УДК 629.191
DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-5-391-397

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АПРИОРНОЙ ИНФОРМАЦИИ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ МОДЕЛИ ПОТОКА СОБЫТИЙ В СЛОЖНОЙ СИСТЕМЕ

В. Н. Арсеньев, С. Б. Силантьев, А. А. Ядренкин

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vladar56@mail.ru

Рассматривается задача оценивания параметра распределения Пуассона по результатам теоретических исследований и ограниченных натурных испытаний. Входящий в распределение Пуассона параметр характеризует поток событий в сложной системе и в различных задачах представляет собой либо среднее число случайных событий, происходящих в заданном интервале времени, либо среднее число точек, попадающих в заданную область пространства. Величина этого параметра существенно влияет на стоимость разрабатываемой системы и возможность ее применения по назначению. Получение достаточного объема информации для оценивания этого параметра в процессе испытаний опытных образцов системы не представляется возможным. Необходимо использовать априорную информацию о потоке событий в системе, накопленную до проведения испытаний. Представлено решение задачи оценивания параметра распределения Пуассона путем совместной обработки априорной информации и ограниченных опытных данных.

Ключевые слова: *сложная система, поток событий, распределение Пуассона, априорная информация, ограниченные опытные данные, апостериорное оценивание, выигрыш в оценивании*

Введение. В теории массового обслуживания, теории надежности, теории стрельбы, а также в медицине, экономике, социологии и других областях научной и практической деятельности одним из наиболее распространенных дискретных распределений является распределение Пуассона. При различных неограниченных условиях распределение Пуассона описывает закономерности появления внезапных отказов в сложных системах и является приемлемой моделью для описания таких показателей, как число вызовов, поступающих на телефонную станцию в единицу времени; число электронов, вылетающих с катода электронной лампы в течение определенного интервала времени; число сбоев производственного процесса, функционирующего в режиме нормальной эксплуатации; число элементов сложной электронной системы, отказавших в течение заданного интервала времени; число несчастных случаев (или смертей от редких заболеваний), происходящих в единицу времени в конкретной группе людей; число осколков, попадающих в заданную ограниченную область, при разрыве снаряда неконтактного действия и т. д. [1—8].

Показатели эффективности функционирования сложной системы существенно зависят от величины входящего в распределение Пуассона параметра, который в общем случае характеризует поток случайных событий в системе. В частности, среднее число некоторых событий, происходящих в течение заданного интервала времени, или среднее число точек, попадающих в заданную область пространства, может являться параметром данного распределения.

На этапе проектирования системы значение этого параметра определяется расчетным путем и может отличаться от реального. В процессе отработки опытных образцов системы появляются фактические данные, которые чаще всего являются ограниченными. Возникает задача совместной обработки априорной информации и ограниченных опытных данных о параметре распределения Пуассона.

Существуют различные подходы к учету априорной информации при оценивании характеристик сложных систем [7—16]. Среди них следует выделить методы, основанные на формуле Байеса [10—14]. Основным ограничением для применения этих методов в рассматриваемой задаче является отсутствие информации о распределении априорной оценки исследуемого параметра. Другая группа методов базируется на линейном комбинировании известных (априорной и опытной) оценок [14—16], при этом, однако, сохраняется неопределенность, связанная с выбором весовых коэффициентов для различных оценок. Этот же недостаток присущ и методу, представленном в работах [7—9]. Для формирования оценки параметра распределения Пуассона, учитывающей результаты и априорных, и опытных исследований системы, предлагается использовать метод приоритета опытной информации (ПОИ) [17, 18].

Постановка задачи. При распределении Пуассона вероятность того, что дискретная случайная величина $\hat{X} \geq 0$ в результате эксперимента примет значение x, определяется выражением [2]

$$P(\hat{X} = x;\, \mu) = \frac{\mu^x}{x!} e^{-\mu}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где μ — параметр распределения.

