doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-646-651
УДК 004.94+519.676

Оценка моментов квантованной случайной величины

Михаил Иванович Ломакин[1]✉, Александр Владимирович Докукин[2]

[1,2] Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, Москва, 121352, Российская Федерация

[1] mlomakin@yandex.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-4191-1348
[2] aldokukin@yandex.ru, https://orcid.org/0000-0002-3342-8770

Аннотация
Введение. Значительная часть исследований проблем квантования случайных величин посвящена практическим аспектам оптимального заполнения информации квантования. Для этих целей используют количественные характеристики квантуемых случайных величин, такие как математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение. При этом применяют известные параметрические распределения: равномерное, экспоненциальное, нормальное и др. В реальных ситуациях идентифицировать исходное параметрическое распределение по имеющейся статистической информации не представляется возможным. Предложена непараметрическая модель определения таких числовых характеристик квантуемой случайной величины как высшие начальные моменты. **Метод.** Математическая формализация задачи оценки высших начальных моментов квантованной случайной величины в условиях неполных данных, представленных малыми выборками. Формализация выполнена в виде модели оптимизации определенного интеграла от кусочно-непрерывной функции, удовлетворяющей определенным условиям. Итоговые оценки высших начальных моментов квантуемой случайной величины найдены как экстремальные (нижние и верхние) оценки определенного интеграла на множестве функций распределения с заданными моментами, равными выборочным моментам квантуемой случайной величины. **Основные результаты.** Представлена модель высших начальных моментов квантованной случайной величины в виде определенного интеграла от кусочно-непрерывной функции. Решена в общем случае задача нахождения экстремальных (нижних и верхних) оценок высших начальных моментов квантованной случайной величины на множестве функций распределения с заданными моментами. Приведены примеры нахождения высших начальных моментов и оптимального квантования случайной величины. **Обсуждение.** Полученные результаты могут быть использованы специалистами при оценке и оптимизации квантования различной информации, представленной случайными сигналами.

Ключевые слова
случайная величина, выборка, квант, вероятность, моменты, функция распределения

Ссылка для цитирования: Ломакин М.И., Докукин А.В. Оценка моментов квантованной случайной величины // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 3. С. 646–651. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-646-651

Estimation of the moments of a quantized random variable

Mikhail I. Lomakin[1]✉, Alexander V. Dokukin[2]

[1,2] All-Russian Scietific Reserch Institute for Civil Defence and Emergencies of the EMERCOM of Russia, Moscow, 121352, Russian Federation

[1] lomakin@vniigoshs.ru✉, https://orcid.org/0000-0003-4191-1348
[2] dokukin@vniigoshs.ru, https://orcid.org/0000-0002-3342-8770

Abstract
A significant part of the research on the problems of quantization of random variables is devoted to practical aspects of optimal quantization in the sense of filling in information. For these purposes, certain quantitative characteristics of quantized random variables are used, such as: mathematical expectation, variance and mean square deviation. At the same time, to determine the quantitative characteristics of quantized random variables, as a rule, well-known parametric

distributions are used: uniform, exponential, normal and others. In real situations, it is not possible to identify the initial parametric distribution based on the available statistical information. In this paper, a nonparametric model is proposed for determining such numerical characteristics of a quantized random variable as the highest initial moments. The mathematical formalization of the problem of estimating the higher initial moments of a quantized random variable in the conditions of incomplete data represented by small samples of a quantized random variable is performed in the form of an optimization model of a certain integral of a piecewise continuous function satisfying certain conditions. The final estimates of the highest initial moments of the quantized random variable are found as extreme (lower and upper) estimates of a certain integral on a set of distribution functions with given moments equal to the sample moments of the quantized random variable. A model of the higher initial moments of a quantized random variable is presented in the form of a definite integral of a piecewise continuous function; in the general case, the problem of finding extreme (lower and upper) estimates of the higher initial moments of a quantized random variable on a set of distribution functions with given moments is solved. Examples of finding higher initial moments and optimal quantization of a random variable are given. The obtained results can be used by specialists in evaluating and optimizing the quantization of various information presented by random signals.

