

СПЕКТР ГАРМОНИЧЕСКОГО КОЛЕБАНИЯ ПРИ ЧАСТОТНОЙ МОДУЛЯЦИИ СЛУЧАЙНЫМ СИГНАЛОМ

С. И. ЗИАТДИНОВ, Л. А. ОСИПОВ

*Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения,
190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kaf53@guap.ru*

Исследованы частотные свойства сигнала при модуляции случайным процессом с ненулевой средней частотой. Показано, что энергетический спектр частотно-модулированного гармонического колебания является бесконечно широким и содержит дискретную спектральную линию и парциальную область на частоте модулируемого колебания, а также парциальные области, соответствующие гармоникам средней частоты модулирующего узкополосного случайного сигнала относительно частоты модулируемого колебания. Ширина спектральных областей зависит от дисперсии и номера соответствующей гармоники средней частоты модулирующего сигнала. Представлены результаты расчетов энергетического спектра частотно-модулированного гармонического колебания. Соотношения для корреляционной функции и энергетического спектра частотно-модулированного сигнала могут быть использованы при исследовании и разработке систем передачи информации с угловой модуляцией несущего колебания.

Ключевые слова: частотная модуляция, случайный сигнал, корреляционная функция, энергетический спектр

Введение. В радиосистемах для передачи информации по каналу связи используется модуляция одного из параметров непрерывного гармонического колебания сигналом. Это может быть амплитудная или угловая модуляция. При амплитудной модуляции по закону передаваемого сообщения происходит изменение амплитуды несущего гармонического колебания при его неизменных частоте и начальной фазе; в случае угловой модуляции (частотной или фазовой) изменению подвергается текущая фаза несущего колебания при его постоянной амплитуде.

В настоящее время спектрально-корреляционные характеристики гармонического колебания для различных видов модуляции как регулярным, так и случайным сигналом хорошо изучены [1—12]. Так, в работах [10—12] подробно рассмотрены временные и частотные характеристики сигнала при амплитудной и угловой модуляции несущего колебания гармоническим сигналом. В работах [1—9] дан тщательный анализ временных и частотных свойств сигнала в случае использования модуляции случайным процессом с заданными статистическими параметрами.

Постановка задачи. В известной литературе для упрощения теоретических преобразований модулирующий случайный сигнал принимается с нулевой средней частотой, что не дает общей картины происходящих процессов. Для получения обобщенных результатов в настоящей статье рассматривается частотная модуляция непрерывного гармонического колебания случайным сигналом, средняя частота которого отлична от нуля.

Спектрально-корреляционные характеристики частотно-модулированного сигнала. Пусть непрерывное гармоническое колебание вида

$$u(t) = U_0 \cos[\omega_0 t + \varphi_0] \quad (1)$$

подвергается частотной модуляции узкополосным нормальным, стационарным случайным сигналом

$$f(t) = A(t) \cos[\Omega t + \Psi(t)]. \quad (2)$$

В соотношениях (1) и (2) использованы следующие обозначения: U_0 , ω_0 , φ_0 — амплитуда, частота и начальная фаза модулируемого колебания $u(t)$; $A(t)$, Ω , $\Psi(t)$ — случайная амплитуда, средняя частота и случайная фаза модулирующего сигнала $f(t)$.

Будем считать, что модулирующий сигнал имеет нулевое среднее значение.

В результате выражение для частотно-модулированного сигнала записывается следующим образом:

$$u(t) = U_0 \cos \left[\omega_0 t + \int_{t_0}^t k f(x) dx + \varphi_0 \right] = U_0 \cos \left\{ \omega_0 t + k \int_{t_0}^t A(x) \cos[\Omega x + \Psi(x)] dx + \varphi_0 \right\}, \quad (3)$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Для упрощения преобразований в дальнейшем положим $k=1$ и $\varphi_0=0$. Тогда выражение (3) принимает вид

$$u(t) = U_0 \cos \left\{ \omega_0 t + \int_{t_0}^t A(x) \cos[\Omega x + \Psi(x)] dx \right\}. \quad (4)$$

Найдем корреляционную функцию частотно-модулированного сигнала (4):

$$B(\tau) = \overline{u(t)u(t+\tau)} = U_0^2 \overline{\cos \left[\omega_0 t + \int_{t_0}^t f(x) dx \right] \cos \left[\omega_0(t+\tau) + \int_{t_0}^{t+\tau} f(x) dx \right]}.$$

