

УДК 62.50: 681.5.01

ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ ПРОЦЕССОВ В АПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМАХ, ПОРОЖДАЕМОЙ ФАКТОРОМ КРАТНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

Т.А. Акунов, Н.А. Дударенко, Н.А. Полинова, А.В. Ушаков

Рассматривается устойчивая аperiodическая непрерывная система, матрица состояния которой обладает вещественным спектром кратных собственных чисел, кратность которых равна размерности ее вектора состояния. Показывается, что если модуль собственного числа меньше единицы, то в свободном движении системы по норме вектора состояния обнаруживается колебательность, проявляющаяся в наличии начального выброса, сменяющегося монотонным движением к состоянию покоя. Установлено, что величина выброса тем больше, чем меньше по модулю собственное число и больше его кратность.

Ключевые слова: вещественные собственные числа, кратность, свободное движение, норма, выброс.

Введение. Постановка задачи

Ставится задача исследования свободного движения устойчивой линейной непрерывной многомерной динамической системы по норме вектора ее состояния с целью изучения влияния на это поведение кратности собственных чисел ее матрицы состояния и значения их модуля. В настоящей работе поставленная задача решается для случая вещественных кратных собственных чисел. Более того, предполагается, что кратность собственного числа равна размерности вектора состояния. Как будет показано, приходится констатировать системное явление, состоящее в том, что в аperiodической системе (системе с вещественными собственными числами) при кратности собственных чисел больше единицы и значениях модуля собственных чисел меньших единицы возникает возможность появления заметных выбросов нормы вектора состояния в свободном движении. Обнаруживается, что величина выброса растет с уменьшением модуля собственных чисел и с увеличением их кратности. Более того, появляется возможность «обменивать» модуль собственных чисел на их кратность в классе систем с фиксированным значением выброса. Первоначально задача решается для случая представления матрицы состояния в канонической жордановой форме [1], затем исследования переносятся на произвольный случай.

Аналитическое исследование свободного движения непрерывной многомерной аperiodической системы для случая кратных вещественных собственных значений ее матрицы состояния

Рассмотрим линейную гурвицеву непрерывную многомерную динамическую систему, задаваемую [2, 3] в векторно-матричной форме

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t)|_{t=0} = \mathbf{x}(0), \quad (1)$$

где $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t)$ – вектора соответственно начального и текущего состояний системы; \mathbf{F} – ее матрица состояния; $\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(t) \in R^n; \mathbf{F} \in R^{n \times n}$. Матрица системы \mathbf{F} , заданная в произвольном базисе, такова, что ее характеристический полином $D(\lambda)$ имеет представление

$$D(\lambda) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{F}) = \left\{ (\lambda - \alpha)^n = \lambda^n + \sum_{i=1}^n (-1)^i C_n^i \alpha^i \lambda^{n-i}; \alpha : Jm(\alpha) = 0 \right\}. \quad (2)$$

Такая ситуация может возникнуть, когда при синтезе методами модального управления [3] матрица состояния \mathbf{F} системы задается во фробениусовой форме, сопровождающей характеристический по-

лином $D(\lambda)$, в котором C_n^i – число сочетаний из n по i . Дополним условие (2) наличия в алгебраическом спектре собственных чисел $\sigma\{\mathbf{F}\} = \{\lambda_i = \arg[\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F}) = 0] : \lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\}$ матрицы \mathbf{F} единственного вещественного элемента кратности $\mu = n = \dim(x)$ условием, накладываемым на дефект характеристической матрицы $(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{F})$ [1] матрицы \mathbf{F} , который должен принимать единичное значение.

Тогда [1] каноническая форма матрицы, построенная на спектре $\sigma\{\mathbf{F}\}$ собственных чисел матрицы \mathbf{F} , будет представлять собой $(n \times n)$ -клетку Жордана $\mathbf{J}(\alpha)$ вида

$$\mathbf{J}(\alpha) = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Следует заметить, что матрица в форме Жордана $\mathbf{J}(\alpha)$ порождает автономную динамическую систему вида (1), задаваемую в жордановом каноническом базисе,

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{J}(\alpha)\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{x}}(t)|_{t=0} = \tilde{\mathbf{x}}(0), \quad (4)$$

в которой вектор $\tilde{\mathbf{x}}$ и матрица $\mathbf{J}(\alpha)$ состояния связаны с вектором \mathbf{x} и соответственно с матрицей \mathbf{F} состояния исходной системы (1) векторно-матричными соотношениями

