

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ РЕАЛЬНОГО ВРЕМЕНИ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПУАССОНОВСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ

А. М. ВОДОВОЗОВ

*Вологодский государственный университет, 160000, г. Вологда, Россия
E-mail: am.vodovozov@gmail.com*

Рассмотрены нелинейные стохастические системы при импульсных входных воздействиях, образующих пуассоновские потоки событий. Проанализирован процесс нелинейного преобразования в системе информации, представленной интервалами времени между событиями, синтезирован заданный нелинейный функционал в функции интенсивности пуассоновского потока. В основе исследований лежит вероятностная времяимпульсная форма представления пуассоновского процесса, в качестве аргумента при вычислениях используется интервал времени между входными событиями. Представлено аналитическое решение задачи с учетом экспоненциального распределения случайных интервалов времени, характерного для простейшего пуассоновского потока. Рассмотрен алгоритм синтеза обобщенного заданного таблично нелинейного функционала, представлены формулы для расчета функции-оригинала при аппроксимации табличных данных степенным рядом с отрицательными показателями степени. Результаты подтверждены моделированием в пакете прикладных математических программ Scilab. Предложенный алгоритм настройки вычислительного устройства на воспроизведение заданного аналитически нелинейного функционала позволяет решать практические задачи в стохастических системах с пуассоновским входным сигналом, таких как приборы с использованием ионизирующих излучений, системы массового обслуживания и т.д.

Ключевые слова: *стохастическая система, поток Пуассона, времяимпульсное преобразование, нелинейный функционал, алгоритм синтеза*

Линейные преобразования случайных процессов, выполняемые в стохастических системах, обладают хорошо известными общими свойствами, позволяющими аналитически с заданной степенью подробности оценить вероятностные и спектральные характеристики преобразованного случайного сигнала, в то время как результаты нелинейных преобразований непредсказуемы. Нелинейные преобразования не проявляют общих закономерностей по отношению к спектральным и вероятностным характеристикам процессов на входе. При воспроизведении нелинейных функционалов спектр сигнала и его вероятностные характеристики существенно изменяются. Зачастую их невозможно оценить в общем виде не только аналитически, но и методами компьютерного моделирования. В таких случаях результат определяется как характеристиками процесса на входе, так и описанием конкретной нелинейности. Множество процессов, нелинейностей и их сочетаний бесконечно, а решения известны только для некоторых сравнительно узких задач. Например, в работе [1] для описания процессов в нелинейной стохастической системе использовано гауссово распределение, а при определении моментов распределения на выходе нелинейного функционала задействованы методы кумулянтного анализа. В результате для вычислений нужны сравнительно сложные алгоритмы, которые на практике могут быть воспроизведены только приближенно. О решении обратной задачи синтеза, предусматривающей формирование в стохастической системе нелинейности, заданной аналитически или таблично, даже не идет речи.

В статье рассматривается задача синтеза нелинейных функционалов в стохастических системах с пуассоновской составляющей, представляющей собой поток событий на входе.

Подобный поток событий описывает реальный входной информационный сигнал в задачах анализа и синтеза систем различной физической природы. Его активно используют при моделировании процессов в теории массового обслуживания, теории надежности, в прикладных задачах радиолокации и связи, биологии, сейсмологии, в радиоизотопных приборах и др. [2—9]. Во всех конкретных задачах случайный поток, воздействующий на систему, содержит полезную информацию и рассматривается в одномерном представлении, где независимой переменной является время. Информационным параметром входного пуассоновского потока считается его изменяющаяся во времени интенсивность λ , в результате наблюдения которой в системе должны осуществляться все вычисления и принятие окончательных решений. При необходимости выполнения нелинейных преобразований в функции интенсивности потока используются два варианта решений.

В первом случае [10] текущая интенсивность потока оценивается путем подсчета входных событий за фиксированный период квантования T , а все вычисления проводятся периодически в функции зафиксированного на данном периоде случайного количества событий N . Полученный результат усредняется по множеству отсчетов и отображается как нелинейный функционал от входной переменной $F(\lambda)$. Здесь период квантования выбирается исходя из представлений о допустимой статистической погрешности системы. В соответствии с принятыми предположениями о пуассоновском распределении входного сигнала погрешность уменьшается обратно пропорционально времени T и интенсивности потока λ . При нестационарности информационного потока такой метод оценки приводит к появлению противоречий между статистическими и динамическими ошибками системы, поскольку динамическая погрешность измерений с ростом периода квантования процесса во времени всегда возрастает [11]. Кроме того, задача вычисления нелинейных функционалов в пространстве любого случайного процесса связана с неизбежной методической ошибкой вычислений, обусловленной явлением статистической линеаризации нелинейности [12].

Вторым вариантом решения задачи является использование времяимпульсного преобразования, которое подразумевает организацию вычислений в моменты появления каждого нового события на входе в функции интервалов времени между событиями. Этот вариант обеспечивает максимальное быстродействие системы и минимум динамической ошибки, но практически не исследован из-за сложности выполнения времяимпульсных преобразований в режиме реального времени. Современные средства микропроцессорной техники, обладающие достаточным быстродействием и широким набором функциональных блоков, позволяют вплотную подойти к решению задачи в такой постановке.