После несложных тригонометрических преобразований данное выражение можно представить в виде [14]

$$B(\tau) = 0,5 U_0^2 \overline{\cos(\Delta\varphi(\tau))} \cos(\omega_0 \tau), \quad (5)$$

где разность фаз

$$\Delta\varphi(\tau) = \int_{t_0}^{t+\tau} f(x) dx - \int_{t_0}^t f(x) dx = \int_{t_0}^{t+\tau} A(x) \cos[\Omega x + \Psi(x)] dx - \int_{t_0}^t A(x) \cos[\Omega x + \Psi(x)] dx$$

или

$$\Delta\varphi(\tau) = \int_0^{\tau} A(t) \cos[\Omega t + \Psi(t)] dt.$$

В работах [1—6] показано, что

$$\overline{\cos(\Delta\varphi(\tau))} = \exp[-0,5\sigma_{\Delta\varphi}^2(\tau)], \quad (6)$$

где $\sigma_{\Delta\varphi}^2(\tau)$ — дисперсия разности фаз $\Delta\varphi(\tau)$.

В результате выражение (5) для рассматриваемого частотно-модулированного сигнала можно записать следующим образом:

$$B(\tau) = 0,5 U_0^2 \exp[-0,5\sigma_{\Delta\varphi}^2(\tau)] \cos(\omega_0 \tau). \quad (7)$$

Найдем дисперсию разности фаз

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2(\tau) = \overline{\Delta\varphi^2(\tau)}.$$

В работе [4] для частного случая равенства нулю средней частоты модулирующего сигнала $\Omega=0$ приведено следующее выражение для корреляционной функции частотно-модулированного гармонического колебания:

$$B(\tau) = 0,5U_0^2 \exp \left\{ -\sqrt{2} \cdot \sigma^2(\tau) / \Delta\omega \left[0,5 \exp(-\Delta\omega^2 \tau^2) - 1 \right] + \sqrt{\pi/2} \cdot \Delta\omega |\tau| [\Phi(\Delta\omega |\tau|) - 0,5] \right\},$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Данное соотношение было получено для гауссовой аппроксимации корреляционной функции модулирующего сигнала

$$B_M(\tau) = \sigma^2 \exp(-\Delta\omega^2 \tau^2 / 2),$$

где $\sigma^2, \Delta\omega$ — дисперсия и ширина спектра модулирующего сигнала.

Найдем корреляционную функцию и спектр частотно-модулированного гармонического колебания в случае ненулевой средней частоты модулирующего сигнала.

Пусть спектр модулирующего сигнала описывается часто используемой гауссовой кривой [2, 3]

$$G_M(\omega) = \frac{0,5\sqrt{2\pi}}{\Delta\omega} \sigma^2 \exp \left[-(\omega \pm \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2 \right], \tag{8}$$

вид которой показан на рис. 1, где $\omega_H - \omega_B$ — диапазон частот.

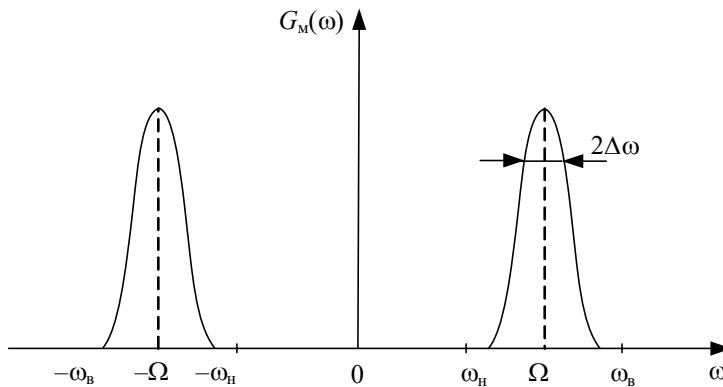


Рис. 1

Поскольку приращение фазы $\Delta\phi(\tau)$ модулирующего сигнала является интегралом от его частоты, то дисперсию $\sigma_{\Delta\phi}^2(\tau)$ можно найти из соотношения [5, 6]

$$\sigma_{\Delta\phi}^2(\tau) = 1 / \pi \int_{\omega_H}^{\omega_B} G_M(\omega) K^2(\omega) d\omega, \tag{9}$$

где $K(\omega, \tau) = \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega} \right| = \left| \frac{\sqrt{1 - \cos(\omega\tau)}}{\omega} \right|$ — амплитудно-частотная характеристика интегратора.