Математическое ожидание $M_{\hat{X}}$ и дисперсия $D_{\hat{X}}$ случайной величины $\hat{X}$ связаны с параметром μ соотношениями

$$M_{\hat{X}} = \mu, \quad D_{\hat{X}} = \mu. \tag{2}$$

При проектировании системы и оценивании эффективности ее функционирования расчетным путем получена априорная оценка $\mu_р$ параметра μ (1). В процессе отработки было испытано $N_о$ опытных образцов системы. Результаты испытаний представлены выборкой $x_i,\ i = \overline{1, N_о}$. Требуется определить апостериорную оценку $\mu_а$ параметра μ, учитывающую результаты априорных и опытных исследований системы.

Определение апостериорной оценки. В соответствии с методом ПОИ на первом этапе по выборке $x_i,\ i = \overline{1, N_о}$, методом максимального правдоподобия определяется опытная оценка $\mu_о$ параметра μ. Для этого составляется функция правдоподобия

$$\prod_{i=1}^{N_о} P(\hat{X} = x_i;\, \mu) = \prod_{i=1}^{N_о} \mu^{x_i} e^{-\mu N_о} \prod_{i=1}^{N_о} \frac{1}{x_i\,!}.$$

Необходимое условие максимума этой функции по параметру μ

$$\left.\frac{\partial \ln \prod_{i=1}^{N_о} P(\hat{X} = x_i;\, \mu)}{\partial \mu}\right|_{\mu=\mu_о} = 0$$

дает уравнение $\dfrac{1}{\mu_о}\sum_{i=1}^{N_о} x_i - N_о = 0$, из которого определяется оценка максимального правдоподобия

$$\mu_o = \frac{1}{N_o}\sum_{i=1}^{N_o} x_i\ . \tag{3}$$

Тогда функцию правдоподобия можно представить в виде

$$L(\mu_o,\,\mu) = \prod_{i=1}^{N_o} P(\hat{X} = x_i;\,\mu) = \mu^{\mu_o N_o} e^{-\mu N_o} \prod_{i=1}^{N_o} \frac{1}{x_i\,!}. \tag{4}$$

Отношение правдоподобия для проверки гипотезы H: $\mu{=}\mu_р$ об однородности априорной и опытной информации определяется выражением [4]

$$\nu^* = \frac{L(\mu_o,\,\mu_р)}{L(\mu_o,\,\mu_o)} = \left(\frac{\mu_р}{\mu_o}\right)^{\mu_o N_o} e^{-N_o(\mu_р-\mu_o)}\ . \tag{5}$$

Величина ν^* изменяется от 0 до 1. Чем ближе расчетная оценка $\mu_р$ параметра μ к опытной оценке $\mu_о$, тем больше значение ν^*, и тем больше должен быть вес априорной информации в апостериорной оценке. Вес опытной информации определяется числом испытаний $N_о$. Поскольку, согласно [17, 18], вес априорной информации не может превышать вес опытных данных, то в качестве коэффициента, определяющего ее значимость в апостериорной оценке, используется величина $N_р = \nu^* N_о$. В этом случае априорная оценка $\mu_р$ параметра μ может рассматриваться как оценка, полученная методом максимального правдоподобия по гипотетической выборке $x_{гi},\ i = \overline{1, N_р}$, из генеральной совокупности с плотностью распределения (1). Соответствующая ей функция правдоподобия по аналогии с (4) представляется следующим образом:

$$L(\mu_р,\,\mu) = \prod_{i=1}^{N_р} P(\hat{X} = x_{гi};\,\mu) = \mu^{\mu_р N_р} e^{-\mu N_р} \prod_{i=1}^{N_р} \frac{1}{x_{гi}\,!}.$$

Апостериорная оценка $\mu_а$ параметра μ, учитывающая результаты априорных и опытных исследований системы, определяется из условия максимума обобщенной функции правдоподобия

$$L(\mu) = L(\mu_р,\,\mu)L(\mu_о,\,\mu) = \mu^{\mu_р N_р + \mu_о N_о} e^{-\mu(N_р+N_о)} \prod_{i=1}^{N_р} \frac{1}{x_{гi}\,!} \prod_{i=1}^{N_о} \frac{1}{x_i\,!},$$

т.е. $\mu_а = \arg\max\limits_{\mu>0} L(\mu) = \arg\max\limits_{\mu>0} \ln L(\mu)$.

