

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ТОЧНОСТИ МНОГОЗВЕННЫХ ЗУБЧАТЫХ МЕХАНИЗМОВ

Б. П. ТИМОФЕЕВ, М. В. АБРАМЧУК, И. А. БЖИХАТЛОВ

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: abramchukmv@ifmo.ru*

Рассмотрены методы расчета параметров кинематической точности многозвенных зубчатых механизмов — кинематической погрешности. Данная погрешность рассматривается как функция, содержащая набор составляющих определенных частот и амплитуд. Определена погрешность монтажа, обычно не учитываемая при расчете кинематической погрешности. Конечные расчеты приводятся к выходному зубчатому колесу исследуемого многозвенного механизма. Для расчета кинематической погрешности применяются метод максимума-минимума, а также метод вероятностный расчет по методу Монте-Карло. Предложен метод расчета кинематической погрешности, который учитывает специфику производства зубчатых механизмов. В условиях конкретного производства, если известен разброс значений составляющих погрешностей, вероятностный расчет кинематической погрешности дает более точные результаты в сравнении с методом максимума-минимума.

***Ключевые слова:** стандарты, кинематическая точность, зубчатые передачи, метод максимума-минимума, зубчатые колеса, ГОСТ 1643-81, ISO 1328, метод Монте-Карло, кинематическая погрешность*

**Введение.** В настоящее время не сформулированы критерии сравнения отечественных зубчатых передач (ЗП) с зарубежными, потому что по стандартам определяется в основном точность зубчатых колес (нормы кинематической точности, плавности и контакта зубьев), а определение точности ЗП (в т.ч. и норм бокового зазора) недостаточно раскрыто. Поэтому внедрение новых стандартов, с учетом всех приведенных исследователями в данной области (в число которых входят и авторы) предложений, а также с учетом зарубежных стандартов, в том числе рекомендаций ISO [1, 2] — несомненно, важная задача [3]. Новые стандарты для зубчатых колес должны устанавливать параметры точности передачи относительно базовых осей [4, 5]. Стандарты для ЗП и многозвенных зубчатых механизмов должны иметь расчетный характер, это обеспечит переход от геометрокинематических характеристик элементов ЗП к функциональным характеристикам передач, а также многозвенных зубчатых механизмов.

В документах, регламентирующих расчет параметров точности ЗП при построении механизмов для определения точностных параметров ЗП, нужно учитывать помимо погрешности колес передачи погрешности монтажа зубчатых колес и других элементов ЗП. Точностные стандарты должны содержать типовые схемы ЗП — это поможет определять влияние элементов ЗП на ее точность.

Предполагается, что в стандартах предприятий должны быть описаны методы расчета параметров точности ЗП и многозвенных зубчатых механизмов, поскольку

- 1) на различных предприятиях используются индивидуальные схемы передач,
- 2) технологии изготовления и контроля точности зубчатых колес и передач зависят от специфики предприятия.

В основу стандартов предприятий, таким образом, будут положены:

- методика выбора границ зоны рассеивания точностных параметров ЗП;
- определенные на основе большого числа измеренных передач в выборке законы распределения точностных параметров ЗП внутри зоны рассеивания;
- числовые характеристики распределения параметров точности (если законы распределения невозможно установить).

Для единичного и мелкосерийного производства необходимо использовать отдельные нормативные документы.

**Расчет кинематической погрешности многозвенного зубчатого механизма.** Зубчатые механизмы можно разделить на элементарные (обычно содержат два подвижных звена — два колеса либо колесо и рейка, и неподвижное звено — стойку) и многозвенные (зубчатые передачи простого ряда, а также планетарные и дифференциальные механизмы).

Комплексным показателем нормы кинематической точности, т.е. точности передачи вращения с одного колеса передачи на другое, является кинематическая погрешность ЗП. На основе метода расчета кинематической погрешности (КП), предложенного в работах [6, 7], КП многозвенного механизма будет определяться следующим образом. Кинематические погрешности многозвенного механизма считаются для каждой ступени и приводятся к выходному звену (колесу). Многозвенный зубчатый механизм разделяется на  $N$  зубчатых передач. Для каждой передачи на производстве с помощью типовых схем ЗП, выявленных опытным путем границ зоны рассеивания, а также законов распределения погрешностей внутри зоны или числовых характеристик распределения параметров точности определяется КП ступеней.