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{S}\mathbf{J}(\alpha) = \mathbf{F}\mathbf{S}. \quad (5)$$

В (5) \mathbf{S} – $(n \times n)$ -матрица неособого преобразования подобия, допускающая представление матрицы \mathbf{F} в форме

$$\mathbf{F} = \mathbf{S}\mathbf{J}(\alpha)\mathbf{S}^{-1}. \quad (6)$$

В свою очередь, жорданова матрица $\mathbf{J}(\alpha)$ в силу (3) может быть представлена в аддитивно декомпозированном виде

$$\mathbf{J}(\alpha) = \text{diag}\{\lambda_i = \alpha; i = \overline{1, n}\} + \mathbf{J}(0) = \alpha\mathbf{I} + \mathbf{J}(0), \quad (7)$$

где $\mathbf{J}(0)$ – нильпотентная матрица [1] индекса $\nu = n$.

Теперь поставим задачу исследования свободного движения системы (4) по вектору ее состояния в скаляризованной форме. Решение системы (4) $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0))$ имеет [1–3] вид

$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t, \tilde{\mathbf{x}}(0)) = \exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\}\tilde{\mathbf{x}}(0). \quad (8)$$

Скаляризацию векторного процесса (8) осуществим на основе использования согласованных [1] векторных и матричных норм, в результате чего на основе (7) получим цепочку соотношений

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \|\exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\}\tilde{\mathbf{x}}(0)\| \leq \|\exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| = e^{\alpha t} \|\exp\{\mathbf{J}(0)t\}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|. \quad (9)$$

В (9) компонент $\exp\{\mathbf{J}(0)t\}$ мультипликативной цепи элементов имеет [1–3] при $\mu = n$ представление

$$\exp\{\mathbf{J}(0)t\} = \exp\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} t \right\} = \begin{bmatrix} 1 & t & (2)^{-1}t^2 & \dots & [(\mu-1)!]^{-1}t^{\mu-1} \\ 0 & 1 & t & \dots & [(\mu-2)!]^{-1}t^{\mu-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Из (10) видно, что столбцовая норма $\|\exp\{\mathbf{J}(0)t\}\|$, определяемая последним столбцом матричной экспоненты $\exp\{\mathbf{J}(0)t\}$, ее строчная норма $\|\exp\{\mathbf{J}(0)t\}\|_{\infty}$, определяемая первой строкой экспоненты, и оценка спектральной нормы $\|\exp\{\mathbf{J}(0)t\}\|_2$, задаваемая [4] мажорирующим неравенством

$$\|\exp\{\mathbf{J}(0)t\}\|_2 \leq \left\{ \|\exp\{\mathbf{J}(0)t\}\|_1 \cdot \|\exp\{\mathbf{J}(0)t\}\|_{\infty} \right\}^{1/2},$$

совпадают и определяются выражением

$$\|\exp\{\mathbf{J}(0)t\}\|_p = 1 + t + (1/2)t^2 + \dots + (1/(\mu-1)!)t^{\mu-1} = \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/k!)t^k, (p = 1, 2, \infty).$$

Таким образом, норма матричной экспоненты $\|\exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\}\|$ удовлетворяет соотношению

$$\|\exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\}\| = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k. \tag{11}$$

Для дальнейших исследований выделим такое $\tilde{\mathbf{x}}(0) = \arg\{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1\}$, для которого выполняется точное равенство

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \|\exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|_{\|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|=1} = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k. \tag{12}$$

Теперь при фиксированной кратности $\mu = n$ собственного числа $\lambda = \alpha$ поставим задачу оценки знака скорости изменения нормы $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ в момент $t = 0$ как синдрома характера развития процессов в системе в функции от областей значений $\lambda = \alpha$. Дифференцированием по времени выражения (12) получим:

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \frac{d}{dt} \left\{ e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k \right\} \Bigg|_{t=0} = \left\{ \alpha e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k + e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/(k!))t^k \right\} \Bigg|_{t=0} = \alpha + 1. \tag{13}$$

Соотношение (13) позволяет сепарировать процессы по их качеству в системе (4) с матрицей состояния в виде жордановой клетки полной размерности по норме вектора состояния в функции от значения кратного собственного числа $\lambda = \alpha$. Ясно, что при любом отрицательном значении $\lambda = \alpha$ и при любой его кратности процессы в системе (4) являются сходящимися, потому что мультипликативный член $e^{\alpha t}$ в выражении (12) для $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ имеет бесконечное число элементов разложения по степеням t , в то время как член $\sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k$ – конечное. Следовательно, всегда найдется такой момент времени $t = t^*$, с которого начинает проявляться доминирование экспоненциального множителя $e^{\alpha t}$. Теперь рассмотрим следующие ситуации.

