

**КИНЕТИКА ДИНАМИЧЕСКИ НЕУРАВНОВЕШЕННОГО РОТАТОРА
ПРИ СУХОМ ТРЕНИИ СКОЛЬЖЕНИЯ В ОПОРАХ ОСИ**

В. В. ЧИСТЯКОВ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: v.chistyakov@corp.ifmo.ru*

Математически моделируется динамика свободного и вынужденного вращения твердого тела вокруг центральной, но не главной оси инерции Oz , опирающейся на подшипник и подпятник скольжения, а также в условиях действия гидродинамического и сухого трения. Показано, что возникающие в плоскостях оси инерционные пары $M_{xy}(J_{xz}, J_{yz}, \omega, \varepsilon)$ и пары сухого трения зависят не только от центробежных моментов инерции J_{xz}, J_{yz} и угловой скорости ω , но и от ускорения ε . Такая зависимость приводит в общем случае к динамическим уравнениям с иррациональной правой частью, а в частном — с разрывной. Проинтегрированы аналитически и численно уравнения простейших видов движений.

Ключевые слова: динамический дисбаланс, ротатор, принцип Даламбера, инерционные пары, подшипник, подпятник, сухое трение, гидродинамическое сопротивление, кинетика

Введение. Динамический тип неуравновешенности (дисбаланс) возникает у вращающегося механизма, центр масс которого жестко привязан к оси вращения, например, при перекосе пропеллера летательного аппарата (рис. 1).

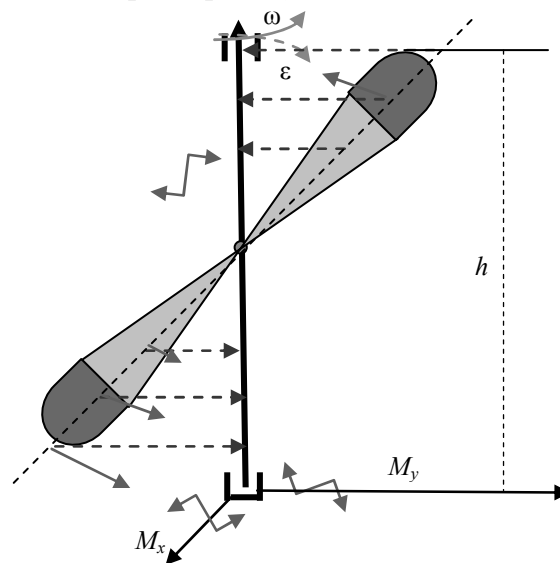


Рис. 1

Влиянию трения на динамику вращения/качения твердого тела посвящено много работ (начиная с классических монографий [1—3] и до современных исследований [4, 5]), в то время как влиянию сухого трения в подшипниках и подпятниках на вращательную динамику ротатора с чисто динамическим дисбалансом — мало (для опор качения см., например, [6, 7]). Основной объем работ (см., например, [8—10]) посвящается так называемому кельтскому камню (*Rattleback* — „задрожал и назад!“), являющему собой интересней с точки зрения теории динамических систем объект [10].

С фундаментальной точки зрения исследование динамики представляет интерес и в силу определенного взаимодействия в динамике причинных и следственных факторов. В отличие от

бесфрикционного случая (см., например, [11]), вводимые согласно принципу Даламбера инерционные пары сил $M_{x,y}(J_{xz}, J_{yz}, \omega, \varepsilon)$ в плоскостях xz и yz вертикальной оси z одновременно и зависят от углового ускорения ε , и определяют его. Такое сплетение причины и следствия может привести к нарушению принципа детерминированности при движении систем с сухим трением [11].

Принцип Даламбера при наличии сухого трения. Рассмотрим в качестве опор вертикальной оси подшипник, предназначенный для восприятия радиальных нагрузок, и концевой односторонний подпятник скольжения (см., например, [12]), традиционно используемый для вертикальных валов. Оба для простоты характеризуются одинаковыми коэффициентами сухого трения f и радиусами цапф $r_1 = r_2 = R$.