Из необходимого условия максимума функции $\ln L(\mu)$ по параметру μ формируется апостериорная оценка

$$\mu_а = \frac{\mu_о N_о + \mu_р N_р}{N_о + N_р} = \frac{\mu_о + \nu^* \mu_р}{1+\nu^*}\ . \tag{6}$$

Отсюда следует, что чем ближе априорная информация об оцениваемом параметре к опытным данным (чем больше ν^*), тем больше ее вес в апостериорной оценке. При $\mu_р \approx \mu_о$ отношение правдоподобия $\nu^* \approx 1$ и оценка $\mu_а \approx \mu_о$.

Оценка выигрыша, получаемого за счет использования априорной информации. Выигрыш в точности оценивания, получаемый за счет использования априорной информации, определяется как отношение дисперсий опытной и апостериорной оценок:

$$\delta_т = D[\mu_о]/D[\mu_а].$$

Если допустить, что величина ν^* не является случайной, то при сделанных выше предположениях и справедливости гипотезы H согласно формулам (3) и (6) получается $\delta_т{=}1{+}\nu^*$, поскольку

$$D[\mu_о]=\mu/N_о;\ D\left[\mu_а\right]=\frac{D\left[\mu_о\right]+\left(\nu^*\right)^2 D\left[\mu_р\right]}{\left(1+\nu^*\right)^2}=\frac{\dfrac{\mu}{N_о}+\left(\nu^*\right)^2\dfrac{\mu}{N_р}}{\left(1+\nu^*\right)^2}=\frac{\dfrac{\mu}{N_о}+\left(\nu^*\right)^2\dfrac{\mu}{\nu^* N_о}}{\left(1+\nu^*\right)^2}=\frac{\mu}{N_о\left(1+\nu^*\right)}.$$

В общем случае используются приближенные значения:

$$D[\mu_о]\approx\mu_о/N_о;\ D[\mu_р]\approx\mu_р/N_р;\ D[\mu_а]\approx\left(\mu_о+\nu^*\mu_р\right)\Big/N_о\left(1+\nu^*\right)^2.$$

Тогда приближенное значение выигрыша в точности оценивания определяется по формуле

$$\delta_т\approx\mu_о\left(1+\nu^*\right)^2\Big/\left(\mu_о+\nu^*\mu_р\right).$$

Оценка (6) может рассматриваться как оценка, полученная по выборке объемом $N=N_о+[N_р]=N_о+[\nu^* N_о]$, где $[\cdot]$ — функция округления до ближайшего целого числа. В этом случае можно говорить о выигрыше по числу испытаний, получаемом за счет априорной информации об оцениваемом параметре, он составляет $\delta_{ч.и}=[\nu^* N_о]$.

Пример. Космический аппарат-ретранслятор (КА) имеет n каналов связи. В среднем за интервал времени T на КА поступает μ заявок на обслуживание. Число заявок распределено по закону Пуассона. Из поступивших заявок обслуживаются любые n. Оставшиеся заявки получают отказ в обслуживании. Условная вероятность $p_{отк}(i)$ того, что заявка получит отказ, если подано всего i заявок, определяется по формуле [6]

$$p_{отк}(i)=\begin{cases}0, & i\le n;\\ \dfrac{i-n}{i}, & i>n.\end{cases}$$

По результатам расчетов получена оценка среднего числа заявок $\mu_р=1000$, которые могут поступить для обслуживания на КА за время T. В процессе испытаний КА были проанализированы 7 идентичных интервалов времени длительностью T. В течение 1-го интервала поступило $x_1=972$ заявки на обслуживание, в течение 2-го — $x_2=986$, в течение 3-го — $x_3=945$, в течение 4-го — $x_4=968$, в течение 5-го — $x_5=977$, в течение 6-го — $x_6=998$, в течение 7-го — $x_7=1030$.

Необходимо определить наименьшее число n каналов связи, при котором вероятность отказа в удовлетворении заявки $p_{отк}\approx 0{,}05$.

