

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-1-54-61

УДК 681.51

## Метод идентификации параметров синусоидального сигнала с неизвестной переменной амплитудой

Хак Тунг Нгуен<sup>1</sup>✉, Сергей Михайлович Власов<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

<sup>1</sup> [nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com](mailto:nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com)✉, <https://orcid.org/0000-0001-6430-1927>

<sup>2</sup> [smvlasov@itmo.ru](mailto:smvlasov@itmo.ru), <https://orcid.org/0000-0002-8345-7553>

### Аннотация

**Предмет исследования.** Предложен новый метод идентификации параметров синусоидального сигнала с неизвестной переменной амплитудой. Проблема оценивания параметров синусоидальных сигналов актуальна в задачах динамического позиционирования и компенсации возмущений для синтеза законов управления, учитывающих внешние возмущающие воздействия. В предлагаемом методе устранено ограничение на амплитуду сигнала. В отличие от известных подходов, где амплитуда должна быть фиксированной, в рассмотренном методе амплитуда сигнала может быть переменной. **Метод.** Для реализации представленного метода идентификации применены жорданова форма матрицы и операторы запаздывания. В ходе параметризации сформирована регрессионная модель, содержащая неизвестные стационарные параметры. Для поиска неизвестных параметров применен метод динамического расширения регрессора и смешивания. **Основные результаты.** Результаты компьютерного моделирования показали работоспособность разработанного алгоритма. Результаты моделирования подтвердили сходимость оценивания параметров к истинным значениям. **Практическая значимость.** Подход может быть применен для широкого класса прикладных задач, связанных с компенсацией возмущений в системах виброзащиты, системах мониторинга при определении параметров высотных или большепролетных строительных сооружений, в системах управления робототехническими объектами.

### Ключевые слова

синусоидальные сигналы, идентификация, переменная амплитуда, жорданова форма матрицы, линейная регрессионная модель

**Ссылка для цитирования:** Нгуен Х.Т., Власов С.М. Метод идентификации параметров синусоидального сигнала с неизвестной переменной амплитудой // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 1. С. 54–61. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-1-54-61

## Method for identification of sinusoidal signal parameters with variable unknown amplitude

Khac T. Nguyen<sup>1</sup>✉, Sergey M. Vlasov<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup> ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

<sup>1</sup> [nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com](mailto:nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com)✉, <https://orcid.org/0000-0001-6430-1927>

<sup>2</sup> [smvlasov@itmo.ru](mailto:smvlasov@itmo.ru), <https://orcid.org/0000-0002-8345-7553>

### Abstract

A new method proposed for identifying the parameters of sinusoidal signal with unknown variable amplitude. The problem of estimating the parameters of sinusoidal signals is relevant in the problems of dynamic positioning and disturbance compensation, for the synthesis of control laws that take into account external disturbances. In the proposed method, the restriction on the signal amplitude is removed. In contrast to known approaches, where the amplitude must be fixed, in the proposed method the signal amplitude can be variable. To implement the proposed identification algorithm, the Jordan matrix form and delay operators are used. During parameterization, a regression model is formed containing unknown stationary parameters. To search for unknown parameters, the method of dynamic expansion of the

© Нгуен Х.Т., Власов С.М., 2023

regressor and mixing is used. The results of computer simulation demonstrate the efficiency of the proposed algorithm. The simulation results confirmed the convergence of parameter estimation to the true values. The proposed approach can be applied to a wide class of applied problems related to disturbance compensation in vibration protection systems, monitoring systems in determining the parameters of high-rise or large-span building structures, and in robotic object control systems.

#### Keywords

sinusoidal signal, identification, variable amplitude, Jordan form of the matrix, linear regression model

**For citation:** Nguyen K.T., Vlasov S.M. Method for identification of sinusoidal signal parameters with variable unknown amplitude. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 1, pp. 54–61 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-1-54-61

## Введение

В работе рассмотрена задача идентификации параметров синусоидального сигнала с неизвестной нестационарной амплитудой. Проблема идентификации частоты синусоидальных сигналов изучена для постоянных [1–7] и переменных [8–13] параметров. Задача идентификации частоты синусоидальных сигналов является очень важной и актуальной, решение которой может найти в большом количестве практических приложений: в системах динамического позиционирования и компенсации возмущений, системах виброзащиты и мониторинга при определении параметров высотных или большепролетных строительных сооружений.

В работе [8] представлен алгоритм оценивания нестационарной частоты неза шумленного синусоидального сигнала. Предположено, что амплитуда и частота синусоидального сигнала неизвестные функции времени, но являются решениями линейных стационарных дифференциальных уравнений с известными параметрами. Основным недостатком данного подхода состоит в снятии ограничений на стационарность амплитуды и частоты, но фаза синусоидального сигнала — постоянна.

В [10] рассмотрен алгоритм идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала, имеющего неизвестные амплитуду и фазу. Предложен подход к идентификации линейно меняющейся частоты, предусматривающий итеративную фильтрацию (с использованием линейных устойчивых звеньев первого порядка) измеряемого синусоидального сигнала, которая позволяет получить простую линейную регрессионную модель с одним неизвестным постоянным параметром. Ограничением этого метода является то, что амплитуда и фаза постоянны.

В работе [11] рассмотрена задача оценивания параметров синусоидального сигнала, частота которого изменяется как полиномиальная функция времени. Для решения этой задачи предложена параметризация, позволяющая сформировать уравнения линейной регрессии относительно неизвестных параметров. Оценки формируются с использованием метода динамического расширения регрессора. В [12] предложен метод оценивания частоты синусоидального сигнала с переменной амплитудой. Амплитуда предполагается известной функцией в пределах постоянного множителя, фаза также известна. На первом этапе предложен подход к параметризации синусоидального сигнала и получена модель линейной регрессии третьего порядка. На сле-

дующем этапе создан алгоритм оценивания на основе стандартного градиентного подхода. Общий недостаток этих подходов в том, что амплитуда — известная функция времени.