Ситуация 1. $\alpha < 0, |\alpha| > 1$, $\left\{ \frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \right\} \Bigg|_{t=0} < 0$, процесс $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ сходится к нулю и мажорируется экспонентой в форме $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq e^{(\alpha+1)t} \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|$.

Ситуация 2. $\alpha = -1$, $\left\{ \frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \right\} \Bigg|_{t=0} = 0$, начальная скорость нулевая, но при $t > 0$ в силу (13) устанавливается отрицательная скорость, определяемая выражением

$$\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \left\{ \alpha e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!))t^k + e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/(k!))t^k \right\} \Bigg|_{\alpha=-1} = -(1/(\mu-1)!)e^{-t}t^{(\mu-1)}. \tag{14}$$

Скорость изменения нормы $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ на траекториях системы характеризуется экстремумом, наблюдаемым в момент t_m , определяемым в силу (14) соотношениями

$$t_m = \arg \left\{ \frac{d^2}{dt^2}\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = 0 \right\} = \arg \left\{ \frac{d}{dt}(e^{-t}t^{(\mu-1)}) = 0 \right\} = \mu - 1,$$

при этом скорость изменения нормы $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$, будучи отрицательной, равна величине

$$\max_t \left(\frac{d}{dt}\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \right) = -\frac{(\mu-1)^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!} e^{-(\mu-1)}.$$

Процесс $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ сходится к нулю в силу представления (12). Процесс мажорируется экспоненциальной функцией, т.е. выполняется неравенство

$$\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq \rho e^{\gamma t} \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|,$$

в котором параметры (ρ, γ) определяются из условия

$$(\rho, \gamma) = \arg \left\{ \min_{\rho, \gamma} \left\{ \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| - \rho e^{\gamma t} \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\| \right\} \& \left(\frac{d}{dt}(\rho e^{\gamma t} \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|) \right) \Bigg|_{t=(\mu-1)} = -\frac{(\mu-1)^{(\mu-1)}}{(\mu-1)!} e^{-(\mu-1)} \& \rho \geq 1 \right\}.$$

Ситуация 3 (предмет статьи). $\alpha < 0, |\alpha| < 1, \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \right\}_{t=0} > 0$. Процесс $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ на начальном отрезке времени расходуется, достигая максимума в момент t_M , определяемый соотношениями

$$t_M = \arg \left\{ \frac{d}{dt} \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = 0 \right\} = \arg \left\{ (1 + \alpha) \sum_{k=0}^{\mu-2} (1/k!) t^k + \alpha (1/(\mu-1)!) t^{(\mu-1)} = 0 \right\}, \quad (15)$$

а далее сходится к нулю. Таким образом, процесс $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ на траекториях свободного движения аperiodической системы обнаруживает выброс, численно определяемый величиной α ($\alpha < 0, |\alpha| < 1$) кратного собственного числа и значением μ его кратности. Очевидно свойство процесса $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$: чем меньше величина $|\alpha| < 1$ и чем больше его кратность μ , тем больше величина его выброса над уровнем $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$. Для иллюстрации этого результата произведем вычисление момента t_M с помощью (15) и выброса в кривой $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ аperiodической системы для момента $t = t_M$ в силу соотношения (12) для различных значений α ($\alpha < 0, |\alpha| < 1$) и кратностей μ . Результаты вычислений приведены в табл. 1, 2.

