УДК 62.50
DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-9-791-797

ФОРМИРОВАНИЕ КРИТЕРИАЛЬНЫХ МАТРИЦ МНОГОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ФАДДЕЕВА — ЛЕВЕРЬЕ

Н. А. Вундер, Н. А. Дударенко, В. Г. Мельников

Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dudarenko@yandex.ru

Рассматривается проблема формирования критериальных матриц динамических систем типа „многомерный вход—многомерный выход“, которые могут быть использованы для исследования свойств многомерной системы в неподвижном состоянии. Процедура формирования критериальных матриц рассматривается применительно к задаче оценивания склонности многомерных динамических систем к вырождению, являющемуся мерой их робастности. Конструирование критериальных матриц осуществляется на примере многомерной непрерывной динамической системы. Задача решается с использованием алгоритма Фаддеева — Леверье, дополненного теоремой Гамильтона — Кэли. Полученная вещественнозначная конструкция для формирования критериальных матриц отношения „вход—выход“ многомерных динамических систем ориентирована на задачу априорного экспресс-контроля вырождения динамических систем типа „многомерный вход—многомерный выход“ в статике.

Ключевые слова: *алгоритм Фаддеева — Леверье, число обусловленности, вырождение, критериальная матрица, теорема Гамильтона — Кэли, функционал вырождения*

Введение. Постановка задачи. Тенденция к усложнению динамических систем [1], помимо требований к их устойчивости, надежности и инвариантности [2, 3] к изменяющимся условиям, в силу многокомпонентности их функционального состава породила необходимость контроля такого системного свойства, как склонность к возможному вырождению [4], являющемуся мерой робастности многомерной системы [5, 6].

Многомерная динамическая система типа „многомерный вход — многомерный выход“, аппаратно реализует оператор, который отображает пространство входов в пространство выходов. Для определенности этот оператор можно считать линейным или, по крайней мере, локально линейным. Предполагается также, что указанные выше пространства согласованы по размерности. В математической постановке линейный оператор считается вырожденным [7], если его ранг становится меньше размерности пространства реализаций. Развивая это положение, можно сказать, что процесс вырождения некоторой многомерной динамической системы есть процесс уменьшения ранга [8] реализуемого ею линейного оператора. Матрицу этого линейного оператора будем именовать критериальной матрицей [9].

Таким образом, задача оценивания степени вырождения многомерной динамической системы решается в два этапа. На первом этапе формируется критериальная матрица многомерной системы, на втором этапе оценивается степень вырождения системы посредством применения к критериальной матрице аппарата функционалов вырождения.

Исследование проблемы вырождения многомерных динамических систем может проводиться как в параметризованном, так и в не параметризованном временем виде. Проблема вырождения существенно зависит от типа входных заявок на их обслуживание многоканальными динамическими системами [4, 8, 9]. Настоящая статья посвящена проблеме формирования критериальных матриц многомерных динамических систем с использованием алгоритмов Фаддеева — Леверье [10] без учета характера организации входных заявок.

Базовые концепции контроля степени вырождения многомерных динамических систем. Рассмотрим многомерную динамическую систему, реализующую линейный оператор с матрицей $N(*)$, отображающий пространство входов в пространство выходов, так что становится справедливой линейная алгебраическая задача вида

$$\eta(w) = N(w,\theta)\chi(w), \tag{1}$$

где критериальная матрица $N(w,\theta)$ имеет размерность $m \times m$ для любых значений w, θ; $\eta(w)$, $\chi(w)$ — m-мерные векторы; параметр „w“ — характеризует, с одной стороны, непрерывное время t, когда задача (1) параметризована непрерывным временем, а с другой — дискретное время k, выраженное в числе интервалов дискретности длительностью Δt, когда задача (1) параметризована дискретным временем; θ — p-мерный параметр, изменяющий алгебраические свойства матрицы N и характеризующий частоту ω при гармоническом представлении внешнего воздействия.

Будем рассматривать линейную алгебраическую задачу как инструментальную модель контроля степени вырождения на основе норм матрицы N и обратной к ней матрицы N^{-1} [11]. Для оценки степени вырождения сложной динамической системы воспользуемся такой матричной характеристикой, как число обусловленности.