Стоит напомнить, что КП — это функция, или же совокупность гармонических составляющих, каждая представляет собой случайную функцию, у которой есть частота, амплитуда и начальная фаза. Существенный вклад в величину КП передачи вносят гармонические составляющие с частотами повторений  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_z$  за период (за полный цикл изменения относительного положения зубчатых колес);  $k_1$  соответствует числу оборотов шестерни,  $k_2$  — числу оборотов колеса,  $k_z$  — числу входов зубьев в зацепление [8].

КП для каждой из ступеней определяется по следующему выражению:

$$F'_{i0} = \left[ F_{P1} \sin(k_1\varphi_1 + \varphi_{P1H}) + f_{f1} + E_{\Sigma M1} \right] + \left[ F_{P2} \sin(k_2\varphi_1 + \varphi_{P2H}) + f_{f2} + E_{\Sigma M2} \right] + f_{zz0} \sin(k_z\varphi_1 + \varphi_{zz0H}), \quad (1)$$

где  $F_{Pi}$  — допуск на накопленную погрешность шага шестерни и колеса;  $E_{\Sigma Mi}$  — суммарная приведенная погрешность монтажа;  $f_{fi}$  — допуск на погрешность профиля зуба;  $\varphi_{PiH}$ ,  $\varphi_{zz0H}$  — начальные фазы;  $\varphi_1$  — угол поворота шестерни;  $f_{zz0}$  — допуск на погрешность зубцовой частоты; индексы 1 и 2 у слагаемых относятся соответственно к шестерне и колесу ступени.

Функция погрешности профиля зуба  $f_{fi}$  шестерни и колеса имеет высокую частоту, и, как следствие, эти слагаемые не записываются в формуле (1) в гармоническом виде.

Суммарная приведенная погрешность монтажа составляет

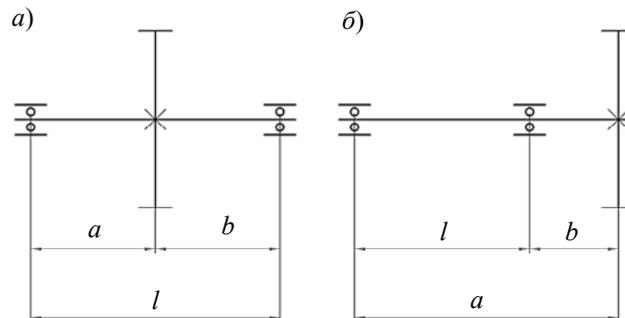
$$E_{\Sigma M} = \frac{e_r \operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta} + e_a \operatorname{tg} \beta, \quad (2)$$

где  $e_r$  и  $e_a$  — монтажные радиальное и осевое биения зубчатого колеса соответственно (показатели точности монтажа зубчатых колес);  $\alpha$  — угол исходного профиля колеса;  $\beta$  — делительный угол наклона линии зуба.

Для простоты рассмотрим прямоугольную цилиндрическую ЗП, в ней монтажным осевым биением можно пренебречь, тогда

$$E_{\Sigma M} = e_r \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (3)$$

Зубчатое колесо на валах может быть расположено между подшипниками (межопорное расположение, см. рисунок, а), а также справа или слева от пары подшипников (консольное расположение, см. рисунок, б).



Монтажное радиальное биение зубчатого колеса [7] описывается следующим выражением:

$$e_r = \left( F_r + e_{\text{п}} + e_{\text{в}} + K_{i\alpha} \frac{a+b}{l} \right), \quad (4)$$

где  $F_r$  — допуск на радиальное биение зубчатого венца колеса (берется согласно величине модуля зубьев: для модулей  $m < 1$  мм — по ГОСТ 9178–81, для  $m \geq 1$  — по ГОСТ 1643–81);  $e_{\text{в}}$  — допуск на радиальное биение посадочной ступени вала под зубчатое колесо относительно цапфы вала, для гладких валов  $e_{\text{в}} = 0$  (определяется согласно ГОСТ 24643–81);  $K_{i\alpha}$  — радиальное биение внутреннего кольца собранного подшипника качения (согласно ГОСТ 520–2011);  $e_{\text{п}}$  — зазор в посадке колеса на вал, зависящий от конструкции соединения; размеры  $a$ ,  $b$  и  $l$  определяются (см. рисунок) исходя из конкретного варианта фиксации зубчатого колеса на валу механизма.