μ	2	3	4	5	10
α	t_M				
-0,2	4	8,9	13,9	18,8	43,8
-0,02	49	99	149	199	449

Таблица 1. Значения моментов выброса в кривой $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$

μ	2	3	4	5	10
α	$\max_t (\ \tilde{\mathbf{x}}(t)\) = \ \tilde{\mathbf{x}}(t_M)\ $				
-0,2	2,25	8,35	34,7	151,6	$3,32 \cdot 10^5$
-0,02	18,8	690,4	$2,86 \cdot 10^4$	$1,25 \cdot 10^6$	$2,72 \cdot 10^{14}$

Таблица 2. Значения выбросов $\max_t (\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|) = \|\tilde{\mathbf{x}}(t_M)\|$ кривой $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$

Вернемся теперь к исходной системе (1) с матрицей состояния \mathbf{F} , заданной в произвольном базисе. По аналогии с (8) с использованием (6) можно записать:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}(0)) = \exp\{\mathbf{F}t\} \mathbf{x}(0) = \mathbf{S} \exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}(0). \quad (16)$$

Если в (16) перейти к скаляризованным векторным процессам по норме вектора состояния системы (1), то получим, с использованием (11), цепочку соотношений

$$\|\mathbf{x}(t)\| = \|\mathbf{S} \exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{x}(0)\| \leq \|\mathbf{S}\| \cdot \|\exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\}\| \cdot \|\mathbf{S}^{-1}\| \cdot \|\mathbf{x}(0)\| = c\{\mathbf{S}\} e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{\mu-1} (1/(k!)) t^k \|\mathbf{x}(0)\|,$$

где $c\{\mathbf{S}\} = \|\mathbf{S}\| \cdot \|\mathbf{S}^{-1}\|$ – число обусловленности матрицы \mathbf{S} , удовлетворяющее [4] условию $1 \leq c\{\mathbf{S}\} < \infty$. Значения $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ будут в $c\{\mathbf{S}\}$ раз превышать значения $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$, сохраняя ту же зависимость от модуля $|\alpha|$ собственного числа $\lambda = \alpha$ и его кратности μ .

Компьютерное исследование свободного движения непрерывной многомерной аperiodической системы для случая кратных вещественных собственных чисел ее матрицы состояния

Компьютерное исследование процессов по норме $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ как функции собственного числа $\lambda = \alpha$ и его кратности $\mu = n$ проводилось в соответствии с соотношением $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| = \|\exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\} \tilde{\mathbf{x}}(0)\| \leq \|\exp\{\mathbf{J}(\alpha)t\}\| \cdot \|\tilde{\mathbf{x}}(0)\|$ по его мажорирующей части в модельной среде пакета MATLAB. Результаты моделирования процессов в форме $\|\tilde{\mathbf{x}}(t)\|$ для единого набора кратностей $\mu = n = 2; 3; 5$ и 10 и значений $\lambda = \alpha = -2; -0,2$ и $-0,02$ представлены на рисунках.

На рис. 1 приведены кривые для случая $\lambda = \alpha = -2$. Процессы $\|\tilde{x}(t)\|$ сходятся монотонно без выбросов (см. ситуацию 1). Кривая 1 соответствует случаю $\mu = n = 2$, а кривая 4 – $\mu = n = 10$.

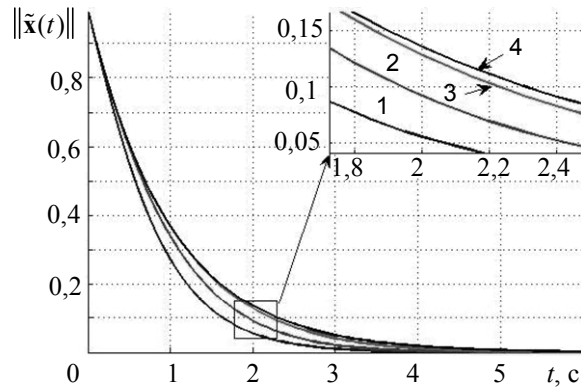


Рис. 1. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -2$; и $\mu = n = 2; 3; 5; 10$ (кривые 1–4 соответственно)

На рис. 2 приведены 4 кривые для случая $\lambda = \alpha = -0,2$. Процессы $\|\tilde{x}(t)\|$ обнаруживают выбросы, нарастающие с увеличением $\mu = n$ (см. ситуацию 3).