Keywords
random variable, sample, quantum, probability, moments, distribution function

For citation: Lomakin M.I., Dokukin A.V. Estimation of the moments of a quantized random variable. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 3, pp. 646–651 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-3-646-651

Введение

Преобразование, накопление и передача информации — основные процессы в информационных системах, определяющие эффективность их функционирования. В настоящее время данные процессы реализуются в цифровой форме. Это обусловлено тем, что цифровая информация более помехоустойчива, легче передается и обрабатывается. Для преобразования исходной информации, как правило, представленной непрерывными сигналами, в цифровую форму выполняют ее дискретизацию и квантование по уровню. Квантование по уровню состоит в переходе от непрерывного сигнала к его дискретному аналогу, когда множество непрерывных значений заменяется некоторым дискретным значением — уровнем. Различают равномерное квантование по уровню, при котором шаг постоянен, и неравномерное квантование по уровню, когда шаг квантования непостоянен. На практике преимущественное применение получило равномерное квантование в связи с простотой технической реализации [1, 2].

Вопросы оценки параметров квантованной случайной величины рассмотрены в большом количестве научных работ [2–16]. Работа [5] — одна из первых работ, в которой были изучены вопросы оценки характеристик квантованной случайной величины, где на основе использования аппарата характеристических функций выведены соотношения, связывающие моменты квантуемых и квантованных случайных величин. Эти соотношения позволяют оценить величину остаточной ошибки, возникающей при использовании поправок Шеппарда [5], а во многих случаях найти более точные поправочные формулы. Начальный момент (далее момент) порядка r квантованной случайной величины представлен в виде суммы двух составляющих. Первая составляющая является линейной комбинацией первых моментов неквантованной случайной величины и совпадает с выражением, которое обычно используется для моментов квантованной величины [5]. Вторая — комбинацией значений характеристической функции исходной величины и ее первых r–1 производных в определенных точках и определяет остаточную ошибку для моментов квантованной величины при использовании. Если ограничиться только первой составляющей, то получим приближенное соотношение для связи моментов квантуемой и квантованной случайной величины. При этом отмечено, что использование приближенного выражения, связывающего моменты квантуемой и квантованной случайной величины, даст приемлемую точность не для «всякой случайной величины», т. е. не для любого распределения квантуемой случайной величины. Разработанный в работе [5] подход для оценки моментов квантуемой случайной величины является параметрическим и предполагает знание распределения квантуемой случайной величины, которое, как правило, неизвестно.

В [6, 7] решена задача разработки оптимальной модели квантования случайной величины по минимуму ошибки квантования, которая может обеспечиваться: увеличением числа уровней квантования; выбором оптимальных уровней квантования или комбинацией этих двух методов. При этом известна априорная информация о функции распределения или о плотности распределения случайной величины (входного сигнала) и использовано нормальное распределение для разработки оптимальной модели квантования.

В [8] предложен модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайным периодом квантования. Предложенный алгоритм основан на численных методах решения стохастических дифференциальных уравнений и использует модифицированный метод максимального сечения, когда интенсивность перехода зависит от вектора состояния. Данный модифицированный алгоритм основан на имитации конкретных параметрических распределений.

В работах [9–14] в качестве основной модели квантования случайной величины применена модель, полученная в [9] следующего вида:

$$Mf(x) = (x + c)\int_0^\infty \left(E\left(\frac{t}{x}\right) + 1\right) dF(t),$$

где $Mf(x)$ – математическое ожидание квантуемой случайной величины; $F(t)$ — функция распределения квантуемой случайной величины; x — величина кванта; c — величина пробела между квантами; E — наибольшая целая часть числа (отношение t/x).

В [9–14] исследован функционал $Mf(x)$ при различных распределениях $F(t)$: равномерном, нормальном, гипердельтном. Распределение $F(t)$ в реальной ситуации, как правило, неизвестно, тогда полученные результаты сложно практически использовать. Обычно известны только выборки значений квантуемой величины.