Выполним перевод величины КП ступени механизма в угловые единицы:

$$\delta\varphi = \frac{360 \cdot 60 \cdot F'_{i0}}{\pi \cdot 1000 \cdot m \cdot z} = 6,88 \frac{F'_{i0}}{d}, \text{ угл. мин.}, \quad (5)$$

где  $d$  — делительный диаметр ведомого колеса ступени;  $m$  — модуль зацепления.

Формула для расчета КП многозвенного зубчатого механизма, приведенной к выходному ( $n$ -му) колесу, будет иметь вид:

$$\delta\varphi_{\Sigma} = \frac{\delta\varphi_{12}}{i_{3n}} + \frac{\delta\varphi_{34}}{i_{5n}} + \dots + \delta\varphi_{n-1,n}, \text{ угл. мин.}, \quad (6)$$

где  $i_{3n}$ ,  $i_{5n}$  — передаточные отношения от 3-го и 5-го колес к выходному ( $n$ -му) колесу многозвенного механизма.

**Вероятностный расчет.** Для этого варианта расчета применяется метод Монте-Карло — статистическое моделирование случайных чисел при численном решении математических задач [9, 10]. Для определения КП многозвенного зубчатого механизма вероятностным методом применяется алгоритм расчета, выведенный для простой ЗП [6, 7]:

- выводится выражение для расчета КП ступени многозвенного механизма (1);
- рассчитываются период и частоты повторений  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_z$  во всех ступенях механизма;
- в ступенях многозвенного механизма амплитуды  $F_P$  и  $f_{z0}$ , допуски  $f_f$ , начальные фазы

$\varphi_{P1n}$ ,  $\varphi_{P2n}$ ,  $\varphi_{z0n}$  — используются в качестве случайных величин из заданного диапазона.

Для расчета используется генератор случайных чисел;

- определяются диапазоны значений для слагаемых ступени (для начальных фаз пределы лежат в диапазоне от 0 до  $2\pi$ ): берутся из стандартов точности на ЗП (верхнее значение — по используемой степени точности, нижнее — на 1—2 степени точнее) или опытным путем, т.е. на основе измерений точностных параметров для выборки ЗП на предприятии;
- для всех случайных величин в выражении (1) задается распределение;
- значения угловой величины  $\varphi_1$  в выражение (1) подставляются с определенным шагом от начала до конца периода;
- наибольшая КП ступени  $F'_{i0}$  приравнивается разности между максимумом максимумов и минимумом минимумов значений  $F'_{i0}$ , полученным по формуле (1);
- рассчитывается значение кинематической погрешности многозвенного зубчатого механизма, приведенное к выходному звену согласно формуле (6).

**Метод максимума-минимума.** Предельные значения кинематической погрешности ступени механизма по методу максимума-минимума составляют

$$F'_{i0\max} = [F_{P1} + f_{f1} + E_{\Sigma M_1}] + [F_{P2} + f_{f2} + E_{\Sigma M_2}] + f_{zz0}, \quad (7)$$

$$F'_{i0\min} = [-F_{P1} + f_{f1} + E_{\Sigma M_1}] + [-F_{P2} + f_{f2} + E_{\Sigma M_2}] - f_{zz0}. \quad (8)$$

Знак „–“ в формуле (8) появляется при минимумах синуса функции соответствующих параметров.

Наибольшая кинематическая погрешность ступени равна  $F'_{i0} = F'_{i0\max} - F'_{i0\min}$ .

Если необходимо использовать метод минимума, то в выражения (7), (8) ставятся величины допусков из соответствующих стандартов на 1—2 степени точности выше, чем у ступени передачи.