В настоящей работе рассмотрена задача идентификации параметров синусоидального сигнала с неизвестной переменной амплитудой. Модель линейной регрессии второго порядка построена с использованием операторов задержки. Предположим, что частота, смещение и фаза синусоидального сигнала — постоянные и неизвестные параметры, а амплитуда — переменная и неизвестная функция. Необходимо синтезировать алгоритм идентификации, который обеспечит сходимость настроенной оценки параметров к истинным значениям.

Предложен новый метод идентификации параметров синусоидального сигнала с переменными параметрами, который повысит качество оценивания параметров исходного сигнала, и обеспечит экспоненциальную сходимость к нулю ошибок оценивания. В отличие от аналогичных, в разработанном методе нет ограничения, которое требует измерения переменных частей сигнала. Представленный метод робастный по отношению к шумам, в отличие от аналогов.

## Постановка задачи

Рассмотрим измеряемый сигнал

$$y(t) = A(t)\mu e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где  $\mu$  — постоянный параметр;  $A(t)$  — переменная амплитуда;  $\beta > 0$  — коэффициент затухания;  $\omega \in \mathbb{R}$  и  $\varphi \in \mathbb{R}$  — неизвестные частота и фаза;  $t$  — время. Параметры  $\mu$ ,  $\beta$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  и функция  $A(t)$  считаются неизвестными.

Требуется синтезировать алгоритм оценивания частоты  $\hat{\omega}(t)$  и коэффициента затухания  $\hat{\beta}(t)$ , обеспечивающих выполнение условий

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\omega - \hat{\omega}(t)) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (\beta - \hat{\beta}(t)) = 0.$$

Перепишем уравнение (1) в удобном виде

$$y(t) = A(t)Y(t),$$

где  $Y(t) = \mu e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$ .

Введем допущение.

**Допущение 1.** Функция  $A(t)$  является выходом линейного генератора

$$\begin{aligned} A(t) &= \mathbf{h}^T \Psi(t), \\ \dot{\Psi}(t) &= \mathbf{G} \Psi(t), \end{aligned}$$

где  $\Psi \in \mathbb{R}^q$  — матрица состояния генератора с неизвестным начальным значением  $\Psi(0)$ ;  $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{q \times q}$  — матрица известных постоянных коэффициентов;  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^q$  — вектор соответствующей размерности.

Также допустим, что частота  $A(t)$  изменяется по синусоидальному закону, тогда матрица  $\mathbf{G}$  и вектор  $\Psi(0)$  примут вид

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\gamma^2 & 0 \end{bmatrix}, \Psi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix},$$

где  $\gamma$  — известный параметр;  $\theta$  — неизвестный параметр.

**Допущение 2.** Функция  $Y(t)$  является выходом линейного генератора

$$Y(t) = \mathbf{H}^T \xi(t), \quad (2)$$

$$\dot{\xi}(t) = \mathbf{\Gamma} \xi(t), \quad (3)$$

где  $\xi \in \mathbb{R}^p$  — вектор состояния генератора;  $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  — матрица постоянных коэффициентов;  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^p$  — вектор соответствующей размерности.

Для векторно-матричной формы выражения (2)–(3) имеют вид [14]:

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \beta^2 & -2\beta \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

### Параметризация синусоидального сигнала

Рассмотрим задачу построения модели линейной регрессии с измеряемыми переменными и вектором постоянных параметров, зависящих от неизвестной частоты  $\omega$  и коэффициента затухания  $\beta$ .

Наряду с измеряемым сигналом  $y(t)$  рассмотрим запаздывающие сигналы

$$y_1(t) = \begin{cases} y(t - d_1), & t \geq d_1, \\ 0, & t < d_1, \end{cases} \quad (4)$$

$$y_2(t) = \begin{cases} y(t - d_2), & t \geq d_2, \\ 0, & t < d_2, \end{cases} \quad (5)$$

где  $d_1, d_2 \in \mathbb{R}_+$  — постоянные величины запаздывания.

Для сигналов (4) и (5) запишем соотношения:

$$y_1(t) = A_1(t)Y_1(t), \quad (6)$$

$$y_2(t) = A_2(t)Y_2(t), \quad (7)$$

где

$$A_1(t) = A(t - d_1), A_2(t) = A(t - d_2), \quad (8)$$

$$Y_1(t) = Y(t - d_1), Y_2(t) = Y(t - d_2). \quad (9)$$

**Утверждение 1.** Измеряемые сигналы (1), (8) и (9) связаны тождеством:

$$\Xi(t) = \Psi^T(t)\Theta, \quad (10)$$

где  $\Xi \in \mathbb{R}^1$ ;  $\Psi \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  — измеряемые функции;  $\Theta \in \mathbb{R}^6$  — вектор неизвестных параметров.