Постановка задачи

Обозначим случайную квантуемую величину как y, а величину кванта — x. На основании выборок значений величины y определим ее моменты по соотношениям:

$$m_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^j;\ j = \overline{1;\ l};\ l > 0,$$

где m_j — j-й выборочный момент (момент порядка j); y_i — i-й элемент выборки $y_i > 0$ составляющие выборки $yv = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$, составляющие выборки $y_i > 0$ есть независимые одинаково распределенные величины из некоторого неизвестного распределения $F(t)$; y — квантуемая случайная величина ($y \in [0, Vr]$, $Vr < \infty$); n — объем выборки; l — количество моментов.

В настоящей работе использованы переменные с индексами (индексные или индексируемые переменные), например, y_i и переменные в степени, например, y_i^j или $(y_i)^j$.

Определим множество функций распределения F_0 квантуемой величины y, моменты распределения которой равны выборочным моментам m_j

$$F_0 = \{F(t)\colon \int_0^\infty t^j dF(t) = m_j;\ j = \overline{1;\ l};\ l > 0\}.$$

Задача состоит в поиске нижних и верхних оценок моментов квантованной величины

$$a = \left(\left(ent\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right)x\right)^j$$

на множестве F_0 функций распределения квантуемой величины y

$$m_{ja\min(\max)} = \min_{F(t)\in F_0} (\max) M\left(\left(\left(ent\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right)x\right)^j\right),$$

где M — оператор математического ожидания; $ent(c)$ — целая часть c.

Метод решения поставленной задачи

Найдем моменты дискретной случайной величины $b = \left(ent\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right)^j$. В соответствии с определением математического ожидания дискретной случайной величины b, имеем [15, 16]

$$m_{jb} = M\left(\left(ent\left(\frac{y}{x}\right) + 1\right)^j\right) = \sum_{i=1}^{\infty} i^j P\left(ent\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = i\right);$$

$$j = \overline{1;\ l};\ l > 0.$$

Условие $ent\left(\frac{y}{x}\right) + 1 = i$ тождественно неравенству

$$x(i - 1) \le y < xi,$$

вероятность выполнения которого определяется соотношением

$$P(x(i - 1) \le y < xi) = F(xi) - F(x(i - 1)),$$

тогда имеем

$$m_{jb} = \sum_{i=1}^{\infty} i^j (F(xi) - F(x(i - 1))). \tag{1}$$

Выполнив преобразования правой части выражения (1), получим

$$\begin{aligned} m_{jb} &= \sum_{i=1}^{\infty} i^j (F(xi) - F(x(i - 1))) = \\ &= -\sum_{i=1}^{k-1} F(xi)((i + 1)^j - i^j) + k^j (F(xk) + \\ &+ \sum_{i=k+1}^{\infty} i^j (F(xi) - F(x(i - 1))). \end{aligned}$$

С учетом того, что $y \in [0, Vr]$, $Vr < \infty$, для некоторого $k < \infty$ можно положить $F(kx) = 1$, тогда

$$m_{jb} = k^j - \sum_{i=1}^{k-1} F(xi)((i + 1)^j - i^j). \tag{2}$$

Преобразуем выражение (2) и получим

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k-1} F(xi)((i + 1)^j - i^j) = \\ &= \int_0^x (k^j - 1^j)dF(t) + \int_x^{2x} (k^j - 2^j)dF(t) + \int_{2x}^{3x} (k^j - 3)dF(t) + \ldots \\ &+ \int_{(k-2)x}^{(k-1)x} (k^j - (k - 1)^j)dF(t) = \int_0^{(k-1)x} fc(t)dF(t), \end{aligned}$$

где $fc(t)$ — кусочно-непрерывная функция вида:

$$fc(t) = \begin{cases} k^j - 1^j \text{ при } 0 \le t < x; \\ k^j - 2^j \text{ при } x \le t < 2x; \\ \ldots \\ k^j - (k - 1)^j \text{ при } (k - 2)x \le t < (k - 1)x. \end{cases}$$

