УДК 681.51
DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-10-886-892

АНАЛИЗ СВОЙСТВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. В. Быстров[1], В. В. Григорьев[1], О. К. Мансурова[2],
В. А. Петров[1], И. М. Першин[3]

[1] *Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия*
E-mail: grigvv@yandex.ru

[2] *Санкт-Петербургский горный университет,*
199106, Санкт-Петербург, Россия

[3] *Филиал Северо-Кавказского федерального университета, 357501, Пятигорск, Россия*

Установление параметрических связей между качественными характеристиками динамических процессов исследуемых систем и их фундаментальными свойствами (видами устойчивости и неустойчивости) позволяет разрабатывать эффективные технологии анализа поведения систем в условиях их функционирования и проектирования управляющих устройств — регуляторов, обеспечивающих требуемые показатели качества. Разработан единый подход к анализу функционирования непрерывных и дискретных динамических систем. Анализ включает построение эллипсоидальных оценок областей принадлежности динамических процессов, оценки допустимых изменений параметров, при выполнении условий качественной экспоненциальной устойчивости.

Ключевые слова: *качественная устойчивость, функция Ляпунова, достаточные условия, оценка производительности*

Введение. Установление параметрических связей между качественными характеристиками динамических процессов исследуемых систем и их фундаментальными свойствами (видами устойчивости и неустойчивости) позволяет разрабатывать эффективные технологии анализа поведения систем в условиях их функционирования и проектирования управляющих устройств — регуляторов, обеспечивающих требуемые показатели качества. В настоящей работе на основе метода Ляпунова и понятия качественной экспоненциальной устойчивости для непрерывных и дискретных динамических систем разработана методика построения областей допустимых изменений параметров, при которых гарантируются полученные оценки качества процессов.

Постановка задачи. Целью настоящей работы является разработка аналитических и вычислительных технологий для анализа качества процессов и проектирования управляющих устройств систем управления с использованием понятий качественной экспоненциальной устойчивости и неустойчивости, введенной в работах [1—7], для широкого класса динамических систем и объектов.

В работе рассматриваются дискретные и непрерывные динамические системы, описание которых задается уравнениями в пространстве состояний.

Описание движения дискретной системы задается разностным уравнением

$$x(m+1) = \mathrm{F}\Big(q\big(m, x(m)\big)\Big)x(m), \qquad (1)$$

где m — целое число, номер интервала дискретности; x — n-мерный вектор состояния; $\mathrm{F}(q(m,x(m)))$ — квадратная $(n\times n)$-матрица, элементы которой зависят от значений вектора изменяющихся параметров $q(m,x(m))$, компоненты которого, в свою очередь, зависят от номера интервала дискретности и вектора состояния, причем $q(m,x(m))$ — l-мерная векторозначная функция, непрерывная по каждой из переменных. Предполагается, что для произвольных m и

$x(m) \in R^n$ вектор изменяющихся параметров ограничен в пространстве параметров R^l некоторой односвязной замкнутой областью Dq, т.е. $q(m, x(m)) \in Dq$ при $\forall m$, $\forall x(m) \in R^n$.

Уравнение, описывающее поведение непрерывной динамической системы, задается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = F\Big(q\big(t, x(t)\big)\Big)x(t), \tag{2}$$

где все переменные и матрицы имеют тот же смысл, что и в уравнении (1). Предполагается, что при любых начальных условиях существует единственное решение уравнения (2).

Динамические свойства систем (1), (2) зависят от условий их устойчивости. В работах [1—7] на основе использования метода Ляпунова используется связь различных видов устойчивости с динамическими свойствами систем. Наиболее перспективны для анализа динамических свойств систем экспоненциальная и качественная экспоненциальная устойчивость и неустойчивость. Целью исследования является установление связи параметров, характеризующих эти виды устойчивости, с динамическими свойствами непрерывных и дискретных систем [7, 8].