Будем считать, что трение в пяте вала подпятника пренебрежимо мало либо вообще отсутствует, тому причиной может быть естественная невесомость космоса или то, что пята вала служит приемником внешнего вращающего момента M_{ex} , поднимающей ее над подушкой. Таким образом, необратимые потери энергии всецело определяются латеральным трением скольжения и гидродинамическим сопротивлением.

Рассмотрим схематичный поперечный разрез каждой из опор A и B (рис. 2). Необходимый зазор („люфт“) между рабочей поверхностью корпуса подшипника/подпятника приведет к микроскопическому радиальному смещению каждой из цапф в сторону точки K ее контакта с рабочей поверхностью подшипника. Поперечная инерционная даламберовская пара $M_{x,y}(J_{xz}, J_{yz}, \omega, \varepsilon)$ в осевой плоскости описывается двумя силами [13]:

$$\Phi_A = -\Phi_B = \pm \frac{1}{h} (\varepsilon J_{yz} + \omega^2 J_{zx}, \varepsilon J_{xz} - \omega^2 J_{yz}, 0), \quad (1)$$

линии действия которых проходят через смещенные геометрические центры цапфы и подшипника. Из схемы нагружения опорного узла видно, что сила сухого трения скольжения определится как $F_{fr} = fN = \Phi \sin \gamma$, где N — сила нормального давления цапфы на рабочую поверхность, а $\gamma = \arctg f$ — угол кулоновского трения. При этом тормозящий момент фрикционной пары равен

$$M_{fr} = 2F_{fr}R = -\text{sign}(\dot{\varphi}) 2f \frac{R}{h} \sqrt{\frac{J_{yz}^2 + J_{xz}^2}{1 + f^2}} \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2} = -\alpha \text{sign}(\dot{\varphi}) \sqrt{\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2}, \quad \omega = \dot{\varphi}, h = AB. \quad (2)$$

Интегральный коэффициент $\alpha = \frac{2Rf}{h} \sqrt{\frac{J_{yz}^2 + J_{xz}^2}{1 + f^2}}$ [кг·м²] отражает одновременно и меру

динамического дисбаланса ротатора ($\Delta = \sqrt{J_{yz}^2 + J_{xz}^2}$), и влияние трения ($\sin \gamma = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$), и

приведенную длину оси ($\lambda = \frac{h}{2R}$) между опорами.

Здесь можно выделить две характерные особенности: зависимость фрикционного момента M_{fr} от радиуса цапфы R (2); отсутствие трения покоя и потому — принципиальная невозможность явления заклинивания или самоотторжения, как это бывает в зависающем маятнике с сухим трением цапфы.

Момент инерционной пары в поперечной плоскости равен $M_z = -J_{zz} \varepsilon = -J_{zz} \ddot{\varphi}$, и в уравнении кинестатики он складывается с остальными вертикально направленными моментами. Среди них помимо фрикционного M_{fr} и внешнего вынуждающего $M_{ex}(t)$ могут присутствовать традиционно полагаемый рэлеевским, т.е. квадратичным по угловой скорости, момент

гидродинамического сопротивления $M_h = -c|\dot{\phi}|\dot{\phi}$ и, возможно, упругая/квазиупругая пара $M_e = -k\phi$ (оба коэффициента имеют размерность момента инерции).

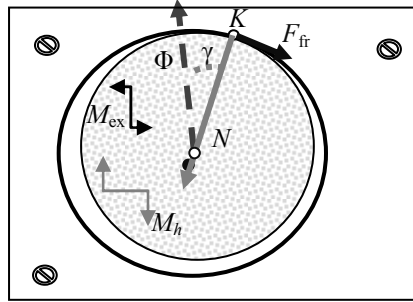


Рис. 2

После перегруппировки слагаемых в уравнении Даламбера получается в общем виде не разрешенное относительно старшей производной динамическое уравнение вращения ротатора

$$J_{zz}\ddot{\phi} = -\text{sign}(\dot{\phi})\alpha\sqrt{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} - k\phi - c|\dot{\phi}|\dot{\phi} + M_{\text{ex}}(t). \quad (3)$$