В итоге получим

$$m_{jb} = \int_0^{(k-1)x} fs(t)dF(t). \tag{3}$$

Определим из выражения (3) функцию $fs(t)$ следующим образом:

$$fs(t) = k^j - fc(t) = \begin{cases} 1^j \text{ при } 0 \le t < x; \\ 2^j \text{ при } x \le t < 2x; \\ \ldots \\ (k - 1)^j \text{ при } (k - 2)x \le t < (k - 1)x. \end{cases} \tag{4}$$

Воспользуемся некоторыми результатами из «теории решения проблемы моментов Маркова» [17]. Одна из формулировок проблемы моментов Маркова состоит в следующем. «Заданы две конечные последовательности — последовательность чисел $\{m_i\}_0^l$ и последовательность непрерывных функций $\{u_i(t)\}_0^l (a \le t \le b)$. Требуется:

1) найти критерий представимости последовательности $\{m_i\}_0^l$ в виде:

$$m_i = \int_a^b u_i(t)dF(t),\ i = \overline{0, l}; \tag{5}$$

2) найти условия, при которых разрешимая проблема является определенной или неопределенной;
3) описать условия разрешения или не разрешения проблемы» [17].

Первая из экстремальных задач проблемы моментов Маркова — задача нахождения экстремальных значений интеграла

$$J = \int_a^\tau Q(t)dF(t),$$

где $a < \tau \le b$; $Q(t)$ — подинтегральная непрерывная функция, имеющая неотрицательную $l + 1$-ю производную; $F(t)$ — функция распределения, удовлетворяющая условию (5).

Имеет место следующее утверждение [17].

Утверждение 1. «При заданных значениях $l + 1$ моментов

$$m_i = \int_a^b u_i(t)dF(t),\ i = \overline{0, l}; \tag{6}$$

существует наименьшее значение $J_{\min}$ интеграла

$$J = \int_a^b Q(t)dF(t), \tag{7}$$

и оно находится по правилу:

$$\text{если } l = 2v - 1, \text{ то } J_{\min} = \sum_{j=1}^{v} p_j Q(\tau_j), \tag{8}$$

где числа $p_j > 0$ $(j = \overline{1, v})$ и $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_v < \infty$ определяются из равенств

$$\sum_{j=1}^{v} p_j u_i(\tau_j) = m_i,\ (i = \overline{0, l}). \tag{9}$$

Если $l = 2v - 2$, то минимум интеграла также определяется соотношением (8), числа $p_j > 0$ $(j = \overline{1, v})$ и $0 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_v < \infty$ определяются из равенств (9).

Найдем максимальное значение интеграла (7) и воспользуемся утверждением [17].

Утверждение 2. «Если выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{Q(t)}{u_n(t)}\right) = c < \infty\ ,$$

то $J_{\max}$ при заданных моментах, определяемых выражением (6), существует и находится по следующему правилу: если $l = 2v - 1$, то

$$J_{\max} = \sum_{j=1}^{v} p_j Q(\tau_j) + cM, \tag{10}$$

где числа $p_j > 0$ $(j = \overline{1, v})$, $M > 0$, $0 = \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_v < \infty$ определяются из равенств

$$\sum_{j=1}^{v} p_j u_i(\tau_j) = m_i,\ (i = \overline{0, l - 1}). \tag{11}$$

$$\sum_{j=1}^{v} p_j u_i(\tau_j) + M = m_i,\ (i = l). \tag{12}$$

Если $l = 2v - 2$, то максимум интеграла также определяется соотношением (10), числа $p_j > 0$ $(j = \overline{1, v})$, $M > 0$, $0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_v < \infty$ определяются из равенств (11), (12).

Функция $Q(t)$ должна быть непрерывной и иметь неотрицательную $l + 1$-ю производную» [17].

