

## МЕТОДИКА УТОЧНЕНИЯ АПРИОРНЫХ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

В. Н. АРСЕНЬЕВ, А. Б. ПЕТУХОВ, А. А. ЯДРЕНКИН

*Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, 197198, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: andrey\_11\_75@mail.ru*

Рассматривается задача уточнения априорных вероятностей гипотез о состоянии сложной системы по данным, получаемым в процессе ее опытной отработки и эксплуатации. Предложен метод решения этой задачи путем взвешенного учета результатов априорных и экспериментальных исследований системы. Приведены результаты сравнения апостериорных оценок с оценками, полученными по формулам Байеса. Показано, что, в отличие от байесовского решения, использование предложенного метода позволяет учитывать близость результатов априорных исследований системы к результатам опытов и не позволяет априорной информации доминировать над опытными данными.

*Ключевые слова:* сложная система, состояние системы, априорная вероятность, опытные данные, метод приоритета опытной информации, апостериорная вероятность, байесовские оценки, сравнительный анализ

**Введение.** На качество функционирования сложной системы оказывают влияние различные внешние и внутренние факторы, которые могут изменять состояние системы, характеризующее совокупностью некоторых величин — признаков. В зависимости от значений этих признаков сложная система может быть исправной или неисправной, правильно функционирующей или неправильно функционирующей и т. д. В качестве основы для принятия решения о состоянии системы часто используется математический аппарат теории распознавания образов [1—4]. При этом состояние сложной системы рассматривается как объект распознавания, число и виды состояний задаются с учетом цели распознавания и условий его проведения. Во многих случаях полагается, что события, характеризующие то или иное состояние системы, являются несовместными и образуют полную группу, а также имеется некоторая априорная информация о вероятностях появления этих событий [5, 6]. Уточнение этих вероятностей осуществляется по мере поступления результатов экспериментальных исследований системы, например, в процессе опытной отработки и эксплуатации [5—12]. Основой для решения данной задачи является формула Байеса [5]. Подробный анализ существующих подходов к определению вероятностей технических состояний сложной системы как объекта диагностирования приведен в работе [13]. Однако эти подходы не лишены известного недостатка, связанного с неопределенностью выбора априорного распределения и отсутствием проверки его соответствия полученным опытными данным [6]. Уменьшить эту неопределенность, по мнению авторов, позволяет метод приоритета опытной информации (ПОИ) [12].

**Постановка задачи.** Рассматривается сложная система, которая может находиться в одном из  $m$  состояний с неизвестной вероятностью  $p_i, i = \overline{1, m}$ . На предварительных (доопытных) этапах исследований сложной системы получены априорные оценки  $p_{pi}$  вероятности

того, что система находится в  $i$ -м состоянии, причем  $\sum_{i=1}^m p_{pi} = 1$ .

В процессе экспериментальных исследований в течение некоторого периода времени  $T$  было зафиксировано, что система находилась в  $i$ -м состоянии  $x_i$  раз.

Полагается, что число  $N_o = \sum_{i=1}^m x_i$  значительно больше  $m$ . Необходимо определить апостериорные оценки  $p_{ai}, i = \overline{1, m}$ , вероятности состояний системы, учитывающие результаты ее априорных и экспериментальных исследований.

**Определение апостериорных оценок вероятностей состояний системы.** Как следует из постановки задачи, величины  $x_i, i = \overline{1, m}$ , подчинены полиномиальному закону распределения, в соответствии с которым вероятность того, что система будет находиться в 1-м состоянии  $x_1$  раз, во 2-м состоянии —  $x_2$  раз, ..., в  $m$ -м состоянии —  $x_m$  раз, определяется формулой [6, 14]

$$P(x_1, x_2, \dots, x_m; p_1, p_2, \dots, p_m) = C_o p_1^{x_1} p_2^{x_2} \dots p_m^{x_m}, \quad (1)$$

где  $C_o = \frac{N_o!}{x_1! x_2! \dots x_m!}$ .

Зная распределение величин  $x_i, i = \overline{1, m}$ , методом максимального правдоподобия можно найти опытные оценки  $p_{oi}, i = \overline{1, m}$ , вероятностей состояний системы  $p_i, i = \overline{1, m}$ , обеспечивающие максимум функции (1) или логарифма этой функции при условии  $\sum_{i=1}^m p_i = 1$ . Данная

задача решается методом неопределенных множителей Лагранжа. В соответствии с этим методом формируется функция [15]

$$J_o = \ln C_o + \sum_{i=1}^m x_i \ln p_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^m p_i - 1 \right), \quad (2)$$

где  $\lambda$  — неопределенный множитель Лагранжа.