Вращение по инерции. Пусть тело имело угловую скорость ω_0 , когда перестал действовать разгоняющий момент, и далее оно двигалось лишь под действием тормозящих пар M_h и M_{fr} . Очевидно, что направление вращения не изменится, и динамика его будет описываться уравнением

$$J_{zz}\ddot{\phi} = -\alpha\sqrt{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} - c\dot{\phi}^2, \quad (4)$$

его алгебраическое разрешение относительно $\ddot{\phi}$ более реальном случае $J_{zz} > \alpha$ дает:

$$J_{zz}\ddot{\phi} = -J_{zz}\dot{\phi}^2 \frac{cJ_{zz} + \alpha\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \equiv -\gamma J_{zz}\dot{\phi}^2. \quad (5)$$

Тогда момент сухого трения при вращении по инерции определится как

$$M_{\text{fr}}(\omega) = -\frac{c\alpha^2 + \alpha J_{zz}\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2} \omega^2. \quad (6)$$

Уравнение (6) легко интегрируется

$$-\frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}^2} = \gamma \Leftrightarrow \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \gamma t \Rightarrow \omega(t) = \frac{\omega_0}{1 + \omega_0 \gamma t}, \quad \phi(t) = \frac{\ln(1 + \omega_0 \gamma t)}{\gamma}. \quad (7)$$

Таким образом, динамически неуравновешенный ротатор с кулоновским трением в опорах оси вращается по инерции так же, как и без трения, но при наличии квадратичной рэлеевской пары сопротивления. Только его коэффициент α помимо аэродинамики ротатора определяется также формирующими сухим трением f , дисбалансом Δ и приведенной длиной оси λ :

$$\gamma = \frac{cJ_{zz} + \alpha\sqrt{J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \quad (8)$$

Парадоксально, но $\gamma \neq 0$ даже в безвоздушном пространстве ($c = 0$), где вращение подчиняется тому же закону, что и в среде с квадратичным рэлеевским сопротивлением.

Стоит отметить, что в частных (вырожденных) ситуациях, например $J_{zz} = \alpha = c$, уравнение (4) алгебраически разрешается в некорректное соотношение $\dot{\phi}(t)\ddot{\phi}(t) = 0$ и не имеет решения ни при каком начальном условии $\omega(0) = \omega_0 \neq 0$. По мнению Пэнлеве [13], подобные ситуации свидетельствует о неприменимости динамики абсолютно твердого тела для описания поведения систем с сухим трением. Подобные случаи требуют [7] учета конечности скорости звука u в материале ротатора и разделения во времени текущего ускорения $\ddot{\phi}(t)$ и

определяющих его величин $\dot{\phi}, \ddot{\phi}(t-\tau)$ на $\tau \sim D/u$, D — характерный поперечный размер, „диаметр“ ротатора. Расчет в рамках такого подхода дает кинетику торможения с нарастающим замедлением (рывок) (рис. 3, $J_{zz} = \alpha = c = 1$ и $\tau=0,001$ с [7]).

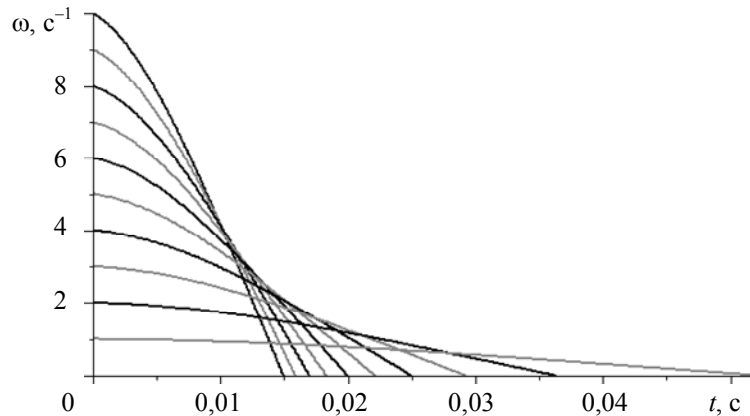


Рис. 3

Вращение под действием постоянного разгоняющего момента. Пусть постоянный во времени осевой (Oz) момент M приложен к неподвижному телу в момент времени $t=0$. Соответствующее уравнение разгона тела вокруг этой центральной оси будет отличаться от (4) постоянным слагаемым в правой части