Данные утверждения в работе [18] обобщены на случай кусочно-непрерывных функций $Q(t)$, которые должны на участках непрерывности иметь неотрицательную $l + 1$-ю производную, что соответствует рассматриваемой задаче, в которой подинтегральная функция $fs(t)$, определяемая соотношениями (4), является кусочно-непрерывной и имеет на участках непрерывности неотрицательную $l + 1$-ю производную.

Данные утверждения использованы в работах авторов для решения различных оптимизационных задач в условиях неполной информации, представленной малыми выборками случайных величин [19–22].

Численный пример

Пусть известны данные по моментам случайной величины y соответственно m_1, m_2, m_3, положим $x = 1$. Найдем нижние оценки моментов случайной величины

$$b = \left(\left(ent\left(\frac{y}{s}\right) + 1\right)\right)^j.$$

Для нахождения нижних оценок моментов случайной величины b запишем уравнения (9) для переменных $p_j > 0$ $(j = 1, 2)$ и $0 < \tau_1 < \tau_2 < \infty$ следующего вида:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ p_1\tau_1 + p_2\tau_2 = m_1, \\ p_1\tau_1^2 + p_2\tau_2^2 = m_2, \\ p_1\tau_1^3 + p_2\tau_2^3 = m_3. \end{cases} \tag{13}$$

Тогда минимальное значение функционала (соотношение (8)) будет равно:

$$m_{jb\min} = p_1 fs(\tau_1) + p_2 fs(\tau_2),\ j = 1, 2, 3.$$

Величины нижних оценок моментов случайной величины b при различных исходных значениях моментов m_1, m_2, m_3 приведены в таблице. При $x = 1$ имеет место равенство $m_{jb\min} = m_{ja\min}$. Оценки моментов найдем из решения системы нелинейных уравнений (13) с помощью программы Excel[1]. В качестве оптимизируемой функции рассмотрим функцию $CF = p_1 + p_2 - 1$ соответствующую первому уравнению системы уравнений (13). Минимальное значение этой целевой функции должно быть равно 0, остальные уравнения — ограничения в оптимизационной задаче.

[1] Пункт «Поиск решения», подпункт «Поиск решения нелинейных задач методом ОПГ (ОПГ — обобщенный приведенный градиент).

Таблица. Нижние оценки моментов

Table. Lower bounds for the moments

m_1	m_2	m_3	$m_{1b\min}$	$m_{2b\min}$	$m_{3b\min}$
5	50	750	5,191	55,131	877,122
7	98	2058	7,782	105,692	2131,174
8	128	3072	8,368	136,153	3321,492
9	162	4374	9,661	171,463	4547,158
10	190	5500	10,706	200,949	5690,859
11	240	6100	11,952	262,522	6847,336

Полученные оценки моментов могут быть использованы для решения различных задач оптимизации квантования. Например, задача оптимизации кванта может быть сформулирована следующим образом: найти x такое, что $x = \operatorname{argmin}\,((x + c)m(1b\min))$.

Пусть известны данные по моментам случайной величины y соответственно $m_1 = 120h$, $m_2 = 14800h$, $c = 5h$, которые соответствуют результатам работы [13]. Найдем нижние оценки моментов случайной величины b.

Для нахождения нижних оценок моментов случайной величины β запишем уравнения (9) для переменных $p_j > 0$ ($j = 1, 2$) и $0 = \tau_1 < \tau_2 < \infty$ следующего вида:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1, \\ p_2\tau_2 = m_1, \\ p_2\tau_2^2 = m_2. \end{cases} \tag{14}$$

Тогда минимальное значение первого момента (соотношение (8)) будет равно:

$$m_{1\beta\min} = p_1 fs(\tau_1) + p_2 fs(\tau_2).$$

Выполним преобразования соотношения (14) и получим следующее соотношение для нахождения оптимального кванта

$$m_{1\beta\min} = \min_x \left(\left(ent\left(\frac{m_2}{(x+c)m_1}\right)\frac{m_1^2}{m_2} + \left(1 - \frac{m_1^2}{m_2}\right)\right)(x+c)\right).$$

