

УДК 62-50

ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ε -ИНВАРИАНТНОСТИ ВЫХОДА СИСТЕМЫ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

С.А. Александрова, А.А. Мусаев, О.В. Слита, А.В. Ушаков

Ставится задача обеспечения параметрической ε -инвариантности выхода непрерывной системы при неопределенности матрицы состояния исходного объекта. Задача решается для случая матрицы состояния объекта, заданной в сопровождающей форме, для которой оказываются невыполнимыми условия достижения абсолютной параметрической инвариантности. Результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: неопределенность задания матрицы, сопровождающая форма, параметрическая ε -инвариантность, собственные значения и векторы.

Введение

Современные методы анализа и синтеза динамических систем позволяют решать задачи управления ими в условиях системных неопределенностей задания модели объекта [1–5]. Одной из постановочных версий управления в условиях неопределенности является задача обеспечения инвариантности выхода системы к неопределенности параметров модели исходного объекта [4, 5] или параметрической инвариантности.

В работе приводятся алгебраические условия достижимости абсолютной параметрической инвариантности [2, 4, 5] и делается переход к ситуации, когда полученные алгебраические условия оказываются невыполнимыми, что явилось мотивацией к постановке задачи обеспечения ε -инвариантности выхода системы с заданной оценкой величины ε .

Алгебраические условия обеспечения абсолютной параметрической инвариантности выхода системы

Рассматривается непрерывный объект управления (ОУ)

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \quad \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{x} \in R^n$, $\mathbf{u} \in R^r$, $\mathbf{y} \in R^m$; \mathbf{x} , \mathbf{u} , \mathbf{y} – векторы состояния, управления и выхода $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in R^{n \times r}$, $\mathbf{C} \in R^{m \times n}$, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} – матрицы состояния, управления и выхода, при этом (\mathbf{A}, \mathbf{B}) и (\mathbf{A}, \mathbf{C}) образуют соответственно управляемую и наблюдаемую пары; $\Delta\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ – неопределенность задания матрицы состояния.

Закон управления (ЗУ) объектом (1) формируется в виде

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{K}_g \mathbf{g}(t) - \mathbf{K}\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

где $\mathbf{g}(t)$ – задающее воздействие, матрица \mathbf{K} с использованием метода модального управления [6] находится с помощью системы уравнений

$$\mathbf{M}\mathbf{A} - \mathbf{A}\mathbf{M} = -\mathbf{B}\mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}\mathbf{M}^{-1},$$

в которых наблюдаемая пара матриц (\mathbf{A}, \mathbf{H}) модальной модели задает желаемые динамические свойства системы (путем назначения структуры собственных чисел диагональной матрицы \mathbf{A}). Следует отметить, что если известны матрицы $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{H}$, то уравнение (3) решается относительно матрицы \mathbf{M} , а если известны $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{M}$, то уравнение (3) решается относительно матрицы \mathbf{H} в форме

$$\mathbf{H} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T (\mathbf{A}\mathbf{M} - \mathbf{M}\mathbf{A}).$$

Замкнутая система, образованная ОУ (1) и ЗУ (2), записывается как

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t) + \mathbf{G}\mathbf{g}(t) + \Delta\mathbf{F}\mathbf{x}(t); \quad \mathbf{x}(0); \quad (4)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t);$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{B}\mathbf{K}_g, \quad \Delta\mathbf{F} = \Delta\mathbf{A}.$$

ЗУ (2) должен обеспечивать желаемые показатели качества замкнутой системы при наличии в исходном объекте параметрической неопределенности, т.е. параметрическую инвариантность ее выхода. Для целей дальнейших исследований представим сигнальный компонент $\Delta\mathbf{F}\mathbf{x}(t)$ в декомпозированной форме:

$$\Delta \mathbf{F} \mathbf{x}(t) = \Delta \mathbf{A} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_{11} & \Delta A_{12} & \dots & \Delta A_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_{21} & \Delta A_{22} & \dots & \Delta A_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta A_{n1} & \Delta A_{n2} & \dots & \Delta A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\eta}(t). \quad (5)$$

Вектор параметрического воздействия $\boldsymbol{\eta}(t)$ сформирован на правых мультипликативных компонентах элементов разложения $\Delta \mathbf{F} \mathbf{x}(t)$ в форме (5) в силу представления

$$\boldsymbol{\eta}(t) = \text{col} \left\{ \boldsymbol{\eta}_j = \begin{bmatrix} \Delta A_{j1} & \Delta A_{j2} & \dots & \Delta A_{jn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = (\Delta A)^j x(t) = h_j^T x(t) \right\}, \quad (6)$$

где $(\Delta A)^j - j$ -ая строка матрицы $\Delta \mathbf{A}$. На левых сомножителях слагаемых этого выражения сформируем матрицу параметрического воздействия $\mathbf{D} = \text{row} \left\{ \mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} 0_{(j-1) \times 1} & 1 & 0_{(n-j) \times 1} \end{bmatrix}; j = \overline{1, n} \right\}$.