Из допущений 1 и 2 запишем функции:

$$A(t) = \mathbf{h}^T e^{\mathbf{G}t} \Psi(0), \quad (11)$$

$$Y(t) = \mathbf{H}^T e^{\mathbf{\Gamma}t} \xi(0).$$

На основании выражения (8) получим:

$$A_1(t) = A(t - d_1) = \mathbf{h}^T e^{\mathbf{G}t} e^{-\mathbf{G}d_1} \Psi(0), \quad (12)$$

$$A_2(t) = A(t - d_2) = \mathbf{h}^T e^{\mathbf{G}t} e^{-\mathbf{G}d_2} \Psi(0), \quad (13)$$

а из выражений (9):

$$Y_1(t) = Y(t - d_1) = \mathbf{H}^T e^{\mathbf{\Gamma}t} e^{-\mathbf{\Gamma}d_1} \xi(0) = \mathbf{H}^T e^{-\mathbf{\Gamma}d_1} \xi(t), \quad (14)$$

$$Y_2(t) = Y(t - d_2) = \mathbf{H}^T e^{\mathbf{\Gamma}t} e^{-\mathbf{\Gamma}d_2} \xi(0) = \mathbf{H}^T e^{-\mathbf{\Gamma}d_2} \xi(t). \quad (15)$$

Поставив (14) и (15) в (6) и (7) соответственно, получим

$$y_1(t) = A_1(t) \mathbf{H}^T e^{-\mathbf{\Gamma}d_1} \xi(t),$$

$$y_2(t) = A_2(t) \mathbf{H}^T e^{-\mathbf{\Gamma}d_2} \xi(t).$$

**Утверждение 2.** Сигнал (11) связан соотношением:

$$A(t) = \gamma^{-1} \sin(\gamma t) \theta.$$

**Доказательство утверждения 2.** Преобразуем  $e^{\mathbf{G}t}$  в уравнении (11) аналогично подходу, описанному в работе [15]:

$$e^{\mathbf{G}t} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma t) & \gamma^{-1} \sin(\gamma t) \\ -\gamma \sin(\gamma t) & \cos(\gamma t) \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Поставив соотношение (16) в (11), получим

$$A(t) = \gamma^{-1} \sin(\gamma t) \theta, \quad (17)$$

что и требовалось доказать для утверждения 2.

Аналогично найдем:

$$e^{-\mathbf{G}d_1} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma d_1) & -\gamma^{-1} \sin(\gamma d_1) \\ \gamma \sin(\gamma d_1) & \cos(\gamma d_1) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$e^{-\mathbf{G}d_2} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma d_2) & -\gamma^{-1} \sin(\gamma d_2) \\ \gamma \sin(\gamma d_2) & \cos(\gamma d_2) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

Для сокращения числа параметров примем  $d_2 = 2d_1 = 2d$ .

Поставим выражения (17) и (18) в уравнение (12), которое будет иметь вид:

$$A_1(t) = \gamma^{-1} \sin(\gamma t - \gamma d) \theta,$$

а (17) и (19) в уравнение (13):

$$A_2(t) = \gamma^{-1} \sin(\gamma t - 2\gamma d) \theta.$$

**Утверждение 3.** Сигнал (14) связан соотношением:

$$Y_1(t) = e^{\beta d} [\cos(\omega d) + \beta \omega^{-1} \sin(\omega d) - \omega^{-1} \sin(\omega d)] \xi(t).$$

**Доказательство утверждения 3.** Применим жорданову форму для преобразователя  $e^{-\mathbf{\Gamma}d}$ .

Вычислим собственные значения матрицы  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \det(\Gamma - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ -\omega^2 - \beta^2 & -2\beta - \lambda \end{vmatrix} = 0, \\ &\Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda\gamma + \omega^2 + \beta^2 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = -\beta + i\omega, \lambda_2 = -\beta - i\omega, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}$  — единичная матрица.

Для каждого из собственных значений получим собственные векторы. Для числа  $\lambda_1 = -\beta + i\omega$ , имеем:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \beta - i\omega & 1 \\ -\omega^2 - \beta^2 & -\beta - i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} &= 0, \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} (\beta - i\omega)x_1 + y_1 = 0 \\ (-\omega^2 - \beta^2)x_1 + (-\beta - i\omega)y_1 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow y_1 &= (i\omega - \beta)x_1. \end{aligned}$$

Полагая  $x_1 = 1$ , найдем собственный вектор  $\mathbf{V}_1 = (x_1, y_1)^T$ :

$$x_1 = 1, \Rightarrow y_2 = -\gamma + i\omega, \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta + i\omega \end{bmatrix}$$

и аналогично — вектор  $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)^T$ , ассоциированный с собственным значением  $\lambda_2 = -\beta - i\omega$ , получим

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \gamma + i\omega & 1 \\ -\omega^2 - \beta^2 & -\beta + i\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} &= 0, \Rightarrow \begin{cases} (\beta + i\omega)x_2 + y_2 = 0 \\ -\omega^2 x_2 + i\omega y_2 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow y_2 &= -(\beta + i\omega)x_2. \end{aligned}$$

При  $x_2 = 1$  найдем собственный вектор  $\mathbf{V}_2 = (x_2, y_2)^T$ :

$$x_2 = 1, \Rightarrow y_2 = -\beta - i\omega, \Rightarrow \mathbf{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta - i\omega \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу  $\mathbf{V}$  из найденных векторов  $\mathbf{V}_1$  и  $\mathbf{V}_2$ :

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (i\omega - \beta) & -(\beta + i\omega) \end{bmatrix}.$$

Запишем жорданову форму  $\mathbf{J}_\Gamma$  для заданной матрицы  $\Gamma$ , используя форму

$$\mathbf{J}_\Gamma = \mathbf{V}^{-1}\Gamma\mathbf{V} = \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} -(\beta + i\omega) & -1 \\ -(i\omega - \beta) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 - \beta^2 & -2\beta \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ (i\omega - \beta) & -(\beta + i\omega) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_\Gamma = \mathbf{V}^{-1}\Gamma\mathbf{V} = \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} \beta^2 + \omega^2 & \beta - i\omega \\ -\beta^2 - \omega^2 & -\beta - i\omega \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega - \beta & -\beta - i\omega \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{J}_\Gamma = \mathbf{V}^{-1}\Gamma\mathbf{V} = \begin{bmatrix} i\omega - \beta & 0 \\ 0 & -i\omega - \beta \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу  $e^{\mathbf{J}_\Gamma d}$  в следующем виде

$$e^{\mathbf{J}_\Gamma d} = e^{-\beta d} \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega d} \end{bmatrix}.$$