После определения кинематической погрешности каждой ступени для расчета кинематической погрешности многозвенного механизма используются выражения (5) и (6).

Стоит подчеркнуть, что использование метода максимума дает большие значения ошибки положения (кинематической погрешности), по сравнению с вероятностным методом.

Лучшая сходимость расчетных и экспериментальных данных обеспечивается при расчете по законам распределения погрешностей, полученным опытным путем на производстве, а не по допускам на погрешности, взятым из соответствующих стандартов [11, 12].

**Заключение.** В статье рассмотрен вероятностный расчет параметров кинематической точности многозвенных зубчатых механизмов. В частности, предложен расчет наибольшей кинематической погрешности многозвенного зубчатого механизма вероятностным методом и методом максимума-минимума с описанием алгоритма расчета, и ее приведением к выходному зубчатому колесу механизма. Применение вероятностного метода в большей мере позволяет учитывать особенности производства зубчатых колес и передач, нежели использование метода максимума, согласно которому все погрешности принимают максимальное значение.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ISO 1328-1:2013, Cylindrical gears — ISO system of flank tolerance classification. Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to flanks of gear teeth.
2. ISO 1328-2:1997, Cylindrical gears — ISO system of accuracy. Part 2: Definitions and allowable values of deviations relevant to radial composite deviations and runout information.
3. Тимофеев Б. П., Абрамчук М. В. Сравнение табличных значений параметров точности зубчатых колес и передач в стандартах: ISO 1328 и ГОСТ 1643-81 // 7-я сессия междунар. науч. школы „Фундаментальные и прикладные проблемы надежности и диагностики машин и механизмов“. 2005. С. 90.
4. Тимофеев Б. П., Абрамчук М. В. Нормы точности зубчатых колес и передач: нужен новый стандарт // Стандарты и качество. 2010. № 5. С. 60—63.

5. Тимофеев Б. П., Новиков Д. В. Повышение качества зубчатых колес и передач путем разработки новых стандартов // Приборы. 2013. № 9. С. 37—40.
6. Абрамчук М. В. Расчет параметров точности эвольвентных цилиндрических зубчатых передач // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 2. С. 118—122. DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-2-118-122.
7. Абрамчук М. В. Вероятностный метод расчета параметров точности эвольвентных цилиндрических зубчатых передач // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 8. С. 619—624. DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-8-619-624.
8. Абрамчук М. В. Совершенствование расчетов параметров точности зубчатых колес, зубчатых передач и многозвенных зубчатых механизмов: Дис. канд. техн. наук. СПб, 2014. 158 с.
9. Соболев И. М. Метод Монте-Карло. М.: Наука, 1978. 64 с.
10. Голенко Д. И. Моделирование и статистический анализ псевдослучайных чисел на электронных вычислительных машинах. М.: Наука, 1965. 228 с.
11. Тимофеев Б. П., Дундин Н. И. Характеристики распределения погрешностей зубчатых колес приборов // Изв. вузов. Приборостроение. 1988. № 4. С. 42—46.
12. Дундин Н. И. Повышение точности зубчатых колес и передач навигационных приборов: Дис. ... канд. техн. наук. Л., 1985. 323 с.

#### Сведения об авторах

- Борис Павлович Тимофеев** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, факультета систем управления и робототехники; E-mail: timofeev@mail.ifmo.ru
- Михаил Владимирович Абрамчук** — канд. техн. наук; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; преподаватель; E-mail: abramchukmv@corp.ifmo.ru
- Ислам Асланович Бжихатлов** — аспирант; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: bia@itmo.ru

Поступила в редакцию  
02.08.19 г.

**Ссылка для цитирования:** Тимофеев Б. П., Абрамчук М. В., Бжихатлов И. А. Определение параметров точности многозвенных зубчатых механизмов // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 12. С. 1092—1097.