Необходимые условия максимума функции (2) определяются как

$$\left. \frac{\partial J_o}{\partial p_i} \right|_{p_i=p_{oi}} = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \left. \frac{\partial J_o}{\partial \lambda} \right|_{p_i=p_{oi}} = 0$$

или

$$\frac{x_i}{p_{oi}} + \lambda = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^m p_{oi} = 1. \quad (4)$$

Из системы уравнений (3) формируются оценки  $p_{oi} = -x_i/\lambda, i = \overline{1, m}$ , подстановка которых в уравнение (4) дает  $\lambda = -\sum_{i=1}^m x_i = -N_o$  и окончательные выражения для определения опытных оценок вероятностей состояний системы:

$$p_{oi} = \frac{x_i}{N_o}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (5)$$

Тогда формулу (1) можно представить в виде

$$P_o(p_{o1}, p_{o2}, \dots, p_{om}; p_1, p_2, \dots, p_m) = C_o p_1^{N_o p_{o1}} p_2^{N_o p_{o2}} \dots p_m^{N_o p_{om}}. \quad (6)$$

В соответствии с методом ПОИ определяется отношение правдоподобия [16], характеризующее близость априорных оценок  $p_{pi}, i = \overline{1, m}$ , к опытным оценкам  $p_{oi}, i = \overline{1, m}$ :

$$v^* = \frac{P(x_1, x_2, \dots, x_m; p_{p1}, p_{p2}, \dots, p_{pm})}{P(x_1, x_2, \dots, x_m; p_{o1}, p_{o2}, \dots, p_{om})} = \frac{p_{p1}^{N_o p_{o1}} p_{p2}^{N_o p_{o2}} \dots p_{pm}^{N_o p_{om}}}{p_{o1}^{N_o p_{o1}} p_{o2}^{N_o p_{o2}} \dots p_{om}^{N_o p_{om}}} = \left[ \prod_{i=1}^m \left( \frac{p_{pi}}{p_{oi}} \right)^{p_{oi}} \right]^{N_o}. \quad (7)$$

Для априорных вероятностей  $p_{pi}, i = \overline{1, m}$ , вводится функция, аналогичная функции (6):

$$P_p(p_{p1}, p_{p2}, \dots, p_{pm}; p_1, p_2, \dots, p_m) = C_p p_1^{N_p p_{p1}} p_2^{N_p p_{p2}} \dots p_m^{N_p p_{pm}}, \quad (8)$$

где  $C_p = \text{const}$ ,  $N_p = v^* N_o$ .

Апостериорные оценки  $p_{ai}, i = \overline{1, m}$ , вероятностей состояний сложной системы  $p_i, i = \overline{1, m}$ , должны обеспечивать максимум произведения функций (6) и (8) или логарифма произведения этих функций и в сумме давать единицу, т.е.

$$\{p_{ai}, i = \overline{1, m}\} = \arg \max_{p_i, i=1, m} \ln \left( C_o C_p p_1^{N_o p_{o1} + N_p p_{p1}} p_2^{N_o p_{o2} + N_p p_{p2}} \dots p_m^{N_o p_{om} + N_p p_{pm}} \right)$$

при условии  $\sum_{i=1}^m p_{ai} = 1$ .

Данная задача также решается методом неопределенных множителей Лагранжа. Функция Лагранжа в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} J_a &= \ln \left( C_o C_p p_1^{N_o p_{o1} + N_p p_{p1}} p_2^{N_o p_{o2} + N_p p_{p2}} \dots p_m^{N_o p_{om} + N_p p_{pm}} \right) + \lambda \left( \sum_{i=1}^m p_i - 1 \right) = \\ &= \ln(C_o C_p) + \sum_{i=1}^m (N_o p_{oi} + N_p p_{pi}) \ln p_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^m p_i - 1 \right) = \\ &= \ln(C_o C_p) + \sum_{i=1}^m N_o (p_{oi} + v^* p_{pi}) \ln p_i + \lambda \left( \sum_{i=1}^m p_i - 1 \right). \end{aligned}$$

Апостериорные оценки должны удовлетворять необходимым условиям максимума функции  $J_a$ :

$$\left. \frac{\partial J_a}{\partial p_i} \right|_{p_i = p_{ai}} = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \left. \frac{\partial J_a}{\partial \lambda} \right|_{p_i = p_{ai}} = 0,$$

на основе которых формируются уравнения

$$\frac{N_o (p_{oi} + v^* p_{pi})}{p_{ai}} + \lambda = 0, \quad i = \overline{1, m}; \quad \sum_{i=1}^m p_{ai} = 1.$$