Анализ свойств динамических систем. При анализе свойств систем будем использовать функции Ляпунова, задаваемые квадратичными формами вида

$$V\big(x\big) = x^T \mathrm{P} x \tag{3}$$

(Р — квадратная симметрическая и положительно определенная ($n \times n$)-матрица), а при оценке процессов — норму, порождаемую (3):

$$\|x\|_{\mathrm{v}} = \sqrt{x^T \mathrm{P} x}\,. \tag{4}$$

Если Р$=I$ — единичная матрица, то (4) определяет евклидову норму.

Экспоненциальная устойчивость (неустойчивость) характеризуется скоростью сходимости (расходимости) процессов, а качественная экспоненциальная устойчивость (неустойчивость) — двумя параметрами β и r, причем β определяет изменения осредненной составляющей, а r — отклонения (колебательность) траекторий движения от осредненной составляющей. Установим связь значений параметров α, β и r со свойствами динамических систем.

Положим, что для квадратичной функции Ляпунова (3) при определенных значениях параметра α дискретной системы (1) выполняется неравенство

$$V\big[x\big(m+1\big)\big] \le r^2 V\big[x\big(m\big)\big] \tag{5}$$

либо, для параметров β и r, неравенство

$$V\big[x\big(m+1\big) - \beta x\big(m\big)\big] \le r^2 V\big[x\big(m\big)\big]. \tag{6}$$

Для непрерывной системы (2) положим

$$\frac{d}{dt}V(x(t)) \le -2\alpha V(x(t)) \tag{7}$$

либо

$$V\left[\frac{d}{dt}x(t) - \beta x(t)\right] \le r^2 V\big[x(t)\big]. \tag{8}$$

Тогда для дискретных систем из условия (5) может быть получена оценка

$$\|x(m)\|_{\mathrm{v}} \le \rho\ \alpha^m \|x(0)\|_{\mathrm{v}}, \tag{9}$$

а из выполнения условия (6)

$$\left\|x(m) - \beta^m x(0)\right\|_{\mathrm{v}} \le \rho\Big[(\beta + r)^m - \beta^m\Big]\|x(0)\|_{\mathrm{v}}\,. \tag{10}$$

Для непрерывных систем выполнение условия (7) позволяет получить оценку

$$\|x(t)\|_{\mathrm{v}} \le \rho e^{\alpha t}\|x(0)\|_{\mathrm{v}}, \tag{11}$$

а из выполнения условия (8):

$$\left\|x(t)-e^{\beta t}x(0)\right\|_{\nu} \le \rho\left(e^{(\beta+r)t}-e^{\beta t}\right)\left\|x(0)\right\|_{\nu}. \tag{12}$$

Использование оценок (9)—(12) позволяет для текущего значения времени t ($t=mT$, T — интервал дискретности) строить оценочные эллипсоиды постоянного уровня, форма которых определяется матрицей P (4), а уровень — значением правой части неравенства в текущий момент времени, возведенным в квадрат. Центры эллипсоидов оценок, полученные по неравенствам (9) и (11), расположены в начале координат ($x = 0$), а центры эллипсоидов оценок, построенных с использованием неравенств (10) и (12), определяются текущими значениями вторых слагаемых левой части этих неравенств. Эллипсоидальные оценки строятся на основе уравнений, определяющих верхние границы их изменений, в соответствии с неравенствами (9)—(12):

$$\left\|x(t)-x'(t)\right\|_{\nu} = \eta_{\nu}(t), \tag{13}$$

где $\eta_{\nu}(t)$ — текущие значения правой части неравенств, а $x'(t)$ — текущее значение определяющего центр эллипсоида вектора (вторые слагаемые в правых частях (10) и (12)) в момент времени $t(t = mT)$. Построение эллипсоидов оценок, гарантирующих расположение траекторий движения динамических систем внутри эллипсоида оценки, проиллюстрировано на рис. 1. В дальнейшем будем рассматривать сечения эллипсоидов оценки и строить оценки процессов на плоскости в зависимости от значений параметров α, β и r.