## DETERMINATION OF ACCURACY PARAMETERS OF MULTI-STAGED GEAR MECHANISMS

B. P. Timofeev, M. V. Abramchuk, I. A. Bzhikhatlov

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia  
E-mail: timborp@rambler.ru

Methods of calculating the kinematic accuracy parameters, or the tangential composite deviation of multi-staged gear mechanisms are considered. This error is considered as a function containing a set of components of certain frequencies and amplitudes. The installation error, which usually is not taken into account in the calculation of the tangential composite deviation, is also considered. Final calculations are reduced to the output gear wheel of the studied multi-staged mechanism. To calculate the kinematic error, the maximum-minimum method is used, as well as the Monte Carlo probabilistic calculation method. A method of calculating the kinematic error, which accounts for features of the gear mechanisms production, is proposed. In the conditions of a specified production, if the spread of the values of the error components is known, the probabilistic calculation of the kinematic error is stated to give more accurate results as compared with the maximum-minimum method.

**Keywords:** standards, kinematic accuracy, gears, maximum-minimum method, gear wheel, GOST 1643-81, ISO 1328, Monte Carlo method, tangential composite deviation

#### REFERENCES

1. ISO 1328-1:2013, *Cylindrical gears – ISO system of flank tolerance classification*, Part 1: Definitions and allowable values of deviations relevant to flanks of gear teeth.
2. ISO 1328-2:1997, *Cylindrical gears – ISO system of accuracy*, Part 2: Definitions and allowable values of deviations relevant to radial composite deviations and runout information.
3. Timofeev B.P., Abramchuk M.V. *Fundamental'nyye i prikladnyye problemy nadezhnosti i diagnostiki mashin i mekhanizmov* (Fundamental and Applied Problems of Reliability and Diagnostics of Ma-

- chines and Mechanisms), 7th session of the International Scientific School, Program and Abstracts, 2005, pp. 90. (in Russ.)
4. Timofeev B.P., Abramchuk M.V. *Standards and Quality*, 2010, no. 5, pp. 60–63.
  5. Timofeev B.P., Novikov D. V. *Pribory*, 2013, no. 9, pp. 37–40. (in Russ.)
  6. Abramchuk M.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2018, no. 2(61), pp. 118–122. (in Russ.) DOI: 10.17586/0021-3454-2018-61-2-118-122.
  7. Abramchuk M.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2016, no. 8(59), pp. 619–624. DOI: 10.17586/0021-3454-2016-59-8-619-624.
  8. Abramchuk M.V. *Sovershenstvovaniye raschetov parametrov tochnosti zubchatykh koles, zubchatykh peredach i mnogozvennykh zubchatykh mekhanizmov* (Improving the Calculation of Accuracy Parameters of Gears, Gears and Multi-Link Gears), Candidate's thesis, St. Petersburg, 2014, 158 p. (in Russ.)
  9. Sobol' I.M. *Metod Monte-Karlo* (Monte Carlo Method), Moscow, 1978, 64 p. (in Russ.)
  10. Golenko D.I. *Modelirovaniye i statisticheskiy analiz psevdosluchaynykh chisel na elektronnykh vychislitel'nykh mashinakh* (Modeling and Statistical Analysis of Pseudorandom Numbers on Electronic Computers), Moscow, 1965, 228 p. (in Russ.)
  11. Timofeev B.P., Dundin N.I. *Journal of Instrument Engineering*, 1988, no. 4, pp. 42–46. (in Russ.)
  12. Dundin N.I. *Povysheniye tochnosti zubchatykh koles i peredach navigatsionnykh priborov* (Improving the Accuracy of Gears and Gears of Navigation Devices), Candidate's thesis, Leningrad, 1985, 323 p. (in Russ.)

#### Data on authors

- |                             |   |                                                                                                                                                   |
|-----------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Boris P. Timofeev</b>    | — | Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: timofeev@mail.ifmo.ru                                      |
| <b>Mikhail V. Abramchuk</b> | — | PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Lecturer; E-mail: abramchukmv@corp.ifmo.ru                                         |
| <b>Islam A. Bzhikhatlov</b> | — | Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Assistant; E-mail: abramchukmv@corp.ifmo.ru; E-mail: bia@itmo.ru |

**For citation:** Timofeev B. P., Abramchuk M. V., Bzhikhatlov I. A. Determination of accuracy parameters of multi-staged gear mechanisms. *Journal of Instrument Engineering*. 2019. Vol. 62, N 12. P. 1092—1097 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-12-1092-1097