С использованием (6) запишем уравнение (4) системы в виде

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{F} \mathbf{x}(t) + \mathbf{G} \mathbf{g}(t) + \mathbf{D} \boldsymbol{\eta}(t); \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t). \quad (7)$$

Представление (7) системы (4) позволяет переформулировать задачу обеспечения абсолютной параметрической инвариантности $\mathbf{y}(t, \mathbf{F}, \mathbf{g}(t), \Delta \mathbf{A} \neq 0) = \mathbf{y}(t, \mathbf{F}, \mathbf{g}(t), \Delta \mathbf{A} \equiv 0)$ как задачу обеспечения сигнальной инвариантности [4, 7]

$$\mathbf{y}(t, \mathbf{F}, \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\eta}(t) \neq 0) = \mathbf{y}(t, \mathbf{F}, \mathbf{g}(t), \boldsymbol{\eta}(t) \equiv 0). \quad (8)$$

Запишем выражение (8) в терминах преобразований Лапласа и передаточных функций (матриц)

$$Y(s, \mathbf{g}(s), \boldsymbol{\eta}(s) \neq 0) = \Phi_{y\mathbf{g}}(s) \mathbf{g}(s) + \Phi_{y\boldsymbol{\eta}}(s) \boldsymbol{\eta}(s) = \Phi_{y\mathbf{g}}(s) \mathbf{g}(s), \quad (9)$$

где $\mathbf{g}(s)$ – Лапласов образ задающего воздействия $\mathbf{g}(t)$; $\boldsymbol{\eta}(s)$ – Лапласов образ «параметрического» воздействия $\boldsymbol{\eta}(t)$; $\Phi_{y\mathbf{g}}(s)$ – передаточная функция (матрица) отношения «задающее воздействие–выход системы»; $\Phi_{y\boldsymbol{\eta}}(s)$ – передаточная функция (матрица) отношения «параметрическое» воздействие–выход системы». Очевидно, что равенство (9) при $\boldsymbol{\eta}(s) \neq 0$ выполняется, когда

$$\Phi_{y\boldsymbol{\eta}}(s) = 0. \quad (10)$$

Соотношение (10) представляет собой «сигнальный» аналог инвариантности выхода (ошибки) к неопределенностям задания матрицы состояния исходного объекта, которое выполняется при любых реализациях внешнего задающего воздействия $\mathbf{g}(t)$. Приведем утверждение, одно из положений которого базируется на структуре собственных векторов [8] матрицы состояния проектируемой системы.

Утверждение 1. [3, 5]. Для того чтобы система (4) обладала абсолютной параметрической инвариантностью выхода к неопределенности задания матрицы исходного объекта или чтобы система (10) обладала сигнальной инвариантностью выхода относительно внешнего «параметрического» воздействия $\boldsymbol{\eta}(t)$ в смысле условий (8), (9), т.е. чтобы передаточная функция (матрица) «параметрический» вход $\boldsymbol{\eta}$ – выход системы $\mathbf{y} \gg \Phi_{y\boldsymbol{\eta}}(s)$ была бы нулевой и выполнялось равенство (10),

$$\Phi_{y\boldsymbol{\eta}}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{D} = \text{row} \left\{ \Phi_{y\boldsymbol{\eta}_j} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1} \mathbf{D}_j; j = \overline{1, p}; 1 \leq p \leq n \right\} = 0,$$

достаточно, чтобы

1. столбцы \mathbf{D}_j матрицы \mathbf{D} были собственными векторами матрицы \mathbf{F} ;
2. столбцы \mathbf{D}_j принадлежали ядру матрицы \mathbf{C} , т.е. чтобы выполнялось соотношение $\mathbf{C} \mathbf{D}_j = 0$.