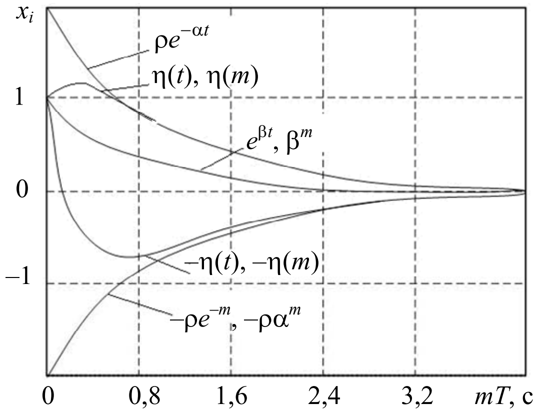

Рис. 1

Определим зависимости свойств динамических систем и оценки процессов от параметров α, β и r.

Определение 1. Непрерывная динамическая система обладает свойством качественной экспоненциальной устойчивости относительно положения равновесия x=0 во всем пространстве R^n, если существует такая квадратичная функция Ляпунова вида (3) и такие параметры β и r, значения которых ограничены $r > 0$ и $\beta + r < 0$, что для всех траекторий движения системы $x(t)$, исходящих из произвольных начальных условий $x(0)$, справедливо неравенство (8), при этом эллипсоидальные оценки процессов определяются неравенством (12).

Определение 2. Дискретная динамическая система обладает свойством качественной экспоненциальной устойчивости относительно положения равновесия x=0 во всем пространстве R^n, если существуют такая квадратичная функция Ляпунова вида (3) и такие параметры β и r, значения которых ограничены $r > 0$ и $-1 < \beta + r < 1$, что на всех траекториях движения системы $x(t)$ справедливо неравенство (6), при этом эллипсоидальные оценки процессов определяются неравенством (10).

Определение 3. Непрерывная (дискретная) динамическая система экспоненциально устойчива, если существует функция Ляпунова вида (3) и такое значение параметра $\alpha > 0$, а для дискретной системы $0 < \alpha < 1$, что для всех траекторий движения системы выполняется неравенство (7), а для дискретной системы (5) [3, 10].

Интерпретация построения эллипсоидальных оценочных „трубок“ качественной экспоненциальной и экспоненциальной устойчивости на плоскости для данных случаев приведена на рис. 2.

Введение свойства качественной экспоненциальной неустойчивости обусловлено необходимостью анализа поведения динамических систем в непредвиденных ситуациях, связанных с изменениями параметров, которые приводят к потере устойчивости. Эллипсоидальные оценочные „трубки“ позволяют получить информацию о допустимом времени достижения критических областей значений переменных, характеризующих текущее состояние динамической системы [11, 12].

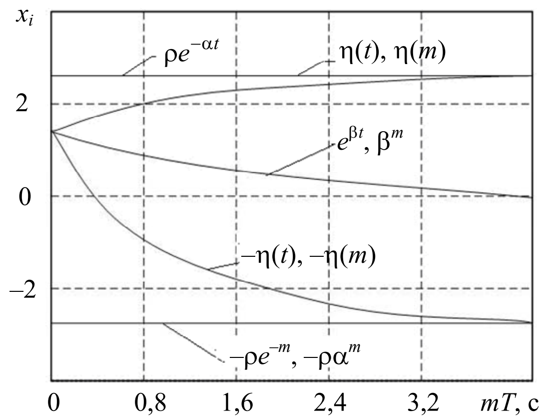

Рис. 2

Если в определении 1 для непрерывной динамической системы значения параметров β и r ограничены $r > 0$ и $0<\beta + r$, то система качественно экспоненциально неустойчива, и для оценки процессов справедливо неравенство (12) с соответствующими значениями параметров β и r.

Если в определении 2 для дискретной динамической системы значения параметров β и r ограничены $r > 0$ и $1<\beta + r$, то система качественно экспоненциально неустойчива и для оценки процессов справедливо неравенство (12) с соответствующими значениями параметров β и r.

Если в определении 3 для непрерывной (дискретной) динамической системы значения параметра $\alpha < 0$ (для дискретной $1 < \alpha$), то система обладает свойством экспоненциальной неустойчивости и для оценки процессов справедливо неравенство (11) (для дискретной неравенство (9)), с соответствующими значениями параметра α.