$$J_{zz}\ddot{\phi} = M - \alpha\sqrt{\dot{\phi}^4 + \ddot{\phi}^2} - c\dot{\phi}^2. \quad (9)$$

Предельная скорость разгона ω_∞ определится из условия $\ddot{\phi} \rightarrow 0$:

$$M - c\dot{\phi}^2 - \alpha\sqrt{\dot{\phi}^4} = 0 \Rightarrow \omega_\infty = \sqrt{\frac{M}{c+\alpha}}. \quad (10)$$

Аналогичным образом оно неоднозначно разрешится относительно старшей производной, и при $J_{zz} > \alpha$ выбирается знак „минус“:

$$\ddot{\phi} = \frac{J_{zz}(M - c\dot{\phi}^2) - \alpha\sqrt{\dot{\phi}^4(J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\dot{\phi}^2M + M^2}}{J_{zz}^2 - \alpha^2}. \quad (11)$$

Уравнение интегрируется переходом к переменной $\omega = \dot{\phi}(\phi)$

$$\frac{d\phi}{d\omega} = \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2)\omega}{J_{zz}(M - c\omega^2) + \alpha\sqrt{\omega^4(J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega^2M + \alpha^2M^2}} \quad (12)$$

и дает в параметрической форме

$$\phi(\omega) = \int_0^\omega \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2)\omega' d\omega'}{J_{zz}(M - c\omega'^2) + \alpha\sqrt{\omega'^4(J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega'^2M + \alpha^2M^2}}, \quad (13)$$

$$t(\omega) = \int_0^\omega \frac{(J_{zz}^2 - \alpha^2)d\omega'}{J_{zz}(M - c\omega'^2) + \alpha\sqrt{\omega'^4(J_{zz}^2 + c^2 - \alpha^2) - 2c\omega'^2M + \alpha^2M^2}}. \quad (14)$$

Численное интегрирование дает стандартную кинетику разгона ротатора (рис. 4, 1 — при рэлеевском, 2 — при сухом трении). Однако при одинаковых моментах и одинаковых предельных скоростях темп разгона при наличии только квадратичного аэродинамического

сопротивления представляется более высоким, нежели когда сопротивление дополняется инерционным трением.

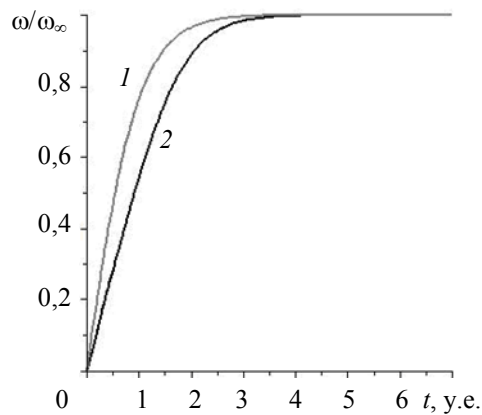


Рис. 4

Выводы. В работе изучены простейшие типы как свободного, так и вынужденного вращения вокруг неподвижной оси динамически неуравновешенного ротора, характерным свойством которого является двусторонняя причинно-следственная связь между угловым ускорением и тормозящим моментом сухого трения.