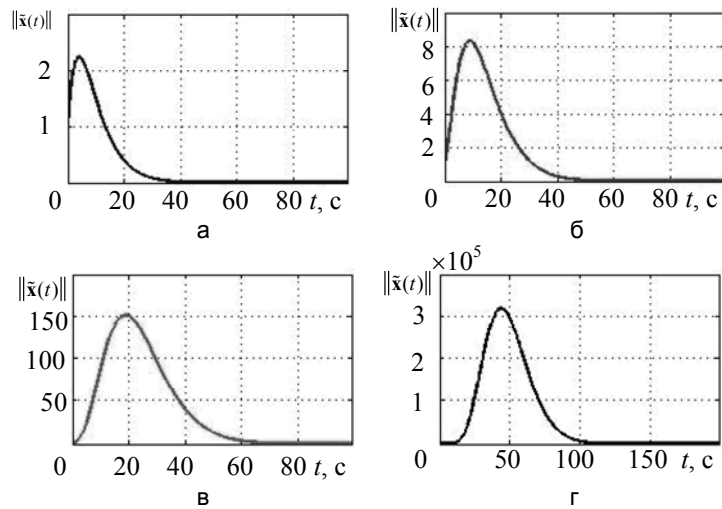


Рис. 2. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -0,2$ и $\mu = n = 2$ (а); 3(б); 5(в) и 10(г)

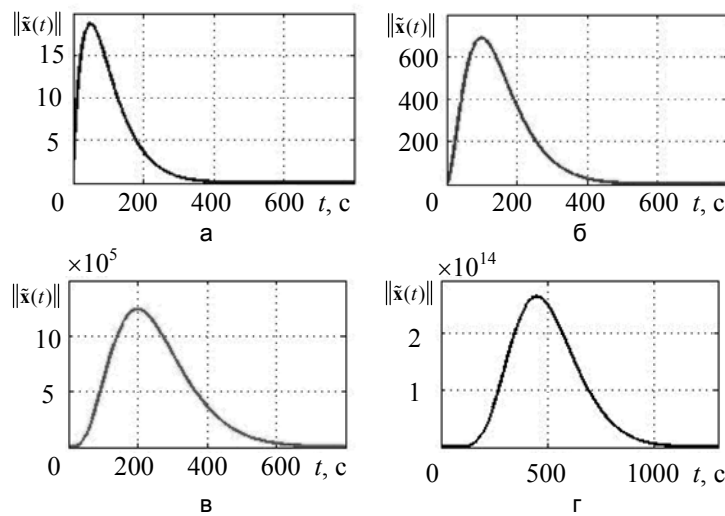


Рис. 3. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ при $\lambda = \alpha = -0,02$ и $\mu = n = 2$ (а); 3(б); 5(в) и 10(г)

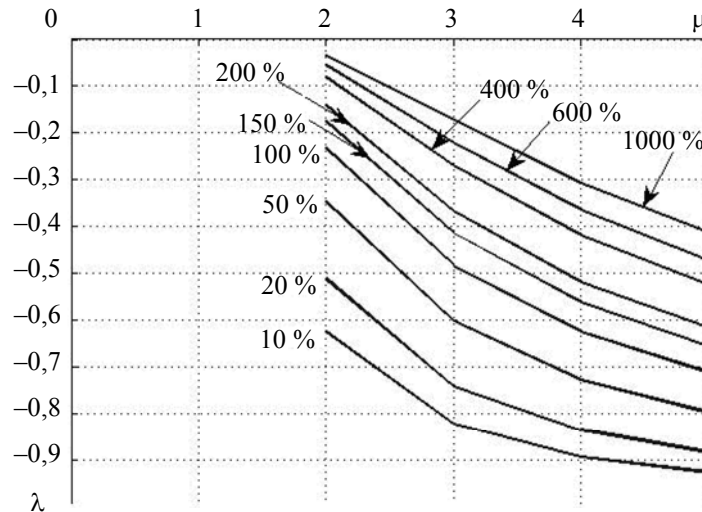


Рис. 4. Кривые постоянных значений $\max_t (\|\tilde{x}(t)\|) = \|\tilde{x}(t_M)\| = \text{const}$

На рис. 3 приведены 4 кривые для случая $\lambda = \alpha = -0,02$. Процессы $\|\tilde{x}(t)\|$ имеют заметные выбросы, нарастающие с увеличением $\mu = n$ (см. ситуацию 3).

На рис. 4 приведены кривые постоянных значений $\max_t (\|\tilde{x}(t)\|) = \|\tilde{x}(t_M)\| = \text{const}$ на плоскости « $\mu - \lambda$ », иллюстрирующие возможность «обмена» кратности на значение кратного собственного числа в решаемой задаче.