Введем для динамических систем еще одно свойство — нейтральную качественную устойчивость.

Для непрерывных динамических систем это свойство будет иметь место при $r > 0$ и $\beta + r \le 0$ с оценками вида (12). Для дискретных динамических систем это свойство будет иметь место при значениях параметров β и r, ограниченных $r > 0$ и $-1 < \beta + r \le 1$ с оценками вида (10).

Оценочные „трубки“ для этих случаев приведены на рис. 3.

Рассмотрим сформулированные свойства применительно к линейным стационарным динамическим системам. Положим, что в уравнениях (1) и (2) правые части зависят только от параметров q, т.е. их описание задается квадратной $(n\times n)$-матрицей $F(q)$, а q — вектор с постоянными параметрами. При этом для линейных систем различные свойства устойчивости однозначно связаны с расположением корней на комплексной плоскости модификаций уравнения Ляпунова при использовании конформных отображений. На рис. 4 приведены области расположения корней для случаев непрерывной (*а*) и дискретной (*б*) линейной системы соответственно. Эти области ограничены окружностями на комплексной плоскости с центром в точке $(j0, \beta)$ r радиуса. Отметим, что функции Ляпунова для оценки качества процессов или анализа динамических свойств системы получаются при синтезе законов управления на основе использования методов оптимального управления решением матричных уравнений типа Риккати [13].

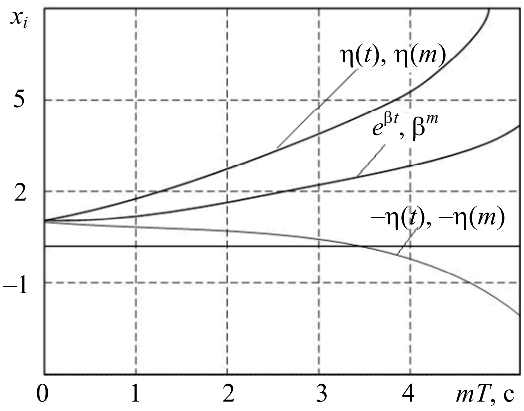

Рис. 3

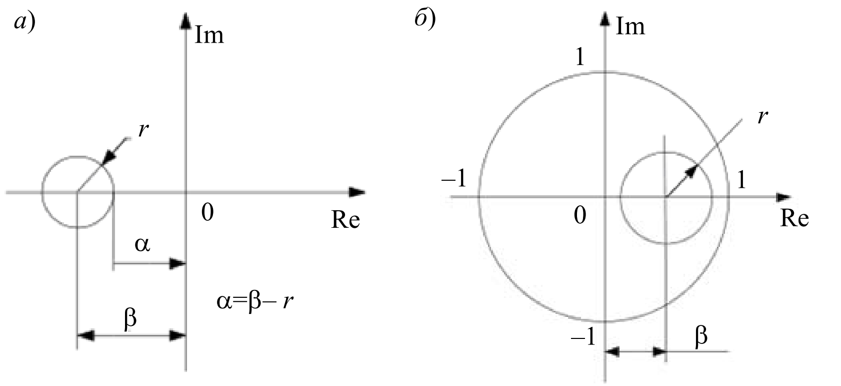

Рис. 4

Заключение. Анализ свойств динамических систем управлением подвижными объектами наиболее актуален для обеспечения безопасности сложных режимов посадки летательных аппаратов на подвижное и неподвижное основания. Предложенный подход эффективен также для систем пространственного слежения в режимах захвата и автосопровождения, траекторных движений в робототехнических комплексах, управлении химическими и другими видами технологических процессов повышенной аварийности [13, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.* Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л.: Машиностроение, 1983. 235 с.

2. *Фурасов В. Д.* Устойчивость движения, оценки и стабилизация. М.: Наука, 1977. 247 с.

3. *Бойков В. И., Григорьев В. В., Мансурова О. К., Михайлов С. В.* Качественная экспоненциальная стохастическая устойчивость дискретных систем // Изв. вузов. Приборостроение. 1998. Т. 41, № 7.