Число обусловленности матрицы N, согласно определению [11], записывается в следующей форме:

$$C\{N\} \overset{\Delta}{\equiv} \|N\| \cdot \left\|N^{-1}\right\|. \tag{2}$$

Числа обусловленности в силу определения (2) подчинены следующим неравенствам:

$$1 \le C\{N\} < \infty. \tag{3}$$

Однако оценить, насколько число обусловленности близко к бесконечности, затруднительно. В связи с этим в рассмотрение введем величину, обратную числу обусловленности, называемую функционалом вырождения J_D, который зададим соотношением

$$J_D\{N\} = C^{-1}\{N\} = \alpha_{\min}\{N\}\alpha_{\max}^{-1}\{N\}, \tag{4}$$

где $\alpha_{\min}$ и $\alpha_{\max}$ — минимальное и максимальное сингулярные числа критериальной матрицы N соответственно.

Соотношение (4) с учетом (3) позволяет записать для функционала вырождения следующие неравенства:

$$0 \le J_D = C^{-1}\{N\} \le 1. \tag{5}$$

Таким образом, процесс вырождения можно отслеживать по последовательному обнулению функционалов вырождения J_{D_j}, контроль граничных значений которых в пределах 0 и 1 заметно проще контроля граничных значений чисел обусловленности в пределах 1 и ∞.

Формирование критериальной матрицы многомерной динамической системы с использованием алгоритма Фаддеева — Леверье. Рассмотрим многомерную непрерывную динамическую систему с четверкой матриц (G,F,C,H), имеющую векторно-матричное описание „вход—состояние—выход“:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gg(t), \; y(t) = Cx(t) + Hg(t), \tag{6}$$

где x, g, y — векторы состояния, задающего воздействия и выхода соответственно; $x \in R^n$, $g, y \in R^m$; F, G, C, H — матрицы состояния системы, входа, выхода и отношения „вход—выход“ непрерывного объекта управления соответственно, согласованные по размерности с размерностью векторов x, g и y, так что $F \in R^{n\times n}$, $G, C^T \in R^{n\times m}$, $H \in R^{m\times m}$.

Анализ вырождения сложных динамических систем (6) опирается на векторно-матричные модели типа „вход—выход“. Для конструирования этой модели применим к (6) преобразование Лапласа, тогда при нулевых начальных условиях сложная динамическая система получит представление „вход—выход“ вида

$$y(s) = \Phi(s) g(s), \tag{7}$$

где $y(s)$ и $g(s)$ — лапласовы образы $y(t)$ и $g(t)$; $\Phi(s)$ — $m \times m$-передаточная матрица отношения „вход—выход“, записываемая в силу (6) в форме

$$\Phi(s) = C(s\boldsymbol{I} - F)^{-1} G + H. \tag{8}$$

Так как линейная модель (7) многомерной системы (6) параметризована комплексной переменной s, то возникают заметные трудности использования формулы (7), дополненной представлением (8) в решении задач вырождения. Чтобы исключить параметризацию переменной s, воспользуемся алгоритмом Фаддеева — Леверье [10] разложения резольвенты $(s\boldsymbol{I} - F)^{-1}$, при этом основной результат изложим в виде системы утверждений.

Утверждение 1. Передаточная функция $\Phi(s)$ „вход—выход“ системы (1) может быть представлена в виде

$$\Phi(s) = \frac{1}{D(s)} \Big[s^n H + s^{n-1}(a_1 H + CQ_0 G) + s^{n-2}(a_2 H + CQ_1 G) + \ldots$$
$$\ldots + s(a_{n-1} H + CQ_{n-2} G) + (a_n H + CQ_{n-1} G) \Big], \tag{9}$$

где $Q_k - n \times n$-матрица, $k = \overline{0, n-1}$, вычисляемая с помощью алгоритма Фаддеева — Леверье.

Доказательство. В соответствии с алгоритмом Фаддеева — Леверье резольвента $(s\boldsymbol{I} - F)^{-1}$ может быть представлена без ее обращения в форме [10]

$$\left(s\boldsymbol{I} - F\right)^{-1} = \frac{1}{\det(s\boldsymbol{I} - F)} \left[\Delta\left(s\boldsymbol{I} - F\right) \right]^T = \frac{s^{n-1} Q_0 + s^{n-2} Q_1 + \ldots + Q_{n-1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n}, \tag{10}$$

где $n \times n$-матрицы $Q_k, k = \overline{0, n-1},$ и коэффициенты $a_i, i = \overline{1, n},$ характеристического уравнения вычисляются с помощью рекуррентной процедуры алгоритма Фаддеева — Леверье:

$$\begin{array}{ll} Q_0 = \boldsymbol{I}, & a_1 = -\mathrm{tr}(FQ_0) \\ Q_1 = FQ_0 + a_1 \boldsymbol{I}, & a_2 = -\mathrm{tr}(FQ_1)/2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ Q_k = FQ_{k-1} + a_k \boldsymbol{I}, & a_{k+1} = -\mathrm{tr}(FQ_k)/k \end{array} \tag{11}$$