На рис. 5 приведены кривые при $\lambda = \alpha = -0,2$ для случая системы (1), в которой матрица F задана в сопровождающей строчной форме, и системы (4). Процессы $\|\tilde{x}(t)\|$ имеют характер кривых $\|\tilde{x}(t)\|$, но в каждый момент в $c\{S\}$ раз превышают их значения.

Завершая рассмотрение влияния фактора кратности собственных чисел на качество процессов в аperiodических системах, следует отметить, что если спектр собственных чисел матрицы F имеет несколько кратных чисел $\sigma\{F\} = \{\lambda_i = \alpha_j : i = \overline{1, \mu_j}; j = \overline{1, q}; \sum_{j=1}^q \mu_j = n\}$, то каноническое представление F в жордановой форме будет содержать q жордановых клеток размерности $(\mu_j \times \mu_j)$ каждая. Для такого случая соотношение (9) принимает вид

$$\|\tilde{x}(t)\| = \left\| \text{diag} \left\{ \exp\{J(\alpha_j)t\}; j = \overline{1, q} \right\} \tilde{x}(0) \right\| \leq e^{\bar{\alpha}t} \left\| \exp\{J_{(\bar{\mu} \times \bar{\mu})}(0)t\} \cdot \|\tilde{x}(0)\| \right\|,$$

где $\bar{\alpha} = \max_j \{\alpha_j : \alpha_j < 0 \& |\alpha_j| < 1; j = \overline{1, q}\}$; $\bar{\mu} = \max_j \{\mu_j; j = \overline{1, q}\}$.

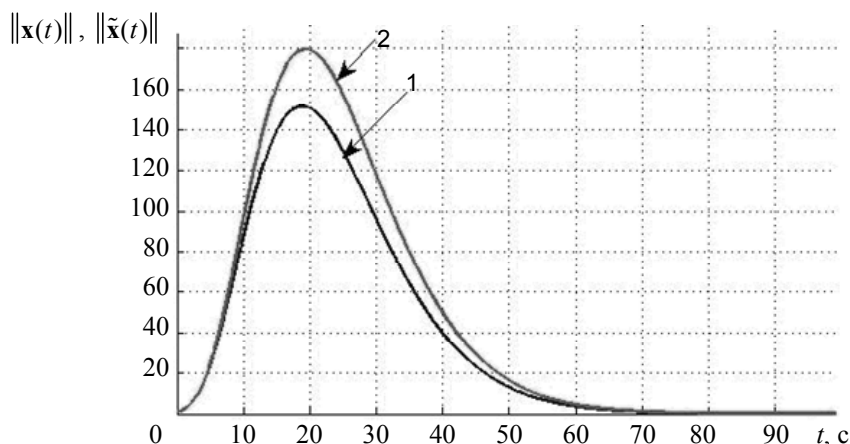


Рис. 5. Кривые процессов $\|\tilde{x}(t)\|$ (кривая 1) и $\|x(t)\|$ (кривая 2) при $\lambda = \alpha = -0,2$ и $\mu = n = 5$

Заключение

Установлено, что кратность собственных чисел матриц состояния устойчивых апериодических непрерывных систем, как и структура их собственных векторов [5], оказывается важным системным фактором, наделяющим динамические процессы в системе весьма специфическими свойствами, которые могут приводить к нежелательным последствиям разрушительного характера. Чтобы не допустить обнаруженного эффекта кратности собственных чисел при синтезе методами модального управления [3], матрицу состояния **F** системы следует наделить спектром собственных чисел, не содержащих кратные элементы.

Работа подготовлена при поддержке проекта 14.В37.21.0406 «Разработка многофункционального малогабаритного мультиротационного летательного аппарата».

Литература

1. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973. – 575 с.
2. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
3. Дударенко Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учебное пособие / Под ред. А.В. Ушакова – СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. – 323 с.
4. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 548 с.
5. Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Структура собственных векторов матриц состояния многоканальных систем как вырождающий фактор // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. – 2012. – № 5 (81). – С. 52–58.

- Акунов Таалайбек Абакирович* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, докторант, takunov@mail.ru
- Дударенко Наталия Александровна* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, dudarenko@yandex.ru
- Полинова Нина Александровна* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, студент, polinova_nina@mail.ru
- Ушаков Анатолий Владимирович* – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, ushakov-AVG@yandex.ru