Вероятность поступления i заявок на обслуживание равна $P(\hat{X}=i;\ \mu)=\dfrac{\mu^i}{i!}e^{-\mu}$. Тогда в соответствии с формулой полной вероятности [1] безусловная вероятность $p_{отк}(n;\ \mu)$ неудовлетворения заявки при наличии n каналов связи

$$p_{отк}(n;\ \mu)=\sum_{i=0}^{\infty}p_{отк}(i)P(\hat{X}=i;\ \mu)=\sum_{i=n+1}^{\infty}P(\hat{X}=i;\ \mu)-n\sum_{i=n+1}^{\infty}\frac{P(\hat{X}=i;\ \mu)}{i}.$$

Используя это выражение, можно найти наименьшее число каналов связи, при котором обеспечивается выполнение условия $p_{отк}\approx 0{,}05$.

Если опираться только на расчетную информацию о среднем числе заявок ($\mu_р=1000$), которые могут поступить для обслуживания на КА за интервал времени T, то число каналов связи $n_р$ должно быть не менее 950, поскольку при этом значении вероятность отказа в удовлетворении заявки $p_{отк}(950;\ \mu_р)=0{,}0498$.

Оценка максимального правдоподобия (3) среднего числа заявок, полученная на основе результатов реальных исследований системы ретрансляции, $\mu_о=982{,}3$. Соответствующее число каналов связи, обеспечивающее обслуживание заявок с заданной вероятностью отказа $p_{отк}$,

$n_о$=933. Безусловная вероятность неудовлетворения заявки $p_{отк}(933;\ \mu_о) = 0,0500$.

Отношение правдоподобия для проверки однородности априорной и опытной информации, рассчитанное по формуле (5), ν^*=0,3313.

Подставив значения $\mu_р$, $\mu_о$ и ν^* в правую часть выражения (6), получим апостериорную оценку среднего числа заявок, поступающих на КА за время T: $\mu_а$=986,7. Дисперсия этой оценки примерно в 1,3 меньше дисперсии опытной оценки $\mu_о$. Выигрыш в числе испытаний, получаемый за счет использования априорной информации, $\delta_{ч.и}=[\nu^* N_о]=2$. Число каналов связи для ретрансляции сигналов должно быть не меньше $n_а$=938. Соответствующая этому числу каналов вероятность отказа в обслуживании заявки $p_{отк}(938;\ \mu_а)$=0,0492.

Заключение. При ограниченном числе испытаний опытных образцов системы для повышения качества оценивания неизвестных параметров целесообразно использовать априорную информацию. Основная проблема состоит в выборе весовых коэффициентов, определяющих значимость априорных и опытных данных в апостериорных оценках. В большинстве случаев математически обоснованное решение этой задачи можно получить, используя метод приоритета опытной информации. На его основе получено аналитическое выражение для вычисления апостериорной оценки параметра распределения Пуассона. Введены показатели, характеризующие выигрыши в точности оценивания и числе испытаний, получаемые за счет использования априорной информации.

На примере космического аппарата-ретранслятора, входящего в космическую систему связи, показано, что необходимое число каналов связи, при котором вероятность отказа в удовлетворении заявки будет не больше заданной, существенно зависит от среднего числа заявок, которые могут поступить для обслуживания на КА в течение заданного интервала времени. Применение предложенного подхода позволило повысить точность определения среднего числа заявок и, как следствие, уменьшить риск принятия ошибочных решений при построении системы связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пугачев В. С.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Физматлит, 2002. 496 с.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей: учебник для вузов. М.: Изд. центр „Академия“, 2003. 576 с.
3. *Половко А. М., Гуров С. В.* Основы теории надежности. СПб: БХВ-Петербург, 2006. 704 с.
4. *Айвазян С. А., Енюков И. С., Мешалкин Л. Д.* Прикладная статистика: основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
5. *Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
6. *Абезгауз Г. Г., Тронь А. П., Копенкин Ю. Н., Коровина И. А.* Справочник по вероятностным расчетам. М.: Воениздат, 1970. 536 с.
7. *Арсеньев В. Н.* Метод апостериорного оценивания показателей качества системы при ограниченном объеме информации // Изв. вузов. Приборостроение. 1991. Т. 34, № 11. С. 16—22.
8. *Арсеньев В. Н.* Новые методы принятия решений при ограниченных экспериментальных данных: монография. СПб: ВКА им. А. Ф. Можайского, 1999. 90 с.
9. Пат. 2015553 РФ. Статистический анализатор / *В. Н. Арсеньев.* 1994. Бюл. № 12.
10. *Моррис У.* Наука об управлении. Байесовский подход. М.: Мир, 1971. 304 с.
11. *Рао С. Р.* Линейные статистические методы и их применения. М.: Наука, 1968. 548 с.
12. *Шаракшанэ А. С., Халецкий А. К., Морозов И. А.* Оценка характеристик сложных автоматизированных систем. М.: Машиностроение, 1993. 272 с.
13. *Кринецкий Е. И.* Летные испытания ракет и космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1979. 464 с.