После подстановки выражения (8) в (9) получим

$$\sigma_{\Delta\phi}^2(\tau) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi} \cdot \Delta\omega} \left\{ \int_{\omega_H}^{\omega_B} \exp \left[-(\omega - \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2 \right] / \omega^2 d\omega - \int_{\omega_H}^{\omega_B} \exp \left[-(\omega - \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2 \right] \cos(\omega\tau) / \omega^2 d\omega \right\}. \tag{10}$$

Пределы интегрирования в уравнении (10) охватывают парциальные области спектра модулирующего сигнала (см. рис. 1).

Для упрощения дальнейших преобразований будем считать, что с учетом узости спектра $G_M(\omega)$ частота в пределах интегрирования $\omega_H - \omega_B$ существенно не изменяется и равняется средней частоте модулирующего сигнала в данном диапазоне, т. е. положим $\omega \approx \Omega$. Тогда соотношение (10) упрощается и принимает вид

$$\sigma_{\Delta\varphi}^2(\tau) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi} \cdot \Delta\omega\Omega^2} \left\{ \int_{\omega_H}^{\omega_B} \exp[-(\omega - \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2] d\omega - \int_{\omega_H}^{\omega_B} \exp[-(\omega - \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2] \cos(\omega\tau) d\omega \right\} = \frac{\sigma^2}{\Omega^2} [1 - \exp(-\Delta\omega^2\tau^2 / 2) \cos(\Omega\tau)]. \quad (11)$$

Для обоснования принятого допущения были проведены дополнительные исследования, в которых сравнивались точный и приближенный интегралы A_1 с A_2 и B_1 с B_2 :

$$A_1 = \int_{\omega_H}^{\omega_B} \exp[-(\omega - \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2] / \omega^2 d\omega, \quad A_2 = \int_{\omega_H}^{\omega_B} \exp[-(\omega - \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2] d\omega / \Omega^2$$

и

$$B_1 = \int_{\omega_H}^{\omega_B} \exp[-(\omega - \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2] \cos(\omega\tau) / \omega^2 d\omega, \quad B_2 = \int_{\omega_H}^{\omega_B} \exp[-(\omega - \Omega)^2 / 2\Delta\omega^2] \cos(\omega\tau) d\omega / \Omega^2.$$

Результаты расчетов показали, что для значений параметров $F = \Omega / 2\pi = 10$ кГц, $\Delta f = \Delta\omega / 2\pi = 500$ Гц, $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 100$ кГц и $(\omega_B - \omega_H) / 2\pi = 2,5$ кГц отличие интегралов A_1 от A_2 и B_1 от B_2 не превышает десятых долей процентов.

Для нахождения энергетического спектра частотно-модулированного сигнала используем известное преобразование [2, 3]

$$G(\omega) = 2 \int_0^{\infty} B(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau = U_0^2 \int_0^{\infty} \exp[-0,5\sigma_{\Delta\varphi}^2] \cos(\omega_0\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (12)$$

После подстановки выражения (11) в (12) получим

$$G(\omega) = U_0^2 \exp(-\sigma^2 / \Omega^2) \int_0^{\infty} \exp\left[\frac{\sigma^2}{\Omega^2} \exp(-\Delta\omega^2\tau^2 / 2) \cos(\Omega\tau)\right] \cos(\omega_0\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (13)$$

Разложим экспоненту в выражении (13) в степенной ряд [13]:

$$\exp\{x\} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (14)$$

С учетом (14) соотношение (13) можно представить в следующем виде:

$$G(\omega) = U_0^2 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\Omega^2}\right) \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\sigma^{2n}}{\Omega^{2n}} \exp\left(-\frac{n\Delta\omega^2\tau^2}{2}\right) \cos^n(\Omega\tau) \right] / n! \cdot \cos(\omega_0\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

В данном выражении поменяем местами операции интегрирования и суммирования:

$$G(\omega) = U_0^2 \exp\left(-\frac{\sigma^2}{\Omega^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[\frac{\sigma^{2n}}{\Omega^{2n}} \exp\left(-\frac{n\Delta\omega^2\tau^2}{2}\right) \cos^n(\Omega\tau) \right] / n! \cdot \cos(\omega_0\tau) \cos(\omega\tau) d\tau. \quad (15)$$

В данном выражении необходимо выполнить простые тригонометрические преобразования вида [14]

$$\begin{aligned} \cos^2 \Omega\tau &= 0,5[1 + \cos 2 \Omega\tau]; \quad \cos^3 \Omega\tau = 0,75\cos \Omega\tau + 0,25\cos 3 \Omega\tau, \\ \cos 4 \Omega\tau &= 0,25(1,5 + 2\cos 2 \Omega\tau + 0,5\cos 4 \Omega\tau) \end{aligned} \quad (16)$$

и т.д.