Вычислим матричную экспоненту  $e^{\Gamma d}$

$$e^{\Gamma d} = \mathbf{V} e^{\mathbf{J}_\Gamma d} \mathbf{V}^{-1} = e^{-\beta d} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i\omega - \beta & -i\omega - \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega d} \end{bmatrix} \times \frac{1}{-2i\omega} \begin{bmatrix} -i\omega - \beta & -1 \\ i\omega - \beta & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{\Gamma d} = \frac{e^{-\beta d}}{-2i\omega} \begin{bmatrix} e^{i\omega d} & e^{-i\omega d} \\ (i\omega - \beta)e^{i\omega d} & (-i\omega - \beta)e^{-i\omega d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i\omega - \beta & -1 \\ -i\omega + \beta & 1 \end{bmatrix},$$

$$e^{\Gamma d} = e^{-\beta d} \begin{bmatrix} \frac{e^{i\omega d} + e^{-i\omega d}}{2} + \beta\omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} & \omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} \\ -(\omega^2 + \beta^2)\omega^{-1} \times \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} - \beta\omega^{-1} \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} & \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} \end{bmatrix}.$$

Экспоненциальные функции  $e^{i\omega d}$ ,  $e^{-i\omega d}$  разложим по формуле Эйлера

$$\frac{e^{i\omega d} + e^{-i\omega d}}{2} = \cos(\omega d), \quad \frac{e^{i\omega d} - e^{-i\omega d}}{2i} = \sin(\omega d).$$

Получаем  $e^{\Gamma d}$  в виде:

$$e^{\Gamma d} = e^{-\beta d} \begin{bmatrix} \cos(\omega d) + \beta\omega^{-1}\sin(\omega d) & \omega^{-1}\sin(\omega d) \\ -(\omega^2 + \beta^2)\omega^{-1} \times \sin(\omega d) + \beta\omega^{-1}\sin(\omega d) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$e^{\Gamma d} = e^{\beta d} \begin{bmatrix} \cos(\omega d) + \beta\omega^{-1}\sin(\omega d) & \omega^{-1}\sin(\omega d) \\ -(\omega^2 + \beta^2)\omega^{-1} \times \sin(\omega d) - \beta\omega^{-1}\sin(\omega d) \end{bmatrix}.$$

Из уравнений (14) и (20) запишем соотношение вида:

$$Y_1(t) = e^{\beta d} \begin{bmatrix} \cos(\omega d) + \beta\omega^{-1}\sin(\omega d) & -\omega^{-1}\sin(\omega d) \end{bmatrix} \xi(t). \quad (21)$$

Утверждение 3 доказано.

Аналогично найдем:

$$Y_2(t) = e^{2\beta d} \begin{bmatrix} \cos(2\omega d) + \beta\omega^{-1}\sin(2\omega d) & -\omega^{-1}\sin(2\omega d) \end{bmatrix} \xi(t). \quad (22)$$

Подставим уравнения (21), (22) в уравнения (4) и (5) и представим в следующем матричном виде

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1(t)e^{\beta d}(c_1 + \beta\omega^{-1}s_1) & -\omega^{-1}A_1(t)s_1e^{\beta d} \\ A_2(t)e^{2\beta d}(c_2 + \beta\omega^{-1}s_2) & -\omega^{-1}A_2(t)s_2e^{2\beta d} \end{bmatrix} \xi(t),$$

где  $s_1 = \sin(\omega d)$ ;  $c_1 = \cos(\omega d)$ ;  $s_2 = \sin(2\omega d)$ ;  $c_2 = \cos(2\omega d)$ .

Рассмотрим следующее выражение:

$$\mathbf{B} = \Phi \xi, \quad (23)$$

где  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix}$ ,

$$\Phi = \begin{bmatrix} A_1(t)e^{\beta d}(c_1 + \beta\omega^{-1}s_1) & -\omega^{-1}A_1(t)s_1e^{\beta d} \\ A_2(t)e^{2\beta d}(c_2 + \beta\omega^{-1}s_2) & -\omega^{-1}A_2(t)s_2e^{2\beta d} \end{bmatrix}.$$

Запишем (23) в виде:

$$\Phi^{-1}\mathbf{B} = \xi = \frac{1}{\det(\Phi)} \text{adj}(\Phi)\mathbf{B} \Rightarrow \text{adj}(\Phi)\mathbf{B} = \det(\Phi)\xi. \quad (24)$$

Умножив уравнение (24) на  $A(t)\mathbf{H}^T$ , получим

$$A(t)\mathbf{H}^T \text{adj}(\Phi)\mathbf{B} = \det(\Phi)y(t), \quad (25)$$

$$\text{adj}(\Phi) = \begin{bmatrix} -\omega^{-1}A_2(t)s_2e^{2\beta d} & \omega^{-1}A_1(t)s_1e^{\beta d} \\ -A_2(t)e^{2\beta d}(c_2 + \beta\omega^{-1}s_2) & A_1(t)e^{\beta d}(c_1 + \beta\omega^{-1}s_1) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

$$\det(\Phi) = -\frac{1}{\omega}A_1(t)A_2(t)e^{3\beta d}s_2c_1 + \frac{1}{\omega}A_1(t)A_2(t)e^{3\beta d}s_1c_2,$$

$$\det(\Phi) = -\frac{1}{\omega}s_1A_1(t)A_2(t)e^{3\beta d}. \quad (27)$$

Обозначим:

$$A(t) = \gamma^{-1}\theta a, \quad (28)$$

$$A_1(t) = \gamma^{-1}\theta a_1, \quad (29)$$

$$A_2(t) = \gamma^{-1}\theta a_2, \quad (30)$$

где  $a = \gamma^{-1}\sin(\gamma t)$ ,  $a_1 = \gamma^{-1}\sin(\gamma t - \gamma d)$ ,  $a_2 = \gamma^{-1}\sin(\gamma t - 2\gamma d)$ .