4. *Григорьев В. В.* Качественная экспоненциальная устойчивость непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 1—2.

5. *Grigoriev V. V., Mansurova O. K.* Qualitative exponential stability and instability of dynamical systems. Preprints of 5th IFAK Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'01). St. Petersburg, 2001.

6. *Nair G. N., Evans R. I.* Exponential stabilisability of finite-dimensional linear systems with limited data rates // Automatica. 2003. Vol. 39. P. 585—593.

7. *Быстров С. В., Григорьев В. В.* Qualitative Exponential Stability and Instability of Dynamical Systems and Range Estimation of Parameter Acceptable Changes // Universal J. of Control and Automation. 2013. Vol. 1, N 1. P. 15—18. DOI 10.13189.

8. *Быстров С. В., Григорьев В. В., Рабыш Е. Ю., Мансурова О. К.* Анализ качества переходных процессов в непрерывных и дискретных системах на основе условий качественной экспоненциальной устойчивости // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2012. № 9. С. 32—36.

9. *Григорьев В. В., Быстров С. В., Наумова А. К., Рабыш Е. Ю., Черевко Н. А.* Использование условий качественной экспоненциальной устойчивости для оценки динамических процессов // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54, № 6. С. 24—30.

10. *Бобцов А. А., Быстров С. В., Григорьев В. В., Дудров П. В., Козис Д. В., Костина О. В., Мансурова О. К.* Построение областей допустимых изменений параметров гарантированного качества процессов динамических систем // Мехатроника, автоматизация, управление. 2006. № 10. С. 2—5.

11. *Бушуев А. Б., Григорьев В. В., Петров В. А.* Синтез нелинейной системы автоматического управления движением интеллектуального агента на основе оптимального управления // Математические методы в технике и технологиях. 2018. Т. 2. С. 73—77.

12. *Быстров С. В., Григорьев В. В., Першин И. М., Мансурова О. К.* Синтез линейно-квадратичных законов управления для непрерывных динамических объектов // Международный научно-исследовательский журнал. 2017. № 2—3(56). С. 97—100.

13. *Бушуев А. Б., Григорьев В. В., Петров В. А.* Синтез позитивных нелинейных систем на основе методов оптимального управления // Мехатроника, автоматизация, управление. 2019. Т. 20, № 2. С. 67—71.

14. *Быстров С. В., Григорьев В. В., Мансурова О. К., Першин И. М.* Синтез полиномиальных законов управления для непрерывных динамических объектов // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 5. С. 398—403.

Сведения об авторах

Сергей Владимирович Быстров — канд. техн. наук, доцент; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: sbystrov@mail.ru

Валерий Владимирович Григорьев — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: grigvv@yandex.ru

Ольга Карибековна Мансурова — канд. техн. наук, доцент; Горный университет; кафедра автоматизации технологических процессов и производств; E-mail: erke7@mail.ru

Вадим Аркадьевич Петров — аспирант; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: grigvv@yandex.ru

Иван Митрофанович Першин — д-р техн. наук, профессор; Филиал Северо-Кавказского федерального университета; E-mail: ivmp@yandex.ru

Поступила в редакцию
21.05.19 г.

Ссылка для цитирования: *Быстров С. В., Григорьев В. В., Мансурова О. К., Петров В. А., Першин И. М.* Анализ свойств динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 10. С. 886—892.

ANALYSIS OF DYNAMIC SYSTEM PROPERTIES

S. V. Bystrov[1], V. V. Grigoriev[1], O. K. Mansurova[2], V. A. Petrov[1], I. M. Pershin[3]

[1]*ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia*
E-mail: grigvv@yandex.ru

[2] *St. Petersburg Mining University, 199106, St. Petersburg, Russia*

[3]*North-Caucasus Federal University, Branch in Pyatigorsk, 357501, Pyatigorsk, Russia*

The possibility of using recognized parametric relations between qualitative characteristics of dynamic processes in analyzed system and its fundamental features (types of stability and instability) for development of effective techniques of the system function analysis in various conditions and for design of control devices – regulators providing the required performance quality is considered. For continuous and discrete dynamic systems, a unified approach to the analysis of their functioning properties is developed.

