. Bogatyrev S.V., Bogatyrev A.V., Bogatyrev V.A. Priority maintenance with replication of wait-critical requests. *Proc. of the 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*, 2021, pp. 9470640. <https://doi.org/10.1109/WECONF51603.2021.9470640>
18. LaValle S.M. *Planning Algorithms*. Cambridge University Press, 2006, 1023 p. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511546877>
19. Vagizov M.R., Khabarov S.P. Construction of software trajectories of motion on the basis of the solution of the problem “Dubins machine”. *Information and Space*, 2021, no. 3, pp. 116–125. (in Russian)

#### Авторы

**Хабаров Сергей Петрович** — кандидат технических наук, доцент, доцент, Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С.М. Кирова, Санкт-Петербург, 194021, Российская Федерация, [sc 57220744173](https://orcid.org/0000-0003-1337-0150), <https://orcid.org/0000-0003-1337-0150>, [Serg.Habarov@mail.ru](mailto:Serg.Habarov@mail.ru)

**Шилкина Мария Львовна** — кандидат технических наук, доцент, доцент, Санкт-Петербургский государственный лесотехнический университет им. С.М. Кирова, Санкт-Петербург, 194021, Российская Федерация, [sc 57246047100](https://orcid.org/0000-0001-6501-5789), <https://orcid.org/0000-0001-6501-5789>, [mchernobay@inbox.ru](mailto:mchernobay@inbox.ru)

Статья поступила в редакцию 15.11.2021  
Одобрена после рецензирования 19.12.2021  
Принята к печати 30.01.2022

#### Authors

**Sergey P. Khabarov** — PhD, Associate Professor, Associate Professor, St. Petersburg State Forest Technical University, Saint Petersburg, 194021, Russian Federation, [sc 57220744173](https://orcid.org/0000-0003-1337-0150), <https://orcid.org/0000-0003-1337-0150>, [Serg.Habarov@mail.ru](mailto:Serg.Habarov@mail.ru)

**Maria L. Shilkina** — PhD, Associate Professor, Associate Professor, St. Petersburg State Forest Technical University, Saint Petersburg, 194021, Russian Federation, [sc 57246047100](https://orcid.org/0000-0001-6501-5789), <https://orcid.org/0000-0001-6501-5789>, [mchernobay@inbox.ru](mailto:mchernobay@inbox.ru)

Received 15.11.2021  
Approved after reviewing 19.12.2021  
Accepted 30.01.2022



Работа доступна по лицензии  
Creative Commons  
«Attribution-NonCommercial»