Выразим параметры  $c_2$ ,  $s_2$  через  $c_1$ ,  $s_1$ , используя тригонометрические формулы для двойного угла:

$$c_2 = 2c_1^2 - 1, \quad s_2 = 2c_1s_1. \quad (31)$$

Из выражений (25)–(31) получим уравнение

$$-\omega^{-1}e^{2\beta d}2s_1c_1y_1(t)\theta^2aa_2 + \omega^{-1}e^{\beta d}s_1y_2(t)\theta^2aa_1 = -\omega^{-1}e^{3\beta d}s_1y(t)\theta^2a_1a_2.$$

Разделив обе части выражения (31) на  $-\omega^{-1}e^{\beta d}s_1\theta^2$ , запишем

$$2e^{\beta d}c_1y_1(t)aa_2 - y_2(t)aa_1 = y(t)a_1a_2e^{2\beta d}. \quad (32)$$

Выражение (32) представим в виде линейной регрессионной модели (10):

$$\Xi(t) = \Psi^T(t)\Theta, \quad (33)$$

где  $\Xi(t) = y_2aa_1$  — измеряемая функция;  $\Psi^T(t) = \begin{bmatrix} 2y_1aa_2 \\ -y_2aa_1 \end{bmatrix}$  — регрессор;  $\Theta = \begin{bmatrix} e^{\beta d}c_1 \\ e^{2\beta d} \end{bmatrix}$  — вектор неизвестных параметров.

### Алгоритм оценивания неизвестных параметров регрессионной модели

Для оценивания параметров вектора  $\Theta$  модели (33) применим метод динамического расширения регрессора (Dynamic Regressor Extension and Mixing, DREM) [16].

Применим блок запаздывания  $v_i$ ,  $i = \overline{1, q-1}$  для известных элементов регрессионной модели (33):

$$\Xi(t - v_i) = \eta^T(t - v_i)\Theta,$$

где  $i = \overline{1, 6}$ .

Обозначим

$$\vartheta_e = \gamma_e\Theta, \quad (34)$$

где  $\vartheta_e = [\Psi(t) \quad \Psi(t - v_1) \quad \dots \quad \Psi(t - v_i)]^T$ ,  $\gamma_e = [\eta_1^T(t) \quad \eta_1^T(t - v_1) \quad \dots \quad \eta_1^T(t - v_i)]$ .

Умножив (34) на  $\text{adj}(\eta_e(t))$ , получим

$$\vartheta(t) = \Delta(t)\Theta, \quad (35)$$

где  $\Delta(t) = \det(\eta_e(t)) \in \mathbb{R}^1$ ;  $\vartheta(t) = \text{adj}(\eta_e)\vartheta_e(t) \in \mathbb{R}^2$ .

Запишем уравнение (35) покомпонентно:

$$\vartheta_i(t) = \Delta(t)\Theta_i, \quad i = \overline{1, 2}.$$

Представим алгоритм оценивания параметров  $\Theta_i$  в виде:

$$\hat{\Theta}_i(t) = -\kappa_i\Delta(t)(\vartheta_i(t) - \Delta(t)\hat{\Theta}_i),$$

где  $\kappa_i$  — настраиваемый параметр,  $i = \overline{1, 2}$ .

**Алгоритм идентификации параметров исходного сигнала.** Для оценивания коэффициента затухания воспользуемся функцией  $\ln(\cdot)$  на основе параметра  $\hat{\Theta}_2$  из модели (33)

$$\hat{\beta}(t) = \frac{1}{d} \ln \sqrt{\hat{\Theta}_2(t)}.$$

Для оценивания частоты воспользуемся функцией  $\arccos(\cdot)$  на основе параметров  $\hat{\Theta}_1$  и  $\hat{\Theta}_2$  из модели (33)

$$\hat{\omega}(t) = \frac{1}{d} \arccos \left( \frac{\hat{\Theta}_1(t)}{\sqrt{\hat{\Theta}_2(t)}} \right).$$

### Математическое моделирование

Рассмотрим результаты численного моделирования, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма оценивания частоты несмещенного гармонического сигнала с постоянными параметрами. Моделирование выполнено с использованием программной среды MATLAB Simulink.

**Пример 1.** Рассмотрим сигнал вида

$$y(t) = A(t)e^{-0,2t}\sin(5t - 1). \quad (36)$$

Для функции  $A(t)$  принимаются следующие параметры

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Приведем значения параметров для предложенного метода:  $d = 0,1$ ,  $v = 0,2$ ,  $\kappa_i = 10^8$ .

На рис. 1 показаны результаты оценивания параметров сигнала (36).