Проблема параметрической ε -инвариантности

Проблема параметрической ε -инвариантности возникает в случае, когда невозможно достижение абсолютной параметрической инвариантности, т.е. когда не выполняется какое-либо из условий утверждения 1. Проиллюстрируем эту ситуацию [9] на примере объекта управления, заданного в сопровождающем управляемом базисе

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix}, \mathbf{C} = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (11)$$

В этом случае любые системные неопределенности $\Delta\mathbf{A}$ возмущают только последнюю строчку матрицы состояния, и

$$\Delta\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \Delta a_0 & \Delta a_1 & \Delta a_2 & \dots & \Delta a_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot [\Delta a_0 \ \Delta a_1 \ \Delta a_2 \ \dots \ \Delta a_{n-1}],$$

откуда для матрицы \mathbf{D} получаем представление в виде матрицы-столбца

$$\mathbf{D} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]^T. \quad (12)$$

В силу канонической сопровождающей формы задания матрицы \mathbf{A} и вида матрицы \mathbf{B} (11) ЗУ (2) сохраняет каноническую сопровождающую форму матрицы состояния \mathbf{F} системы [9], которая имеет собственные вектора ξ_i , формируемые по схеме Вандермонда:

$$\xi_i = [1 \ \lambda_i \ \lambda_i^2 \ \dots \ \lambda_i^{n-1}]^T; (i = \overline{1, n}). \quad (13)$$

Как видно из структуры (13) собственных векторов, матрица-столбец \mathbf{D} (12) не совпадает ни с одним из собственных векторов \mathbf{F} . Таким образом, при представлении матрицы состояния в форме (11) первое условие утверждения 1 выполнено не будет. Следовательно, абсолютная параметрическая инвариантность выхода для случая матрицы состояния, заданной в сопровождающей форме, недостижима. В этом случае следует перейти к обеспечению ε -инвариантности выхода проектируемой системы.

Оценка $\hat{\varepsilon}$ величины параметрической ε -инвариантности

Задачу формирования оценки $\hat{\varepsilon}$ величины параметрической ε -инвариантности решим в два этапа.

Этап 1. Модификация представления собственных векторов, построенных по схеме Вандермонда; им придается вид

$$\xi_i = [(\lambda_i^{n-1})^{-1} \ \dots \ (\lambda_i^2)^{-1} \ (\lambda_i)^{-1} \ 1]^T; (i = \overline{1, n}).$$

Этап 2. Представление матрицы-столбца \mathbf{D} (12) в виде проекции на собственный вектор ξ_1 в форме $\alpha\xi_1 = \mathbf{D}$, в которой коэффициент α ищется с помощью алгоритма Грама [10] из условия

$$\alpha = \frac{(\xi_1, \mathbf{D})}{(\xi_1, \xi_1)} = \frac{\xi_1^T \mathbf{D}}{\xi_1^T \xi_1} = \frac{1}{1 + (\lambda_1^{-1})^2 + \dots + (\lambda_1^{-(n-1)})^2}.$$

Определим оценку $\hat{\varepsilon}$ на основе нормы невязки представления матрицы-столбца \mathbf{D} его проекцией $\hat{\mathbf{D}}(\lambda_1) = \alpha\xi_1$ на вектор ξ_1 в форме

$$\hat{\varepsilon}(\lambda_1) = \left\{ \frac{\|\mathbf{D} - \hat{\mathbf{D}}(\lambda_1)\|}{\|\mathbf{D}\|} \right\} \cdot 100\%.$$

Пример

В качестве ОУ рассмотрим электропривод, исполнительный двигатель которого обладает механической характеристикой, содержащей восходящий участок [11]. Представление ОУ в виде (1) характеризуется матрицами $\mathbf{A} + [\Delta\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & [-3, 5; 0, 5] \end{bmatrix}$ с медианной составляющей $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1, 5 \end{bmatrix}$ и интервальной

$$[\Delta\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [-2; 2] \end{bmatrix}, \mathbf{B} = [0 \ 1]^T, \mathbf{C} = [1 \ 0].$$

Зададим требования к переходному процессу в виде его длительности $t_{\text{ин}} = 2, 4$ с и величины перерегулирования $\sigma = 0\%$ в системе, в которую войдет объект. Синтезируем закон модального управле-

ния для номинального ОУ на основе биномиальной модальной модели, в которой $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$. Тогда

$$\mathbf{K} = [5,25 \quad 5,875], \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_g = 6,25, \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Результаты моделирования, представленные кривыми ошибки воспроизведения задающего воздействия $g(t) = t$ при медианном и двух угловых реализациях параметров ОУ ($\underline{e}(t)$, $\bar{e}(t)$ – значения ошибки $e(t)$, соответствующие угловым значениям интервальной матрицы состояния), показывают (рисунок, а), что выход системы не обладает абсолютной параметрической инвариантностью, а параметрическая ε -инвариантность характеризуется заметной величиной ε .