Показано, что: а) свободное вращение по инерции эквивалентно движению с квадратичным по угловой скорости сопротивлением; б) в частном, так называемом вырожденном, случае движение по инерции заканчивается полной остановкой через малое конечное время (аэродинамически-фрикционный удар); в) закон движения под действием разгоняющего момента в условиях комбинированного сопротивления отличается от соответствующего закона для сбалансированного ротора.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Appell P. Traité de mécanique rationnelle. 2. Dynamique des systèmes mécanique analytique. Paris: Gauthier-Villars, Éditeur, 1953. 487 p.
2. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Наука, 1961.
3. Смирнов Ю. П. Об уравнениях динамики систем с трением // Сб. научно-методических статей по теоретической механике. М.: Высш. школа, 1981. Вып. 11. С. 184.
4. Polunin A. I. Mathematical simulation of dynamics for a ring rotating on supports // Intern. J. of Pharmacy and Technology. 2016. Vol. 8, N 4 (December). P. 22726—22742.
5. Bulsara M. et al. Energy loss due to unbalance in rotor—shaft system // J. of Engineering Design and Technology. 2016. Vol. 14, N 2. P. 277—285.
6. Чистяков В. В. О динамике вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, проходящей через центр масс, при сухом трении в опорах // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2014. Т. 22, № 2. С. 3—15.
7. Чистяков В. В. О частных случаях динамики вращения твердого тела вокруг неглавной центральной оси инерции при сухом трении в опорах // Вестник Удмуртского университета. Сер. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. № 2. С. 153—163.
8. Borisov A. V., Jalnin A. Yu., Kuznetsov S. P. et al. Dynamical phenomena occurring due to phase volume compression in nonholonomic model of the rattleback // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. Vol. 17, N 6. P. 512—526.
9. Kondo Y., Nakanishi H. Rattleback dynamics and its reversal time of rotation // Phys. Rev. E. 2017. Vol. 95, N 6. April. DOI: 10.1103/PhysRevE.95.062207.
10. Nanda A., Singla P., Amin Karami M. Energy Harvesting using Rattleback: Theoretical analysis and simulations of Spin Resonance // J. of Sound and Vibration. 2015. Vol. 369. December. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.12.032.
11. Маркеев А. П. Теоретическая механика: Уч. для университетов. М.: ЧеРо, 1999. 412 с.

12. Решетов Д. Н. Детали машин: Уч. для студ. машиностроительных и механических специальностей вузов. М.: Машиностроение, 1989. 496 с.
13. Пэнлэве П. Лекции о трении. М.: Гостехиздат, 1954.

Сведения об авторе

Виктор Владимирович Чистяков — канд. физ.-мат. наук, доцент; Университет ИТМО; кафедра мехатроники; E-mail: v.chistyakov@corp.ifmo.ru

Поступила в редакцию
21.11.17 г.

Ссылка для цитирования: Чистяков В. В. Кинетика динамически неуравновешенного ротора при сухом трении скольжения в опорах оси // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 2. С. 129—134.

**KINETICS OF DYNAMICALLY UNBALANCED ROTATOR WITH DRY SLIDING FRICTION
IN THE AXLE SUPPORTS**

V. V. Chistyakov

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: v.chistyakov@corp.ifmo.ru

The dynamics of free and forced rotation of a rigid body around the central but not the principal axis of inertia Oz , supported by a bearing and thrust bearing, is modeled mechanically under the conditions of hydrodynamic and dry friction. It is shown that the inertial pairs and pairs of dry friction arising in the plane of the axis are shown to depend not only on the centrifugal moments of inertia and the angular velocity, but also on the acceleration. The revealed dependence leads to dynamic equations with an irrational right-hand side in the general case, and with a discontinuous one in the particular case. The equations for simplest types of the motion are integrated analytically and numerically.

Keywords: dynamic disbalance, rotator, D'Alembert's principle, inertial pairs, bearing, thrust bearing, dry friction, hydrodynamic resistance, kinetics

Data on author

Viktor V. Chistyakov — PhD, Associate Professor; ITMO University, Department of Mechatronics; E-mail: v.chistyakov@corp.ifmo.ru

For citation: Chistyakov V. V. Kinetics of dynamically unbalanced rotator with dry sliding friction in the axle supports. *Journal of Instrument Engineering*. 2018. Vol. 61, N 2. P. 129—134 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-2-129-134