**Пример 2.** Рассмотрим сигнал вида

$$y(t) = A(t)e^{-1t}\sin(10t + 1). \quad (37)$$

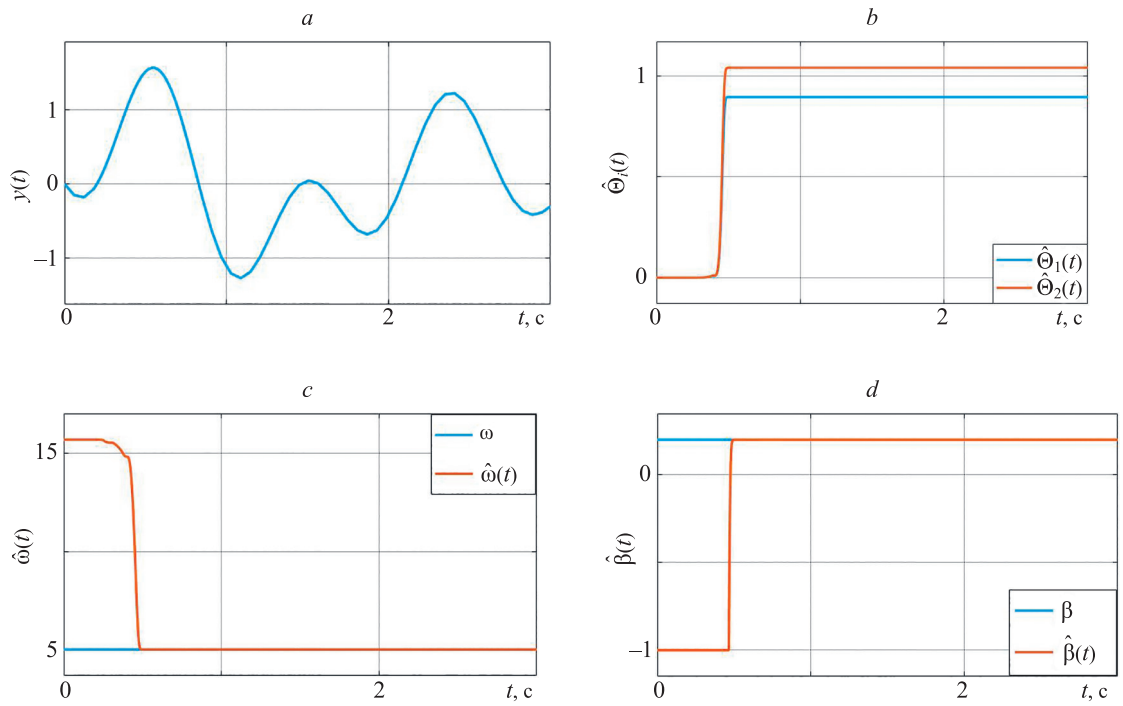


Рис. 1. График сигнала  $y(t)$  (a); графики оценок: параметров  $\hat{\theta}_i(t)$  (b), частоты  $\hat{\omega}(t)$  при  $\omega = 5$  (c) и коэффициента затухания  $\hat{\beta}(t)$  при  $\beta = 0,2$  (d)

Fig. 1. Signal waveform  $y(t)$  (a); parameter estimation plot  $\hat{\theta}_i(t)$  (b); frequency estimation plot  $\hat{\omega}(t)$  at  $\omega = 5$  (c); damping factor estimation plot  $\hat{\beta}(t)$  at  $\beta = 0.2$  (d)

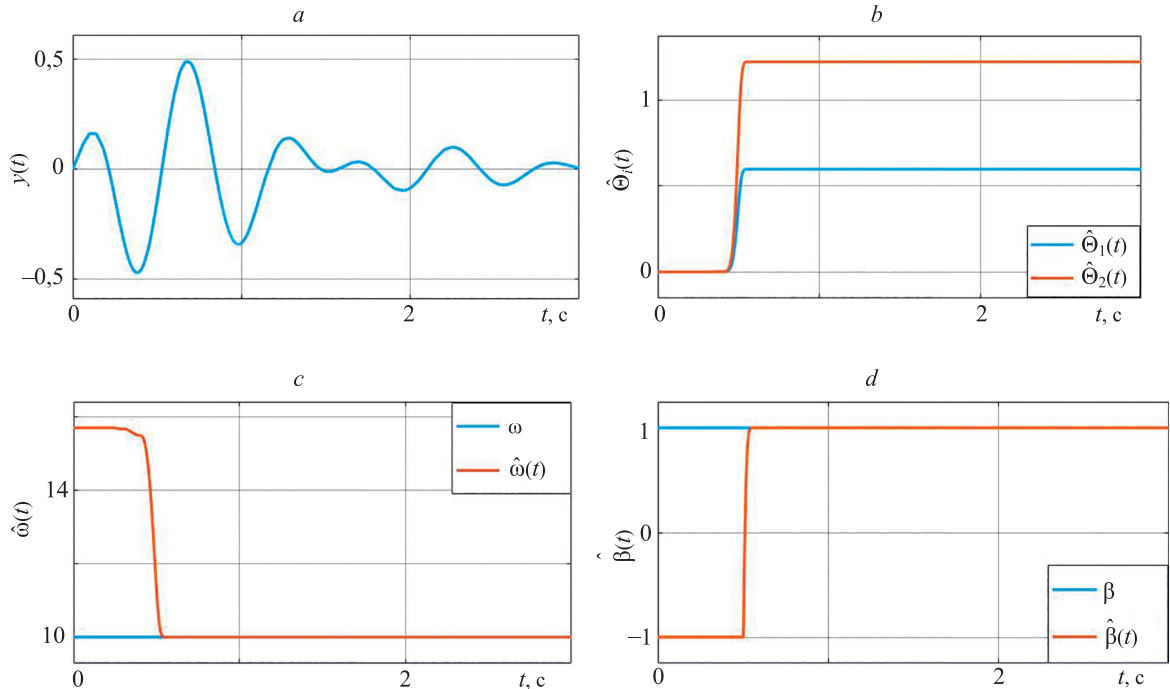


Рис. 2. График сигнала  $y(t)$  (a); графики оценок: параметров  $\hat{\theta}_i(t)$  (b), частоты  $\hat{\omega}(t)$  при  $\omega = 3$  (c) и коэффициента затухания  $\hat{\beta}(t)$  при  $\beta = 1$  (d)