С использованием матриц Q_k, $k = \overline{0, n-1},$ для резольвенты $(s\boldsymbol{I} - F)^{-1}$ можно записать

$$(s\boldsymbol{I} - F)^{-1} = \frac{s^{n-1}}{D(s)} Q_0 + \frac{s^{n-2}}{D(s)} Q_1 + \ldots + \frac{s}{D(s)} Q_{n-2} + \frac{1}{D(s)} Q_{n-1}. \tag{12}$$

Если резольвенту в форме (12) подставить в выражение (8) для передаточной матрицы „вход—выход“, получим

$$\Phi(s) = C(s\boldsymbol{I} - F)^{-1} G + H = \frac{1}{D(s)} \left\{ s^{n-1} CQ_0 G + s^{n-2} CQ_1 G + \ldots + sCQ_{n-2} G + CQ_{n-1} G \right\} + H. \tag{13}$$

Приведем правую часть выражения (13) к одному знаменателю $D(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1} s + a_n$, в результате чего функция $\Phi(s)$ примет следующий вид:

$$\Phi(s) = \frac{1}{D(s)} \Big[s^n H + s^{n-1}(a_1 H + CQ_0 G) + s^{n-2}(a_2 H + CQ_1 G) + \ldots$$
$$\ldots + s(a_{n-1} H + CQ_{n-2} G) + (a_n H + CQ_{n-1} G) \Big]. \qquad . \tag{14}$$
■

Для решения задачи априорного экспресс-контроля вырождения многомерных динамических систем, который осуществляется без учета характера организации входных заявок, т.е. в статике, необходимо знать вид передаточной матрицы $\Phi(s)\big|_{s=0} = \Phi(0)$.

Утверждение 2. Передаточная матрица $\Phi(s)\big|_{s=0} = \Phi(0)$ многомерной непрерывной динамической системы (6) для исследования ее свойств в неподвижном состоянии может быть представлена как

$$\Phi(0) = H - CF^{-1}G\,. \tag{15}$$

Доказательство. Рассмотрим возможность представления передаточной матрицы $\Phi(s)\big|_{s=0} = \Phi(0)$ с использованием соотношения (14). Если в этом соотношении положить $s = 0$, то передаточная матрица примет вид

$$\Phi(0) = \frac{1}{D(0)}\left(a_n H + CQ_{n-1}G\right) = \frac{1}{a_n}\left(a_n H + CQ_{n-1}G\right). \tag{16}$$

Выражение (16) содержит матрицу Q_{n-1}, которая не является системной, она формируется с помощью алгоритма Фаддеева — Леверье. Для ее системного представления снова обратимся к алгоритму Фаддеева — Леверье, но уже не в рекуррентной форме, а в полной, тогда в соответствии с (11) получим

$$\left.\begin{aligned} &Q_0 = \boldsymbol{I},\\ &Q_1 = FQ_0 + a_1\boldsymbol{I} = F + a_1\boldsymbol{I},\\ &Q_2 = FQ_1 + a_2\boldsymbol{I} = F^2 + a_1F + a_2\boldsymbol{I},\\ &\vdots\\ &Q_{n-1} = F^{n-1} + a_1F^{n-2} + a_2F^{n-3} + \ldots + a_{n-1}\boldsymbol{I}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Воспользуемся теперь положениями теоремы Гамильтона — Кэли [5], в соответствии с которой произвольная квадратная матрица обнуляет свой характеристический полином, что применительно к матрице F может быть записано в форме

$$F^n + a_1F^{n-1} + a_2F^{n-2} + \ldots + a_{n-1}F + a_n\boldsymbol{I} = 0. \tag{18}$$

Преобразуем (18) к виду

$$F\left\{F^{n-1} + a_1F^{n-2} + a_2F^{n-3} + \ldots + a_{n-1}\boldsymbol{I}\right\} + a_n\boldsymbol{I} = 0. \tag{19}$$

Если воспользоваться последним выражением системы уравнений (17), то соотношение (19) получит представление $FQ_{n-1} + a_n\boldsymbol{I} = 0$, откуда для Q_{n-1} имеем

$$Q_{n-1} = -a_nF^{-1}. \tag{20}$$

Подставив это соотношение в выражение (16) для передаточной матрицы „вход—выход“, получим

$$\Phi(0) = \frac{1}{a_n}\left(a_nH + CQ_{n-1}G\right) = \frac{1}{a_n}\left(a_nH - a_nCF^{-1}G\right) = H - CF^{-1}G\,. \tag{21}$$ ■

Таким образом, априорный экспресс-контроль возможного вырождения многомерных динамических систем, который осуществляется без учета характера организации входных заявок, может быть произведен с помощью критериальной матрицы N вида

$$N = H - CF^{-1}G. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что отношения „вход—выход“, задаваемые критериальной матрицей (22), позволяют контролировать и корректировать возможное вырождение системы [12, 13]. Так, с помощью матрицы G можно сформировать необходимые межканальные связи по сепаратным входам, с помощью матрицы C — решить аналогичную задачу в пространстве выходов, а с помощью матрицы F — обнаружить способность назначения системных параметров сепаратных каналов и организовать внутрисистемные межканальные связи. Дополнительным системным ресурсом является матрица H.