Последняя задача — задача одномерного нелинейного программирования, которая решается численно. При имеющихся исходных данных получаем

$$x_{\text{опт}} = 37h,\ m_{1b\min} = 82{,}864h.$$

Заключение

Предложена модель оценки моментов квантованной случайной величины в условиях неполных данных, представленных ограниченными малыми выборками квантуемой случайной величины. На основе имеющихся выборок квантуемой случайной величины получены ее моменты и решена для общего случая задача нахождения нижних и верхних оценок моментов случайной квантованной величины с использованием результатов решения проблемы моментов Маркова. Приведены примеры нахождения соответствующих оценок моментов случайной квантованной величины, показана возможность использования оценок моментов квантованной случайной величины в задачах оптимизации квантования.

Литература

1. Рожков Н.Ф. Методы преобразования сигналов и помехоустойчивое кодирование. Омск: Изд-во ОмГТУ, 2003. 107 с.
2. Орлов Ю.Н. Основы квантования вырожденных динамических систем. М.: МФТИ, 2004. 236 с.
3. Hering J.G. From slide rule to big data: how data science is changing water science and engineering // Journal of Environmental Engineering. 2019. V. 145. N 8. P. 02519001. https://doi.org/10.1061/(asce)ee.1943-7870.0001578
4. An T. Science opportunities and challenges associated with SKA big data // Science China Physics, Mechanics and Astronomy. 2019. V. 62. N 8. P. 989531. https://doi.org/10.1007/s11433-018-9360-x
5. Саванов В.Л. Влияние квантования на точность вычисления моментов случайных величин // Автоматика и телемеханика. 1972. № 10. С. 74–81.
6. Грицутенко С.С., Степанова Е.А. Оптимальное квантование случайной величины // Техника радиосвязи. 2011. № 16. С. 55–59.
7. Зачатейский Е.Д., Лаврухин А.А. Анализ и моделирование оптимизационных алгоритмов квантования сигналов для информационных систем // Известия Транссиба. Информационные технологии, автоматика, связь, телекоммуникации. 2013. № 2(14). С. 84–90.
8. Аверина Т.А. Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайным периодом квантования //

References

1. Rozhkov N.F. *Signal Conversion Methods and Noise-Immunity Coding*. Omsk, Omsk State Technical University Publ., 2003, 107 p. (in Russian)
2. Orlov Iu.N. *Basics of Quantization of Degenerate Dynamical Systems*. Moscow, MIPT Publ., 2004, 236 p. (in Russian)
3. Hering J.G. From slide rule to big data: how data science is changing water science and engineering. *Journal of Environmental Engineering*, 2019, vol. 145, no. 8, pp. 02519001. https://doi.org/10.1061/(asce)ee.1943-7870.0001578
4. An T. Science opportunities and challenges associated with SKA big data. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, 2019, vol. 62, no. 8, pp. 989531. https://doi.org/10.1007/s11433-018-9360-x
5. Savanov V.L. Effect of quantization on random values moments calculation accuracy. *Automation and Remote Control*, 1972, vol. 3, no. 10, pp. 1626–1632.
6. Grizutenko S.S., Stepanova E.A. An optimum quantification of a random value. *Tehnika radiosvjazi*, 2011, no. 16, pp. 55–59. (in Russian)
7. Zachateyskiy E.D., Lavruhin A.A. Analysis and simulation of an optimization algorithm for signals quantization. *Journal of Transsib Railway Studies*, 2013, no. 2(14), pp. 84–90. (in Russian)
8. Averina T.A. Modified algorithm of statistical modeling of systems with a random quantization period. *Vestnik Saratovskogo*