Fig. 2. Signal waveform  $y(t)$  (a); parameter estimation  $\hat{\theta}_i(t)$  (b); frequency estimation plot  $\hat{\omega}(t)$  at  $\omega = 3$  (c); damping factor estimation plot  $\hat{\beta}(t)$  at  $\beta = 1$  (d)

Для функции  $A(t)$  используем параметры

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}, \quad \Psi(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Приведем значения параметров для предложенного метода:  $d = 0,1$ ,  $v = 0,2$ ,  $\kappa_i = 10^8$ .

На рис. 2 показаны результаты оценивания параметров сигнала (37).

На рис. 1, 2 приведены результаты оценивания параметров сигналов (36) и (37). Как видно из графиков, предложенный алгоритм оценивания обеспечивает экспоненциальную сходимость к истинным значениям оценивания параметров сигнала  $y(t)$ .

## Заключение

В работе предложен новый метод идентификации параметров синусоидального сигнала с переменной неизвестной амплитудой. Амплитуда синусоидального сигнала изменяется по гармоническому закону с неизвестными параметрами. Предложен подход для параметризации синусоидального сигнала с использованием операторов запаздывания и жорданова форма матрицы. Выполнена оценка вектора параметров регрессионных моделей с использованием метода динамического расширения регрессора. Результаты моделирования подтверждают сходимость оценивания параметров к истинным значениям. В дальнейшем планируется расширить область применения алгоритма на случай переменных частот и фаз.

## Литература

1. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Efimov D., Zolghadri A. Frequency estimation for periodical signal with noise in finite time // Proc. of the 50<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2011. P. 3646–3651. <https://doi.org/10.1109/CDC.2011.6160655>
2. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Improved transients in multiple frequencies estimation via dynamic regressor extension and mixing // IFAC-PapersOnLine, 2016. V. 49. N 13. P. 99–104. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.934>
3. Bobtsov A., Lyamin A., Romasheva D. Algorithm of parameters' identification of polyharmonic function // IFAC Proceedings Volumes, 2002. V. 35. N 1. P. 439–443. <https://doi.org/10.3182/20020721-6-ES-1901.01059>
4. Marino R., Tomei R. Global estimation of n unknown frequencies // IEEE Transactions on Automatic Control, 2002. V. 47. N 8. P. 1324–1328. <https://doi.org/10.1109/TAC.2002.800761>
5. Bodson M., Douglas S.C. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency // Automatica, 1997. V. 33. N 12. P. 2213–2221. [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00149-0](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00149-0)
6. Khac T., Vlasov S.M., Iureva R.A. Estimating the frequency of the sinusoidal signal using the parameterization based on the delay operators // Proc. of the 18<sup>th</sup> International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2021. P. 656–660. <https://doi.org/10.5220/0010536506560660>
7. Севастеева Е.С., Чернов В.А., Бобцов А.А. Алгоритм увеличения скорости идентификации частоты синусоидального сигнала // Известия вузов. Приборостроение, 2019. Т. 62. № 9. С. 767–771. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2019-62-9-767-771>
8. Бобцов А.А., Николаев Н.А., Оськина О.В., Низовцев С.И. Идентификация нестационарного параметра незашумленного синусоидального сигнала // Автоматика и телемеханика, 2022. № 7. С. 137–151. <https://doi.org/10.31857/S000523102207008X>
9. Низовцев С.И., Шаветов С.В., Пыркин А.А. Алгоритм оценивания переменной частоты синусоидального сигнала // Известия вузов. Приборостроение, 2021. Т. 64. № 9. С. 789–793. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2021-64-9-789-793>
10. Ле Ван Туан, Коротина М.М., Бобцов А.А., Арановский С.В. Алгоритм идентификации линейно меняющейся частоты синусоидального сигнала // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики, 2019. Т. 19. № 1. С. 52–58. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2019-19-1-52-58>
11. Коротина М.М., Арановский С.В., Бобцов А.А. Оценивание параметров синусоидального сигнала со степенной функцией частоты // Известия вузов. Приборостроение, 2020. Т. 63. № 6. С. 507–514. <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2020-63-6-507-514>
12. Vedyakov A.A., VEDIKOVA A.O., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Aranovskiy S.V. Frequency estimation of a sinusoidal signal with time-varying amplitude // IFAC-PapersOnLine, 2017. V. 50. N 1. P. 12880–12885. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1940>