Решение этих уравнений с учетом  $\sum_{i=1}^m p_{pi} = 1$  и  $\sum_{i=1}^m p_{oi} = 1$  дает формулы для определения апостериорных оценок вероятностей состояний системы:

$$p_{ai} = \frac{p_{oi} + v^* p_{pi}}{1 + v^*}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Из выражения (9) видно, что апостериорные оценки содержат как априорные, так и опытные оценки вероятностей состояний системы, причем вес априорной информации зависит от ее близости к опытным данным и определяется величиной отношения правдоподобия  $0 \leq v^* \leq 1$ : чем ближе априорные данные к результатам опытов (чем больше  $v^*$ ), тем больше их вес в апостериорных оценках. Можно показать, что дисперсии опытных оценок больше дисперсий апостериорных оценок, что свидетельствует о более высокой точности последних. Методика сравнения оценок приведена в работе [17].

Следует отметить, что при проведении экспериментальных исследований в течение некоторого периода времени  $T$  может оказаться, что система находилась не во всех  $m$  состояниях, а лишь в части из них. Пусть, например, система не была в  $i$ -м состоянии. В этом случае  $x_i = 0$  и соответствующая опытная оценка вероятности этого состояния  $p_{oi} = 0$ . Тогда при вычислении отношения правдоподобия по формуле (7) в  $i$ -м сомножителе возникает неопределенность „бесконечность в нулевой степени“. Но поскольку  $\lim_{p_{oi} \rightarrow 0} \left( \frac{p_{pi}}{p_{oi}} \right)^{p_{oi}} = \lim_{p_{oi} \rightarrow 0} \left( \frac{1}{p_{oi}} \right)^{p_{oi}} = 1$ , то последний сомножитель в правой части формулы (9) равняется 1, а апостериорная оценка не обнуляется, как в методе Байеса, а уменьшается и принимает значение  $p_{ai} = \frac{v^* p_{pi}}{1 + v^*}$ .

Если, наоборот,  $x_i = N_0$  и соответственно  $p_{oi} = 1$ , то  $p_{ai} = \frac{1 + v^* p_{pi}}{1 + v^*}$ , а апостериорные оценки остальных вероятностей состояний системы  $p_{aj} = \frac{v^* p_{pj}}{1 + v^*}$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $j \neq i$ , также уменьшаются, но не принимают нулевые значения.

**Пример.** Рассмотрим сложную систему, которая может находиться в одном из трех состояний ( $m=3$ ) с априори известными вероятностями  $p_{p1} = 0,19$ ,  $p_{p2} = 0,3$  и  $p_{p3} = 0,51$  соответственно. В процессе экспериментальных исследований системы было зафиксировано, что в 1-м состоянии она находилась 2 раза ( $x_1 = 2$ ), во 2-м — 5 раз ( $x_2 = 5$ ), в 3-м — 3 раза ( $x_3 = 3$ ). Необходимо найти апостериорные оценки вероятностей того, что система находится в 1, 2 и 3-м состояниях.

На основе опытных данных по формуле (5), где  $N_0 = 10$ , определяются опытные оценки  $p_{o1} = 0,2$ ,  $p_{o2} = 0,5$ ,  $p_{o3} = 0,3$  вероятностей состояний системы. Отношение правдоподобия  $v^*$ , характеризующее близость априорной информации к результатам опытов, рассчитанное по формуле (7), составляет 0,3448. Отсюда видно, что априорные оценки вероятности существенно отличаются от опытных. Поэтому в апостериорных оценках, в соответствии с формулой (9), приоритет имеют опытные данные:

$$p_{a1} = 0,1974, \quad p_{a2} = 0,4487, \quad p_{a3} = 0,3539.$$

Апостериорные оценки вероятностей состояний системы, полученные по формуле Байеса [5],

$$p_{Bi} = \frac{p_{pi}P_{oi}}{\sum_{i=1}^3 p_{pi}P_{oi}}, \quad i = \overline{1,3}, \quad (10)$$

отличаются от приведенных выше оценок:

$$p_{B1} = 0,1114; \quad p_{B2} = 0,4399; \quad p_{B3} = 0,4487.$$

Отсюда видно, что достаточно весомые опытные данные фактически перекрываются априорной информацией, которая слабо с ними согласуется. Это связано с тем, что оценки вероятностей состояний, полученные по формуле (10), полностью зависят от произведений  $p_{pi}P_{oi}$  и не учитывают возможные расхождения в априорных и опытных данных. По этой причине еще большая неопределенность возникает по мере поступления новых опытных данных, когда в качестве априорных вероятностей используются байесовские оценки, полученные на предыдущих этапах.