После подстановки (16) в (15) сгруппируем слагаемые с одинаковыми частотами $\omega_0 \pm m\Omega$. Тогда в качестве слагаемых в соотношении (15) будут выражения

$$\int_0^{\infty} \exp(-n\Delta\omega^2\tau^2/2) \cos(b\Omega\tau) \cos(\omega_0\tau) \cos(\omega\tau) d\tau,$$

которые преобразуются в виду

$$\int_0^{\infty} \exp(-a\Delta\omega^2\tau^2/2) \cos[(\omega_0 \pm b\Omega)\tau] \cos(\omega\tau) d\tau = c \exp\left\{-\left[(\omega - \omega_0 \mp b\Omega)/2a\Delta\omega^2\right]^2\right\},$$

где $c = \sqrt{\pi/(2a)}/\Delta\omega$ определяет уровень максимума спектральной области со средней частотой $\omega = \omega_0 \pm b\Omega$ и шириной $\sqrt{a} \cdot \Delta\omega$.

Обсуждение результатов. Для конкретизации результатов положим следующие параметры: дисперсия, средняя частота и ширина спектра модулирующего сигнала имеют соответственно значения $\sigma/\Omega=1$, $F=\Omega/2\pi=10$ кГц, $\Delta f=\Delta\omega/2\pi=0,5$ кГц, частота модулируемого колебания $f_0=\omega_0/2\pi=100$ кГц.

На рис. 2 для принятых исходных данных представлен энергетический спектр частотно-модулированного гармонического колебания узкополосным случайным сигналом с ненулевой средней частотой.

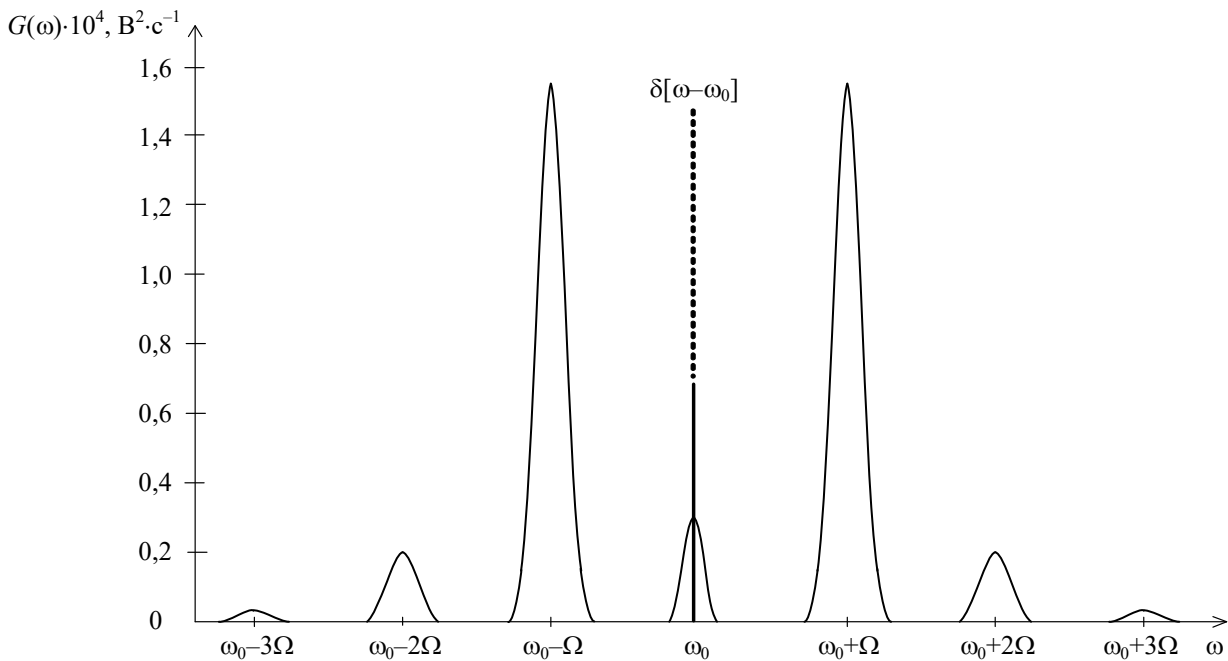


Рис. 2

Анализ представленных результатов показывает, что в спектре частотно-модулированного сигнала в области положительных частот присутствуют:

- спектральная линия $0,578 \cdot \delta[\omega - \omega_0]$ на частоте модулируемого колебания ω_0 ;
- парциальная область со средней частотой ω_0 :

$$2,601 \cdot 10^{-5} \exp[-(\omega - \omega_0)^2/4\Delta\omega^2] + 0,114 \cdot 10^{-5} \exp[-(\omega - \omega_0)^2/8\Delta\omega^2];$$

- парциальные области со средними частотами $(\omega_0 \pm \Omega)$:

$$7,395 \cdot 10^{-5} \exp[-(\omega - \omega_0 \pm \Omega)^2/2\Delta\omega^2] + 5,297 \cdot 10^{-5} \exp[-(\omega - \omega_0 \pm \Omega)^2/6\Delta\omega^2];$$

- парциальные области со средними частотами $(\omega_0 \pm 2\Omega)$:

$$1,301 \cdot 10^{-5} \exp[-(\omega - \omega_0 \pm 2\Omega)^2/4\Delta\omega^2] + 0,381 \cdot 10^{-5} \exp[-(\omega - \omega_0 \pm 2\Omega)^2/8\Delta\omega^2];$$

- парциальные области со средними частотами $(\omega_0 \pm 3\Omega)$:

$$0,129 \cdot 10^{-5} \exp[-(\omega - \omega_0 \pm 3\Omega)^2/6\Delta\omega^2];$$

— парциальные области со средними частотами ($\omega_0 \pm 4\Omega$):
$$0,012 \cdot 10^{-5} \exp[-(\omega - \omega_0 \pm 4\Omega)^2 / 8\Delta\omega^2].$$

Остальные парциальные области в спектре частотно-модулированного сигнала пренебрежимо малы. Полученные ранее в работах [1—6] спектрально-корреляционные характеристики частотно-модулированного сигнала являются частным случаем при средней частоте модулирующего сигнала, равной нулю.

Заключение. Энергетический спектр частотно-модулированного гармонического колебания является бесконечно широким и содержит дискретную спектральную линию и парциальную область на частоте модулируемого колебания, а также парциальные области, соответствующие гармоникам средней частоты модулирующего узкополосного случайного сигнала относительно частоты модулируемого колебания. Ширина спектральных областей зависит от дисперсии модулирующего сигнала и номера соответствующей гармоники средней частоты модулирующего сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миддлтон Д. Введение в статистическую теорию связи. М.: Сов. радио, 1962. Т. 2. 831 с.
2. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Сов. радио, 1966. 678 с.
3. Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Сов. радио, 1969. 751 с.
4. Тихонов В. И. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 608 с.
5. Тихонов В. И., Харисов В. Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 2004. 608 с.
6. Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи. М.: Радио и связь, 1980. 543 с.
7. Горяинов В. Т. Статистическая радиотехника. Примеры и задачи по статистической радиотехнике М.: Радио и связь, 1979. 597 с.
8. Rove H. Frequency or phas modulation with a noise carrir // Proc. IEEE. 1964. N 4.
9. Шахтинский Б. И. Случайные процессы в радиотехнике: Учеб. пособие. М.: Радио и связь, 2000. 583 с.
10. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: Радио и связь, 1969. 512 с.
11. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. М.: URSS, 2016. 915 с.
12. Мощенский Ю. В., Нечаев А. С. Теоретические основы радиотехники. СПб: Лань, 2018. 147 с.
13. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. М.: Интеграл-Пресс, 2010. Т. 2. 544 с.
14. Шахмейстер А. Х. Тригонометрия. М.: МЦНВО, 2013. 752 с.

Сведения об авторах

- Сергей Ильич Зиатдинов** — д-р техн. наук, профессор; СПбГУАП, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf53@guap.ru
- Леонид Андроникович Осипов** — д-р техн. наук, профессор; СПбГУАП, кафедра информационно-сетевых технологий; E-mail: kaf53@guap.ru

Поступила в редакцию
23.12.19 г.