## References

1. Pyrkin A.A., Bobtsov A.A., Efimov D., Zolghadri A. Frequency estimation for periodical signal with noise in finite time. *Proc. of the 50<sup>th</sup> IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference*, 2011, pp. 3646–3651. <https://doi.org/10.1109/CDC.2011.6160655>
2. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. Improved transients in multiple frequencies estimation via dynamic regressor extension and mixing. *IFAC-PapersOnLine*, 2016, vol. 49, no. 13, pp. 99–104. [doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.934](https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.934)
3. Bobtsov A., Lyamin A., Romasheva D. Algorithm of parameters' identification of polyharmonic function. *IFAC Proceedings Volumes*, 2002, vol. 35, no. 1, pp. 439–443. <https://doi.org/10.3182/20020721-6-ES-1901.01059>
4. Marino R., Tomei R. Global estimation of n unknown frequencies. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, vol. 47, no. 8, pp. 1324–1328. <https://doi.org/10.1109/TAC.2002.800761>
5. Bodson M., Douglas S.C. Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency. *Automatica*, 1997, vol. 33, no. 12, pp. 2213–2221. [doi.org/10.1016/S0005-1098\(97\)00149-0](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(97)00149-0)
6. Khac T., Vlasov S.M., Iureva R.A. Estimating the frequency of the sinusoidal signal using the parameterization based on the delay operators. *Proc. of the 18<sup>th</sup> International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO)*, 2021, pp. 656–660. <https://doi.org/10.5220/0010536506560660>
7. Sevasteeva E.S., Chernov V.A., Bobtsov A.A. Algorithm for increasing the speed of sinusoidal signal frequency identification. *Journal of Instrument Engineering*, 2019, vol. 62, no. 9, pp. 767–771. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2019-62-9-767-771>
8. Bobtsov A.A., Nikolaev N.A., Oskina O.V., Nizovtsev S.I. Identification of a time-varying parameter of a noiseless sinusoidal signal. *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 7, pp. 1123–1135. <https://doi.org/10.1134/s0005117922070086>
9. Nizovtsev S.I., Shavetov S.V., Pyrkin A.A. Algorithm for estimating the variable frequency of sinusoidal signal. *Journal of Instrument Engineering*, 2021, vol. 64, no. 9, pp. 789–793. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2021-64-9-789-793>
10. Tuan Le Van, Korotina M.M., Bobtsov A.A., Aranovskiy S.V. New identification algorithm for linearly varying frequency of sinusoidal signal. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 52–58. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2019-19-1-52-58>
11. Korotina M.M., Aranovskiy S.V., Bobtsov A.A. Parameters estimation of sinusoidal signal with power-law frequency dependence. *Journal of Instrument Engineering*, 2020, vol. 63, no. 6, pp. 507–514. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2020-63-6-507-514>
12. Vedyakov A.A., VEDIKOVA A.O., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Aranovskiy S.V. Frequency estimation of a sinusoidal signal with time-varying amplitude. *IFAC-PapersOnLine*, 2017, vol. 50, no. 1, pp. 12880–12885. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2017.08.1940>

13. Vedyakov A.A., VEDIKOVA A.O., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Kakanov M.A. Frequency estimation of a sinusoidal signal with time-varying amplitude and phase // *IFAC-PapersOnLine*. 2018. V. 51. N 32. P. 663–668. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.501>
14. Нгуен Х., Власов С.М., Пыркин А.А. Алгоритм идентификации параметров синусоидального сигнала с экспоненциально затухающей амплитудой // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2022. Т. 23. № 3. С. 125–131. <https://doi.org/10.17587/mau.23.125-131>
15. Нгуен Х., Власов С.М., Пыркин А.А., Попков И.В. Новый алгоритм идентификации частоты синусоидального сигнала с постоянными параметрами // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2022. Т. 22. № 1. С. 18–24. <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2022-22-1-18-24>
16. Aranovskiy S., Bobsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2017. V. 62. N 7. P. 3546–3550. <https://doi.org/10.1109/tac.2016.2614889>
13. Vedyakov A.A., VEDIKOVA A.O., Bobtsov A.A., Pyrkin A.A., Kakanov M.A. Frequency estimation of a sinusoidal signal with time-varying amplitude and phase. *IFAC-PapersOnLine*, 2018, vol. 51, no. 32, pp. 663–668. <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.501>
14. Nguyen Kh., Vlasov S.M., Pyrkin A.A. Algorithm for identification of parameters sinusoidal signal with the exponentially damping amplitude. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2022, vol. 23, no. 3, pp. 125–131. (in Russian). <https://doi.org/10.17587/mau.23.125-131>
15. Nguyen Kh.T., Vlasov S.M., Pyrkin A.A., Popkov I.V. A new algorithm for the identification of sinusoidal signal frequency with constant parameters. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2022, vol. 22, no. 1, pp. 18–24. (in Russian). <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2022-22-1-18-24>
16. Aranovskiy S., Bobsov A., Ortega R., Pyrkin A. Performance enhancement of parameter estimators via dynamic regressor extension and mixing. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, vol. 62, no. 7, pp. 3546–3550. <https://doi.org/10.1109/tac.2016.2614889>

#### Авторы

**Нгуен Хак Тунг** — аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [orcid.org/0000-0001-6430-1927](https://orcid.org/0000-0001-6430-1927), [nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com](mailto:nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com)

**Власов Сергей Михайлович** — кандидат технических наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, [orcid.org/0000-0002-8345-7553](https://orcid.org/0000-0002-8345-7553), [smvlasov@itmo.ru](mailto:smvlasov@itmo.ru)

*Статья поступила в редакцию 18.11.2022  
Одобрена после рецензирования 22.12.2022  
Принята к печати 16.01.2023*

#### Authors

**Khac T. Nguyen** — PhD student, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [orcid.org/0000-0001-6430-1927](https://orcid.org/0000-0001-6430-1927), [nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com](mailto:nguyenkhactunghvhq1994@gmail.com)

**Sergey M. Vlasov** — PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, [orcid.org/0000-0002-8345-7553](https://orcid.org/0000-0002-8345-7553), [smvlasov@itmo.ru](mailto:smvlasov@itmo.ru)

*Received 18.11.2022  
Approved after reviewing 22.12.2022  
Accepted 16.01.2023*



Работа доступна по лицензии  
Creative Commons  
«Attribution-NonCommercial»