The analysis includes a procedure for constructing ellipsoidal estimates of the areas of dynamic processes behavior parameters and estimating permissible parameter changes under the conditions of qualitative exponential stability.

Keywords: qualitative stability, Lyapunov function, sufficient conditions, performance estimates

REFERENCES

1. Grigor'yev V.V., Drozdov V.N., Lavrent'yev V.V., Ushakov A.V. *Sintez diskretnykh regulyatorov pri pomoshchi EVM* (The synthesis of discrete controllers using computers), Leningrad, 1983, 235 p. (in Russ.)
2. Furasov V.D. *Ustoychivost' dvizheniya, otsenki i stabilizatsiya* (Stability, assessment and stabilization), Moscow, 1977, 247 p. (in Russ.)
3. Boykov V.I., Grigor'yev V.V., Mansurova O.K., Mikhaylov S.V. *Journal of Instrument Engineering*, 1998, no. 7(41). (in Russ.)
4. Grigor'yev V.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2000, no. 1-2(43). (in Russ.)
5. Grigoriev V.V., Mansurova O.K. *Preprints of 5th IFAK Symposium on Nonlinear Control Systems (NOLCOS'01)*, St. Petersburg, 2001.
6. Nair G.N., Evans R.I. *Automatica*, 2003, vol. 39, pp. 585–593.
7. Bystrov S.V., Grigor'yev V.V. *Universal Journal of Control and Automation*, 2013, no. 1(1), pp. 15–18, DOI 10.13189.
8. Bystrov S.V., Grigor'yev V.V., Rabysh E.Yu., Mansurova O.K. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2012, no. 9, pp. 32–36. (in Russ.)
9. Grigor'yev V.V., Bystrov S.V., Naumova A.K., Rabysh E.Yu., Cherevko N.A. *Journal of Instrument Engineering*, 2011, no. 6(54), pp. 24-30. (in Russ.)
10. Bobtsov A.A., Bystrov S.V., Grigor'yev V.V., Dudrov P.V., Kozis D.V., Kostina O.V., Mansurova O.K. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2006, no. 10, pp. 2–5. (in Russ.)
11. Bushuyev A.B., Grigor'yev V.V., Petrov V.A. *Matematicheskiye metody v tekhnike i tekhnologiyakh – MMTT* (Mathematical Methods in Engineering and Technology – MMTT), 2018, vol. 2, pp. 73–77. (in Russ.)
12. Bystrov S.V., Grigor'yev V.V., Pershin I.M., Mansurova O.K. *Meždunarodnyj naučno-issledovatel'skij žurnal* (International Research Journal), 2017, no. 2-3(56), pp. 97–100 (in Russ.)
13. Bushuyev A.B., Grigor'yev V.V., Petrov V.A. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*, 2019, no. 2(20), pp. 67–71 (in Russ.)
14. Bystrov S.V., Grigor'yev V.V., Mansurova O.K., Pershin I.M. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, no. 5(60), pp. 398–403 (in Russ.)

Data on authors

Sergey V. Bystrov — PhD, Associate Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: sbystrov@mail.ru

Valery V. Grigoriev — Dr. Sci, Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics;; E-mail: grigvv@yandex.ru

Olga K. Mansurova — PhD, Associate Professor; St. Petersburg Mining University, Department of Automation of Technological Processes and Productions; E-mail: erke7@mail.ru

Vadim A. Petrov — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: grigvv@yandex.ru

Ivan M. Pershin — PhD, Professor; North-Caucasus Federal University, Branch in Pyatigorsk; E-mail: ivmp@yandex.ru

For citation: Bystrov S. V., Grigoriev V. V., Mansurova O. K., Petrov V. A., Pershin I. M. Analysis of dynamic system properties. *Journal of Instrument Engineering*. 2019. Vol. 62, N 10. P. 886—892 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-10-886-892