Синтезируем закон модального управления, задавая значения λ_1 : $\lambda_1 = -10$, $\lambda_1 = -50$, $\lambda_1 = -100$.

Результаты моделирования представлены на рисунке, б ($\lambda_1 = -10$), рисунке, в ($\lambda_1 = -50$) и рисунке, г ($\lambda_1 = -100$), каждый из которых получен при медианных и двух угловых реализациях параметров исходного ОУ. Ни в одном из случаев не достигается абсолютная параметрическая инвариантность, но наблюдается заметное уменьшение величины ε параметрической инвариантности по мере уменьшения величины $\hat{\varepsilon}$ невязки аппроксимации вектора \mathbf{D} собственным вектором, формируемым по схеме Вандермонда (таблица).

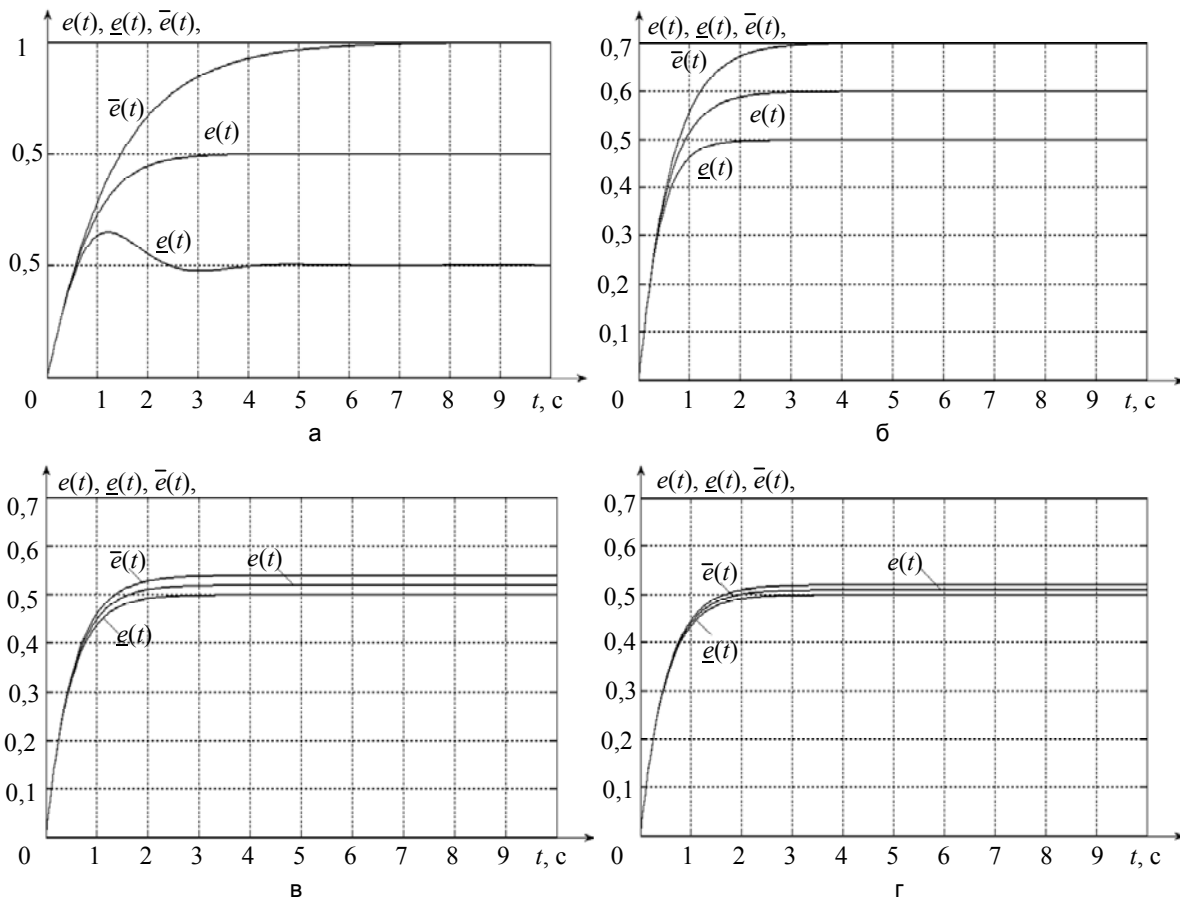


Рисунок. Ошибка по выходу для номинальной и угловых версий системы, спроектированной с помощью модального управления: $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ (а); $\lambda_1 = -10; \lambda_2 = -2$ (б); $\lambda_1 = -50; \lambda_2 = -2$ (в); $\lambda_1 = -100; \lambda_2 = -2$ (г)