**Заключение.** Использование метода приоритета опытной информации позволяет получить апостериорные оценки вероятностей состояний сложной системы путем взвешенного учета результатов априорных и экспериментальных исследований. Сравнение этих оценок с оценками, полученными по формуле Байеса, показало, что в последних априорная информация может доминировать над опытными данными и, как следствие, привести к ошибочному решению о вероятностях состояний системы.

Полученные результаты могут быть использованы для прогнозирования состояний системы по мере поступления новых данных в процессе ее применения по назначению при решении задач диагностики, распознавания, идентификации, адаптивного управления, исследования надежности и др.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цыпкин Я. З. Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.
2. Мерков А. Б. Распознавание образов. Построение и обучение вероятностных моделей. М.: Ленанд, 2014. 240 с.
3. Буряк Ю. И., Скрынников А. А. Повышение степени обоснованности принимаемых решений в системе распознавания за счет использования априорной информации // Науч. вестн. Моск. гос. техн. ун-та гражданской авиации. 2015. № 220 (10). С. 47—54.
4. Фомин Я. А. Распознавание образов: теория и применения. М.: Изд-во ФАЗИС, 2012. 429 с.
5. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учебник для вузов. М.: Изд. центр „Академия“, 2003. 576 с.
6. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Физматлит, 2002. 496 с.
7. Фроленков К. В. Уточнение оценок вероятностей при локальном апостериорном выводе алгебраической байесовской сети в случае неточного свидетельства // Тр. СПИИРАН. 2013. № 1 (24). С. 152—164.
8. Дорошко И. В., Тарасов А. Г., Барановский А. М. Оценка надежности структурно-сложных технических комплексов с помощью моделей байесовских сетей доверия в среде GeNIe // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2015. № 3. С. 36—45.
9. Тулупьев А. Л. Апостериорные оценки вероятностей в алгебраических байесовских сетях // Вестн. СПбГУ. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2012. № 2. С. 51—59.
10. Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases / D. Kahneman et al. Cambridge Univ. Press, 2005. 555 p.
11. Александровская Л. Н., Круглов В. И., Кузнецов А. Г. и др. Теоретические основы испытаний и экспериментальная отработка сложных технических систем: Учеб. пособие. М.: Логос, 2003. 736 с.
12. Арсеньев В. Н. Оценивание характеристик систем управления по ограниченному числу натуральных испытаний. М.: Рестарт, 2013. 126 с.

13. Дмитриев А. К., Юсупов Р. М. Идентификация и техническая диагностика: Учебник для вузов. МО СССР, 1987. 521 с.
14. Королюк В. С., Портенко Н. И., Скороход А. В., Турбин А. Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука, 1985. 640 с.
15. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике. М.: Мир, 1986. Кн. 1. 351 с.
16. Greene W. H. *Econometric Analysis*. N. Y.: Pearson Education, Inc., 2003. 1026 p.
17. Арсеньев В. Н., Лабецкий П. В. Метод апостериорного оценивания характеристик системы управления летательного аппарата // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 10. С. 23—28.

#### Сведения об авторах

- Владимир Николаевич Арсеньев** — д-р техн. наук, профессор; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра бортовых информационных и измерительных комплексов;  
E-mail: vladar56@mail.ru
- Андрей Борисович Петухов** — ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра бортовых информационных и измерительных комплексов; преподаватель;  
E-mail: andrey\_11\_75@mail.ru
- Андрей Александрович Ядренкин** — канд. техн. наук, доцент; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра бортовых информационных и измерительных комплексов;  
E-mail: andrei\_nikita@mail.ru

Поступила в редакцию  
15.01.2020 г.

**Ссылка для цитирования:** Арсеньев В. Н., Петухов А. Б., Ядренкин А. А. Методика уточнения априорных вероятностей состояний сложной системы по экспериментальным данным // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 3. С. 199—205.

### METHOD FOR REFINING A PRIORI PROBABILITIES OF A COMPLEX SYSTEM STATES FROM EXPERIMENTAL DATA

V. N. Arseniev, A. B. Petuhov, A. A. Yadrenkin

A. F. Mozhaysky Military Aerospace Academy, 197198, St. Petersburg, Russia  
E-mail: andrey\_11\_75@mail.ru

For a complex system, the problem of refining a priori probabilities of hypotheses about the system state using the data obtained during its experimental adjustment and operation is considered. The proposed method for solving this problem is based on weighted accounting of the results of a priori and experimental studies of the system. The results of comparing a posteriori estimates with estimates obtained by Bayes formulas are presented. It is shown that, in contrast to the Bayesian solution, the use of the proposed method provides for accounting the proximity of the results of a priori studies of the system to the results of experiments, and does not allow a priori information to dominate the experimental data.