Ссылка для цитирования: Зиатдинов С. И., Осипов Л. А. Спектр гармонического колебания при частотной модуляции случайным сигналом // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 3. С. 206—212.

**HARMONIC OSCILLATION SPECTRUM
UNDER FREQUENCY MODULATION BY A RANDOM SIGNAL**

S. I. Ziatdinov, L. A. Osipov

*St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
190000, St. Petersburg, Russia
E-mail: kaf53@guap.ru*

The frequency properties of a signal modulated by a random process with a nonzero average frequency are investigated. It is shown that the energy spectrum of frequency-modulated harmonic oscillation is infinitely wide and contains a discrete spectral line and a partial region at the frequency of the modulated oscillation, as well as partial regions corresponding to the harmonics of the middle frequency of the modulating narrow-band random signal relative to the modulated oscillation frequency. The spectral regions width depends on the variance and number of the corresponding harmonic of the average frequency of the modulating signal. Results of calculations of the energy spectrum of frequency-modulated harmonic oscillations are presented. It is noted that derived relations for the correlation function and the energy spectrum of the frequency-modulated signal can be used in study and development of information transmission systems with angular modulation of the carrier wave.

Keywords: frequency modulation, random signal, correlation function, energy spectrum

REFERENCES

1. Middleton D. *An introduction to statistical communication theory*, NY, McGraw-Hill, 1960.
2. Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika* (Statistical Radio Engineering), Moscow, 1966, 678 p. (in Russ.)
3. Levin B.R. *Teoreticheskiye osnovy statisticheskoy radiotekhniki* (Theoretical Foundations of Statistical Radio Engineering), Moscow, 1969, 751 p. (in Russ.)
4. Tikhonov V.I. *Statisticheskii analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustroystv i sistem* (Statistical Analysis and Synthesis of Radio Engineering Devices and Systems), Moscow, 1991, 608 p. (in Russ.)
5. Tikhonov V.I., Kharisov V.N. *Statisticheskii analiz i sintez radiotekhnicheskikh ustroystv i sistem* (Statistical Analysis and Synthesis of Radio Engineering Devices and Systems), Moscow, 2004, 608 p. (in Russ.)
6. Goryainov V.T., Zhuravlev A.G., Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika. Primery i zadachi* (Statistical Radio Engineering. Examples and Tasks), Moscow, 1980, 543 p. (in Russ.)
7. Goryainov V.T. *Statisticheskaya radiotekhnika. Primery i zadachi po statisticheskoy radiotekhnike* (Statistical Radio Engineering. Examples and Tasks in Statistical Radio Engineering), Moscow, 1979, 597 p. (in Russ.)
8. Rove H. *Proc. IEEE*, 1964, no. 4.
9. Shakhinskiy B.I. *Sluchaynyye protsessy v radiotekhnike* (Random Processes in Radio Engineering), Moscow, 2000, 583 p. (in Russ.)
10. Gonorovskiy I.S. *Radiotekhnicheskie tsepi i signaly* (Radio Engineering Chains and Signals), Moscow, 1986, 512 p. (in Russ.)
11. Baskakov S.I. *Radiotekhnicheskiye tsepi i signaly* (Radio Circuits and Signals), Moscow, 2016, 915 p. (in Russ.)
12. Moshchenskiy Yu.V., Nechayev A.S. *Teoreticheskiye osnovy radiotekhniki* (Theoretical Foundations of Radio Engineering), St. Petersburg, 2018, 147 p. (in Russ.)
13. Piskunov N.S. *Differentsial'noye i integral'noye ischisleniya* (Differential and Integral Calculus), Moscow, 1965, vol. 2, 312 p. (in Russ.)
14. Shakhmeyster A.Kh. *Trigonometriya* (Trigonometry), Moscow, 2013, 752 p. (in Russ.)

Data on authors

Sergey I. Ziatdinov

— Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Information and Network Technologies; E-mail: kaf53@guap.ru

Leonid A. Osipov

— Dr. Sci., Professor; St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Information and Network Technologies; E-mail: kaf53@guap.ru

For citation: Ziatdinov S. I., Osipov L. A. Harmonic oscillation spectrum under frequency modulation by a random signal. *Journal of Instrument Engineering*. 2020. Vol. 63, N 3. P. 206—212 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-3-206-212