В связи с тем, что полученная критериальная матрица N (22) не содержит информации о характере организации входного потока заявок, а содержит данные лишь о внутреннем „устройстве“ многомерной динамической системы, область ее использования в решении проблемы контроля возможного вырождения многомерной динамической системы следует связывать с задачей априорной экспресс-оценки склонности сконструированной многомерной системы вида (6) к вырождению.

Тем самым реализуется принцип: прежде чем исследовать склонность системы к вырождению в динамике при обработке потоков входных заявок, необходимо проверить ее в статике на предмет соответствия ее „конструкции“ требуемому значению функционала вырождения с запасом на динамику.

Процедуру контроля склонности сконструированной многомерной непрерывной динамической системы вида (6) к вырождению на основе критериальной матрицы, полученной с использованием алгоритма Фаддеева — Леверье, представим в виде алгоритма.

Алгоритм.

Шаг 1. Задать (G, F, C, H) — представление многомерной непрерывной динамической системы (6).

Шаг 2. Сконструировать критериальную матрицу (22) многомерной динамической системы (6).

Шаг 3. Задать допустимое значение J'_D функционала вырождения J_D.

Шаг 4. Вычислить значение функционала вырождения J_D согласно соотношению (4).

Шаг 5. Проверить выполнение условия $J_D \geq J'_D$.

Шаг 6. В случае нарушения условия п. 5 осуществить переход к шагу 1 в целях корректировки параметров матричных системных компонентов (модификация матрицы входа G в целях изменения связей между сепаратными входами, модификация матрицы состояния F путем изменения структуры ее собственных значений и собственных векторов с помощью процедуры обобщенного модального управления, а также введение необходимых межканальных перекрестных связей, матрицы отношения „вход—выход“ H и т.д.); в случае выполнения условия — переход к шагу 7 алгоритма.

Шаг 7. Передача результата системному аналитику.

Заключение. Применение алгоритма Фаддеева — Леверье, дополненного теоремой Гамильтона — Кэли, позволяет с использованием свойств числа обусловленности и функционалов вырождения построить вещественнозначную конструкцию для критериальной матрицы отношения „вход—выход“ многомерных динамических систем, ориентированных на задачу априорного экспресс-контроля их вырождения в неподвижном состоянии (статике).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 17-01-00672, и финансовой поддержке Правительства Российской Федерации, грант 08-08.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Dorf R. C., Bishop R. H.* Modern Control Systems. Prentice Hall, 2010.

2. *Акунов Т. А., Ушаков А. В.* Синтез систем гарантированной модальной стабильности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003. № 4. С. 9—17.

3. *Слита О. В., Ушаков А. В.* Обеспечение инвариантности выхода непрерывной системы относительно экзогенных сигнальных и эндогенных параметрических возмущений: алгебраический подход // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2008. № 4. С. 24—32.
4. *Dudarenko N. A., Ushakov A. V.* Matrix formalism of degeneration monitoring problem for complex continuous dynamical systems under finite–dimantional exogenous actions // J. of Automation and Information Sciences. 2011. Vol. 43, N 6. P. 30—39.
5. *Никифоров В. О., Слита О. В., Ушаков А. В.* Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: Учеб. пособие. СПб: СПБГУ ИТМО, 2011. 231 с.
6. *Scogestad S., Havre K.* The use of RGA and conditional number as robustness mesures // European Symposium on Computer Aided Process Engineering-6. Part B. 1996. Vol. 20. P. S1005—S1010.
7. *Голуб Дж., Ван Лоун Ч.* Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999.
8. *Dudarenko N. A., Ushakov A. V.* Matrix formalism of the degeneration control problem of multichannel dynamical systems under vector stochastic exogenous impact of the colored noise type // J. of Automation and Information Sciences. 2013. Vol. 45, N 6. P. 36—47.
9. *Dudarenko N. A., Polyakova M. V., Ushakov A. V.* Control of degeneration of discrete multichannel systems with multiple discrete intervals // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2012. Vol. 48, N 5. P. 483—48.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1973.
11. *Wilkinson J. H.* The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford: Clarendon Press, 1965.
12. *Moore B. C.* Principal component analysis in linear systems: controlability, observability and model reduction // IEEE Transact. on Automatic Control. 1981. Vol. AC-26, N 1. P. 17—31.
13. *Birk W., Dudarenko N. A.* Reconfiguration of the air control system of a bark boiler // IEEE Transact. on Control Systems Technology. 2016. Vol. 24, N 2. P. 565—577.