Вестник Саратовского государственного технического университета. 2011. Т. 4. № 4(62). С. 212–218.
9. Андронов А.М., Бокоев Т.И. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации // Известия АН СССР. Сер. Техническая кибернетика. 1979. № 3. С. 154–158.
10. Смагин В.А., Парамонов И.Ю. Модель оптимального вероятностного квантования информации в пространстве с гарантированным ограничением зон влияния объемных квантов // Известия вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59. № 1. С. 32–37. https://doi.org/10.17586/0021-3454-2016-59-1-32-37
11. Смагин В.А., Бубнов В.П. Математическая модель детерминированных и случайных процессов в виде последовательного гиперфрактального распределения // Автоматика на транспорте. 2019. Т. 5. № 2. С. 148–159. https://doi.org/10.20295/2412-9186-2019-5-2-145-159
12. Смагин В.А., Бубнов В.П. Оптимальное в смысле заполнения квантование информации при наличии ошибок в квантах // Информация и космос. 2021. № 1. С. 40–48.
13. Смагин В.А., Бубнов В.П., Султонов Ш.Х. Математические модели для расчета количественных характеристик оптимального квантования информации // Транспортные системы и технологии. 2021. Т. 7. № 1. С. 46–58. https://doi.org/10.17816/transsyst20217146-58
14. Орлов А.И. Асимптотика квантования и выбор числа градаций в социологических анкетах // Математические методы и модели в социологии. М.: ИСИ АН СССР, 1977. С. 42–55.
15. Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 432 с.
16. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
17. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи: Идеи и проблемы П.Л. Чебышева и А.А. Маркова и их дальнейшее развитие. М.: Наука, 1973. 551 с.
18. Каштанов В.А. О минимаксных стратегиях при ограничениях на моменты распределений // Основные вопросы теории и практики надежности. М.: Советское радио, 1980. С. 143–154.
19. Lomakin M., Buryi A., Dokukin A., Strekha A., Niyazova J., Balvanovich A. Estimation of quality indicators based on sequential measurements analysis // International Journal for Quality Research. 2020. V. 40. N 1. P. 147–162. https://doi.org/10.24874/ijqr14.01-10
20. Ломакин М.И., Сухов А.В., Докукин А.В., Ниязова Ю.М. Оценка показателей надежности космических аппаратов в условиях неполных данных // Космические исследования. 2021. Т. 59. № 3. С. 235–239. https://doi.org/10.31857/S0023420621030080
21. Buryi A.S., Lomakin M.I., Sukhov A.V. Quality assessment of “stress-strength” models in the conditions of big data // International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering. 2020. V. 9. N 3. P. 3276–3281. https://doi.org/10.35940/ijitee.c8982.019320
22. Ломакин М.И., Ниязова Ю.М., Докукин А.В., Злыднев М.И., Гарин А.В. Оценка качества бизнес-процессов предприятия в условиях неполных данных // Сварочное производство. 2022. № 4. С. 52–58. https://doi.org/10.34641/SP.2022.1049.4.030

gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta, 2011, vol. 4, no. 4(62), pp. 212–218. (in Russian)
9. Andronov A.M., Bokoev T.I. Optimal quantization of information in the sense of filling. *Izvestija AN SSSR. Ser. Tehnicheskaja kibernetika*, 1979, no. 3, pp. 154–158. (in Russian)
10. Smagin V.A., Paramonov I.Yu. Model of optimal probabilistic quantization of information in the space with guaranteed restriction of volume quantum influence zone. *Journal of Instrument Engineering*, 2016, vol. 59, no. 1, pp. 32–37. (in Russian). https://doi.org/10.17586/0021-3454-2016-59-1-32-37
11. Smagin V.A., Bubnov V.P. Mathematical model of determinated and random processes in the form of consistent hyperfractal distribution. *Transport automation research*, 2019, vol. 5, no. 2, pp. 148–159. (in Russian). https://doi.org/10.20295/2412-9186-2019-5-2-145-159
12. Smagin V.A., Bubnov V.P. Optimum in sense of filling quantization of the information in the presence of errors in quanta. *Information and Space*, 2021, no. 1, pp. 40–48. (in Russian)
13. Smagin V.A., Bubnov V.P., Sultonov S.K. Mathematical models for calculating the quantitative characteristics of the optimal quantization of information. *Modern Transportation Systems and Technologies*, 2021, vol. 7, no. 1, pp. 46–58. (in Russian). https://doi.org/10.17816/transsyst20217146-58
14. Orlov A.I. Asymptotics of quantization and the number of gradations choice in sociological questionnaires. *Mathematical Methods and Models in Sociology, Moscow, Institute of Philosophy of the USSR Academy of Science*, 1977, pp. 42–55. (in Russian)
15. Borovkov A.A. *Probability Theory*. Moscow, Nauka’ Publ., 1986, 432 p. (in Russian)
16. Levin B.R., Shvartc V. *Probabilistic Models and Methods in Communication and Control Systems*. Moscow, Radio i svjaz’ Publ., 1985, 312 p. (in Russian)
17. Krein M.G., Nudelman A.A. *The Markov Moment Problem and Extremum Problems: Ideas and Problems of P.L. Chebyshev and A.A. Markov and their Further Development*. Moscow, Nauka Publ., 1973, 551 p. (in Russian)
18. Kashtanov V.A. On minimax strategies under restrictions on distribution moments. *Basic Questions of the Reliability Theory and Practice*, Moscow, Sovetskoe radio Publ., 1980, pp. 143–154. (in Russian)
19. Lomakin M., Buryi A., Dokukin A., Strekha A., Niyazova J., Balvanovich A. Estimation of quality indicators based on sequential measurements analysis. *International Journal for Quality Research*, 2020, vol. 40, no. 1, pp. 147–162. https://doi.org/10.24874/ijqr14.01-10
20. Lomakin M.I., Sukhov A.V., Dokukin A.V., Niyazova Y.M. Assessment of reliability indicators of space vehicles under conditions of incomplete data. *Cosmic Research*, 2021, vol. 59, no. 3, pp. 199–203. https://doi.org/10.1134/S0010952521030072
21. Buryi A.S., Lomakin M.I., Sukhov A.V. Quality assessment of “stress-strength” models in the conditions of big data. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 2020, vol. 9, no. 3, pp. 3276–3281. https://doi.org/10.35940/ijitee.c8982.019320
22. Lomakin M.I., Niyazova YU.M., Dokukin A.V., Zlydnev M.I., Garin A.V. Evaluation of the quality of business processes of an enterprise in conditions of incomplete data. *Svarochnoe proizvodstvo*, 2022, no. 4, pp. 52–58. (in Russian). https://doi.org/10.34641/SP.2022.1049.4.030

Авторы

Ломакин Михаил Иванович — доктор технических наук, доктор экономических наук, профессор, главный научный сотрудник, Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, Москва, 121352, Российская Федерация, sc 7003352786, https://orcid.org/0000-0003-4191-1348, mlomakin@yandex.ru

Докукин Александр Владимирович — доктор экономических наук, главный научный сотрудник, Всероссийский научно-исследовательский институт по проблемам гражданской обороны и чрезвычайных ситуаций МЧС России, Москва, 121352, Российская Федерация, sc 56161047500, https://orcid.org/0000-0002-3342-8770, aldokukin@yandex.ru

Authors

Mikhail I. Lomakin — D.Sc. (Engineering), D.Sc. (Economics), Chief Researcher, All-Russian Scietific Reserch Institute for Civil Defence and Emergencies of the EMERCOM of Russia, Moscow, 121352, Russian Federation, sc 7003352786, https://orcid.org/0000-0003-4191-1348, mlomakin@yandex.ru

Alexander V. Dokukin — D.Sc. (Economics), Chief Researcher, All-Russian Scietific Reserch Institute for Civil Defence and Emergencies of the EMERCOM of Russia, Moscow, 121352, Russian Federation, sc 56161047500, https://orcid.org/0000-0002-3342-8770, aldokukin@yandex.ru

Статья поступила в редакцию 20.02.2023
Одобрена после рецензирования 25.04.2023
Принята к печати 31.05.2023

Received 20.02.2023
Approved after reviewing 25.04.2023
Accepted 31.05.2023