14. Элементы теории испытаний и контроля технических систем / Под ред. *Р. М. Юсупова.* Л.: Энергия, 1978. 192 с.

15. *Пугачев В. Н.* Комбинированные методы определения вероятностных характеристик. М.: Сов. радио, 1973. 256 с.

16. *Щербаков П. С.* Использование априорной информации для уточнения оценок параметров // Изв. АН СССР. Автоматика и телемеханика. 1988. № 5. С. 80—89.

17. *Арсеньев В. Н.* Оценивание характеристик систем управления по ограниченному числу натурных испытаний: монография. М.: Рестарт, 2013. 126 с.

18. *Арсеньев В. Н., Лабецкий П. В.* Метод апостериорного оценивания характеристик системы управления летательного аппарата // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 10. С. 23—28.

Сведения об авторах

Владимир Николаевич Арсеньев — д-р техн. наук, профессор; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра бортовых информационных и измерительных комплексов; E-mail: vladar56@mail.ru

Сергей Борисович Силантьев — канд. техн. наук, доцент; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра автономных систем управления; E-mail: cilantev2008@yandex.ru

Андрей Александрович Ядренкин — канд. техн. наук, доцент; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра бортовых информационных и измерительных комплексов; E-mail: andrei_nikita@mail.ru

Рекомендована кафедрой бортовых информационных и измерительных комплексов

Поступила в редакцию 23.12.16 г.

Ссылка для цитирования: *Арсеньев В. Н., Силантьев С. Б., Ядренкин А. А.* Использование априорной информации для коррекции модели потока событий в сложной системе // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 5. С. 391—397.

USING A PRIORI INFORMATION FOR CORRECTION OF THE EVENTS STREAM MODEL IN COMPLEX SYSTEM

V. N. Arsenyev, S. B. Silantev, A. A. Yadrenkin

A. F. Mozhaysky Military Space Academy, 197198, St. Petersburg, Russia
E-mail: vladar56@mail.ru

The problem of Poisson distribution parameter estimation by results of theoretical researches and limited field tests is considered. In various problems, the Poisson distribution parameter characterizes average number of casual events occur in a set time interval, or average number of points falling into a given space area. The parameter value significantly affects the cost of the developed system and the possibility of its use for a specified purpose. While it is not possible to obtain a sufficient information for evaluation of this parameter during the tests of the system prototypes, invoking an information on the flow of system events accumulated prior to the tests is necessary. A solution to the problem of estimation of the Poisson distribution parameter based on joint processing of a priori information and limited experimental data is presented.

Keywords: complex system, events stream, Poisson distribution, a priori information, limited experimental data, a posterior estimation, the gain in estimation

Data on authors

Vladimir N. Arsenyev — Dr. Sci., Professor; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Onboard Information and Measurement Systems; E-mail: vladar56@mail.ru

Sergey B. Silantev — PhD, Associate Professor; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Independent Control Systems; E-mail: cilantev2008@yandex.ru

Andrey A. Yadrenkin — PhD, Associate Professor; A. F. Mozhaysky Military Space Academy, Department of Onboard Information and Measurement Systems; E-mail: andrei_nikita@mail.ru

For citation: *Arsenyev V. N., Silantev S. B., Yadrenkin A. A.* Using a priori information for correction of the events stream model in complex system // Journal of Instrument Engineering. 2017. Vol. 60, N 5. P. 391—397 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-5-391-397