Сведения об авторах

Нина Александровна Вундер — канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; инженер; E-mail: wunder.n@mail.ru

Наталия Александровна Дударенко — канд. техн. наук, доцент; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: dudarenko@yandex.ru

Виталий Геннадьевич Мельников — д-р техн. наук, доцент; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: vgmelnikov@corp.ifmo.ru

Поступила в редакцию
21.05.19 г.

Ссылка для цитирования: *Вундер Н. А., Дударенко Н. А., Мельников В. Г.* Формирование критериальных матриц многомерных динамических систем с использованием алгоритма Фаддеева — Леверье // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 9. С. 791—797.

FORMATION OF CRITERION MATRICES OF MULTI-DIMENSIONAL DYNAMICAL SYSTEMS USING THE FADDEEV — LEVERRIER ALGORITHM

N. A. Vunder, N. A. Dudarenko, V. G. Melnikov

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: dudarenko@yandex.ru

The problem of criterion matrices formation for the multidimensional dynamic systems is considered. The criterion matrices can be used for the properties analysis of a multidimensional system in a stationary state. The procedure of criterion matrices formation is considered in relation to the problem of estimating the tendency of multidimensional dynamic systems to degeneration, which is a measure of the robustness of a multidimensional system. The case of multidimensional continuous-time dynamic systems is considered as an example for criterion matrices construction. The problem is solved using the Faddeev — LeVerrier algorithm, which is supplemented by the Cayley — Hamilton theorem. The obtained real-valued construction for the formation of criterion matrices of the input-output relationship of multidimensional dynamical systems is focused on the problem of a priori express control of the degeneracy of dynamical systems of the multidimensional input — multidimensional output type in static.

Keywords: Faddeev — LeVerrier algorithm, condition number, degeneration, criterion matrix, Cayley — Hamilton theorem, degeneration factor

REFERENCES

1. Dorf R.C., Bishop R.H. *Modern Control Systems*, Prentice Hall, 2010.
2. Akunov T.A., Ushakov A.V. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2003, no. 4, pp. 503–510. (in Russ.)
3. Slita O.V., Ushakov A.V. *Journal of Computer and Systems Sciences International*, 2008, no. 4, pp. 518–526. (in Russ.)
4. Dudarenko N.A., Ushakov A.V. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2011, no. 6(43), pp. 30–39.
5. Nikiforov V.O., Slita O.V., Ushakov A.V. *Intellektual'noye upravleniye v usloviyakh neopredelennosti* (Intelligent Control under Uncertainty), St. Petersburg, 2011, 231 p. (in Russ.)
6. Scogestad S., Havre K. *European symposium on computer aided process engineering-6*. Part B, 1996, vol. 20, pp. S1005–S1010.
7. Golub G.H., Van Loan Ch.F. *Matrix Computations*, Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences, 1996, 728 p.
8. Dudarenko N.A., Ushakov A.V. *Journal of Automation and Information Sciences*, 2013, no. 6(45), pp. 36–47.
9. Dudarenko N.A., Polyakova M.V., Ushakov A.V. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*, 2012, no. 5(48), pp. 483–488.
10. Gantmacher F.R. *The Theory of Matrices*, AMS Chelsea Publishing: Reprinted by American Mathematical Society, 2000, 660 p.
11. Wilkinson J.H. *The algebraic eigenvalue problem*, Oxford, Clarendon Press, 1965.
12. Moore B.C. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1981, no. 1(AC-26), pp. 17–31.
13. Birk W., Dudarenko N.A. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2016, no. 2(24), pp. 565–577.

Data on authors

Nina A. Vunder — PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Engineer; E-mail: wunder.n@mail.ru

Natalia A. Dudarenko — PhD, Associate Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Engineer; E-mail: dudarenko@yandex.ru

Vitaly G. Melnikov — Dr. Sci., Associate Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: vgmelnikov@corp.ifmo.ru

For citation: Vunder N. A., Dudarenko N. A., Melnikov V. G. Formation of criterion matrices of multidimensional dynamical systems using the Faddeev — LeVerrier algorithm. *Journal of Instrument Engineering*. 2019. Vol. 62, N 9. P. 791—797 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-9-791-797