**Keywords:** complex system, system state, a priori probability, experimental data, method of priority of experimental information, a posteriori probability, Bayesian estimates, comparative analysis

#### REFERENCES

1. Tsypkin Ya.Z. *Informatsionnaya teoriya identifikatsii* (Information Identification Theory), Moscow, 1995, 336 p. (in Russ.)
2. Merkov A.B. *Raspoznavaniye obrazov. Postroyeniye i obucheniye veroyatnostnykh modeley* (Pattern Recognition. Building and Training Probabilistic Models), Moscow, 2014, 240 p. (in Russ.)
3. Buryak Yu.I., Skrynnikov A.A. *Nauchnyi Vestnik MGTUGA*, 2015, no. 10(220), pp. 47–54. (in Russ.)
4. Fomin Ya.A. *Raspoznavaniye obrazov: teoriya i primeneniya* (Pattern Recognition: Theory and Applications), Moscow, 2012, 429 p. (in Russ.)
5. Ventcel E.S. *Teoriya veroyatnostey* (Probability Theory), Moscow, 2003, 576 p. (in Russ.)
6. Pugachev V.S. *Teoriya veroyatnostey i matematicheskaya statistika* (Probability Theory and Mathematical Statistics), Moscow, 2002, 496 p. (in Russ.)
7. Frolenkov K.V. *Trudy SPIIRAN* (SPIIRAS Proceedings), 2013, no. 1(24), pp. 152–164. (in Russ.)
8. Dorozhko I.V., Tarasov A.G., Baranovskiy A.M. *Intellectual Technologies on Transport*, 2015, no. 3, pp. 36–45. (in Russ.)
9. Tulupyev A.L. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied mathematics. Computer Science*.

- Control Processes*, 2012, no. 2, pp. 51–59. (in Russ.)
10. Kahneman D. et al. *Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*, 21st. Cambridge University Press, 2005, 555 p.
  11. Aleksandrovskaya L.N., Kruglov V.I., Kuznetsov A.G. et al. *Teoreticheskiye osnovy ispytaniy i eksperimental'naya otrabotka slozhnykh tekhnicheskikh sistem* (Theoretical Basis of Testing and Experimental Testing of Complex Technical Systems), Moscow, 2003, 736 p. (in Russ.)
  12. Arsen'ev V.N. *Otsenivanie kharakteristik sistem upravleniya po ogranichennomu chislu naturnykh ispytaniy* (Estimation of Characteristics of Control Systems on Limited Number of Full-Scale Tests), Moscow, 2013, 126 p. (in Russ.)
  13. Dmitriyev A.K., Yusupov R.M. *Identifikatsiya i tekhnicheskaya diagnostika* (Identification and technical diagnostics), Leningrad, 1987, 521 p. (in Russ.)
  14. Korolyuk V.S., Portenko N.I., Skorokhod A.V., Turbin A.F. *Spravochnik po teorii veroyatnostey i matematicheskoy statistike* (Reference Book on Probability Theory and Mathematical Statistics), Moscow, 1985, 640 p. (in Russ.)
  15. Ravindran A., Ragsdell K.M. and Reklaitis G.V. *Engineering Optimization: Methods and Applications*, John Wiley & Sons, 2006, 681 p.
  16. Greene W.H. *Econometric analysis*, NY, Pearson Education, Inc., 2003, 1026 p.
  17. Arsen'ev V.N., Labetskiy P.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2014, no. 10(57), pp. 23–28. (in Russ.)

**Data on authors**

- Vladimir N. Arseniev** — Dr. Sci., Professor; A. F. Mozhaisky Military Aerospace Academy, Department of Onboard Information and Measuring Complexes; E-mail: vladar56@mail.ru
- Andrey B. Petuhov** — A. F. Mozhaisky Military Aerospace Academy, Department of Onboard Information and Measuring Complexes; Lecturer; E-mail: andrey\_11\_75@mail.ru
- Andrey A. Yadrenkin** — PhD, Associate Professor; A. F. Mozhaisky Military Aerospace Academy, Department of Onboard Information and Measuring Complexes; E-mail: andrei\_nikita@mail.ru

**For citation:** Arseniev V. N., Petuhov A. B., Yadrenkin A. A. Method for refining a priori probabilities of a complex system states from experimental data. *Journal of Instrument Engineering*. 2020. Vol. 63, N 3. P. 199–205 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-3-199-205