Заключение

Показано, что для случая, когда матрица состояния исходного объекта задана в таком базисе, в котором недостижимо первое условие обеспечения абсолютной параметрической инвариантности, задача инвариантности выхода относительно неопределенности задания матрицы состояния объекта может быть решена в форме достижения параметрической ε -инвариантности с заданной ε .

Исследование выполнено при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, соглашение 14. В37.21.0406 «Разработка многофункционального малогабаритного мультиротационного летательного аппарата».

	Матрица состояния спроектированной системы (медианная составляющая)	Собственный вектор	Величина $\hat{\varepsilon}$ невязки представления матрицы-столбца D	Матрица управления спроектированной системы	Величина ε параметрической инвариантности по ошибке
$\lambda_{1,2} = -2$	$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$	$\xi = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{\varepsilon} = 50\%$	$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\varepsilon = 50\%$
$\lambda_1 = -10$ $\lambda_2 = -2$	$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -20 & -12 \end{bmatrix}$	$\xi = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{\varepsilon} = 10\%$	$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 20 \end{bmatrix}$	$\varepsilon = 16\%$
$\lambda_1 = -50$ $\lambda_2 = -2$	$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -100 & -52 \end{bmatrix}$	$\xi = \begin{bmatrix} -0,02 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{\varepsilon} = 5\%$	$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 120 \end{bmatrix}$	$\varepsilon = 3,85\%$
$\lambda_1 = -100$ $\lambda_2 = -2$	$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -200 & -102 \end{bmatrix}$	$\xi = \begin{bmatrix} -0,01 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\hat{\varepsilon} = 1\%$	$G = \begin{bmatrix} 0 \\ 200 \end{bmatrix}$	$\varepsilon = 2\%$

Таблица. Показатели параметрически ε -инвариантных систем

Литература

1. Буков В.Н., Бронников А.М. Условия инвариантности выхода линейных систем // Автоматика и телемеханика. – 2005. – № 2. – С. 23–35.
2. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2002. – 232 с.
3. Ackermann J. Robust control systems with uncertain physical parameters. – London: Springer-Verlag, 1993. – 406 p.
4. Слита О.В., Ушаков А.В. Обеспечение инвариантности выхода непрерывной системы относительно экзогенных сигнальных и эндогенных параметрических возмущений: алгебраический подход // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008 – № 4. – С. 24–32.
5. Слита О.В., Ушаков А.В. Достаточные алгебраические условия параметрической инвариантности выхода линейной стационарной системы в первом приближении // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2010. – № 6. – С. 16–22.
6. Слита О.В., Ушаков А.В. Модальное управление: два способа реализации концепции подобия // Мехатроника, автоматизация, управление. – 2008. – № 9. – С. 7–13.
7. Дударенко Н.А., Полякова М.В., Ушаков А.В. Алгебраическая организация условий обобщенной синхронизируемости многоагрегатных динамических объектов // Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО. – 2010. – № 2 (66). – С. 30–36.
8. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Структура собственных векторов матриц состояния многоканальных систем как вырождающий фактор // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2012. – № 5 (81). – С. 52–58.
9. Слита О.В., Ушаков А.В. Модельное представление объекта управления в задаче параметрической инвариантности // Изв. вузов. Приборостроение. – 2006. – Т. 49. – № 1. – С. 14–20.
10. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973. – 575 с.
11. Ковчин С.А., Сабинин Ю.А. Теория электропривода. – СПб: Энергоатомиздат, 1994. – 496 с.

- Александрова Софья Александровна** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, студент, alexandrova_sophie@mail.ru
- Мусаев Андрей Александрович** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, студент, brein7@mail.ru
- Слита Ольга Валерьевна** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, o-slita@yandex.ru
- Ушаков Анатолий Владимирович** – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-AVG@yandex.ru