В рассматриваемом случае входным сигналом стохастической системы будем считать пуассоновский поток — стационарный, ординарный поток событий без последействия. Для него число событий N , попадающих на любой период квантования T , подчиняется распределению Пуассона [13]:

$$P(N, T) = \frac{(\lambda T)^N}{N!} \exp(-\lambda T).$$

Дисперсия случайной величины N равна ее математическому ожиданию λT . Интервалы времени t между событиями потока являются также величинами случайными. Их распределение описывается экспоненциальным законом:

$$p(t) = \lambda \exp(-\lambda t) \quad (1)$$

с математическим ожиданием равным $1/\lambda$.

Нелинейное времяимпульсное преобразование потока в режиме реального времени подразумевает фиксацию интервалов t , вычисление некоторой заданной нелинейной функции $f(t)$ в моменты появления каждого события и последующую фильтрацию результатов. В общем случае интерес представляет рассмотрение математического ожидания сигнала на выходе не-

линейного преобразователя как функции от интенсивности потока $F(\lambda)$, которую можно трактовать как изображение процесса $f(t)$ на оси λ :

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} p(t) f(t) dt. \quad (2)$$

На основе уравнений (1) и (2) получим общую формулу для расчета изображения:

$$F(\lambda) = \lambda \int_0^{\infty} f(t) \exp(-\lambda t) dt = \lambda L\{f(t)\}, \quad (3)$$

где $L\{f(t)\}$ — преобразование Лапласа функции $f(t)$.

При этом функция $f(t)$ рассматривается как оригинал преобразования Лапласа. Очевидно, что уравнение (3) справедливо только для линейных и нелинейных функций, удовлетворяющих условиям существования преобразования Лапласа, в частности, для функций с вещественными и нулевыми полюсами, интегрируемых на любом конечном положительном интервале оси t , принимающих нулевые значения при всех отрицательных значениях t и возрастающих не быстрее показательной функции [14]. Если полагать, что функция $f(t)$ до момента начала наблюдения представлена своими начальными значениями, то последнее условие для реальных физических процессов можно всегда считать справедливым.

К рассматриваемому множеству относятся, в частности, распространенные степенные, тригонометрические и гиперболические функции, подробно описанные в таблицах преобразования Лапласа [14]. В таблице приведены некоторые распространенные функции с вещественными и нулевыми полюсами $f(t)$, удовлетворяющие перечисленным условиям, и соответствующие им функционалы $F(\lambda)$. Здесь символом a обозначена произвольная вещественная неотрицательная константа, а n — целая неотрицательная степень.

Нелинейные функции времени и их изображения на оси λ

$f(t)$	$F(\lambda)$
t^n	$n!/\lambda^n$
$t^n e^{at}$	$n!\lambda / (\lambda - a)^{n+1}$
$\sin(at)$	$a\lambda / (\lambda^2 + a^2)$
$\cos(at)$	$\lambda^2 / (\lambda^2 + a^2)$
$sh(at)$	$a\lambda / (\lambda^2 - a^2)$
$ch(at)$	$\lambda^2 / (\lambda^2 - a^2)$
$t \sin(at)$	$2a\lambda^2 / (\lambda^2 + a^2)^2$
$t \cos(at)$	$\lambda(\lambda^2 - a^2) / (\lambda^2 + a^2)^2$
$(1 - e^{-t})/t$	$\lambda \ln(1 + 1/\lambda)$

Свойства преобразования Лапласа позволяют рассчитать более сложные зависимости, такие как линейные суммы функций $f(t)$ из левой части таблицы, их производные и интегралы. Здесь также можно использовать теоремы смещения, подобия, запаздывания, справедливые для преобразования Лапласа.

Таким образом, можно констатировать, что при нелинейных времяимпульсных преобразованиях пуассоновского процесса в режиме реального времени существуют вполне определенные закономерности, связывающие результат преобразования с конкретной нелинейностью. Для широкого круга нелинейностей результат вполне предсказуем.

Задача синтеза нелинейного функционала обратна рассмотренной выше. Она предполагает поиск оригинала $f(t)$ по заданному математическому описанию изображения $F(\lambda)$. Для целого ряда конкретных функций эта задача может решаться по таблице, которая, конечно, не охватывает всех возможных практических задач. Более широкий круг решений можно получить,

используя уравнение (3), свойства и таблицы преобразований Лапласа [14]. Однако и они не охватывают всего множества приложений. Наиболее общим случаем можно считать описание нелинейности $F(\lambda)$ в виде таблицы, которую можно привести к аналитической записи, используя различные методы аппроксимации. Поэтому общим решением задачи будем считать аппроксимацию табличной функции аналитическим выражением и поиск оригинала $f(t)$, обеспечивающего формирование нелинейности в соответствии с полученным выражением.

В качестве примера рассмотрим вариант аппроксимации табличной функции степенным рядом с отрицательными значениями показателей степени:

$$F(\lambda) = \sum_{n=0}^k c_n \lambda^{-n} = \sum_{n=0}^k \frac{c_n}{\lambda^n}. \quad (4)$$

Здесь число членов ряда k определяется требованиями точности, а коэффициенты c_n аппроксимирующего полинома могут быть рассчитаны по любому известному алгоритму аппроксимации, например, по методу наименьших квадратов [15].

Тогда искомый оригинал $f(t)$ описывается формулой

$$f(t) = \sum_{n=0}^k \frac{c_n t^n}{n!}. \quad (5)$$

При этом понимается, что $f(t)=0$ при $t < 0$.

Таким образом, представление функции в виде конечного ряда (4) удовлетворяет поставленным условиям и позволяет найти оригинал $f(t)$ по уравнению (5).

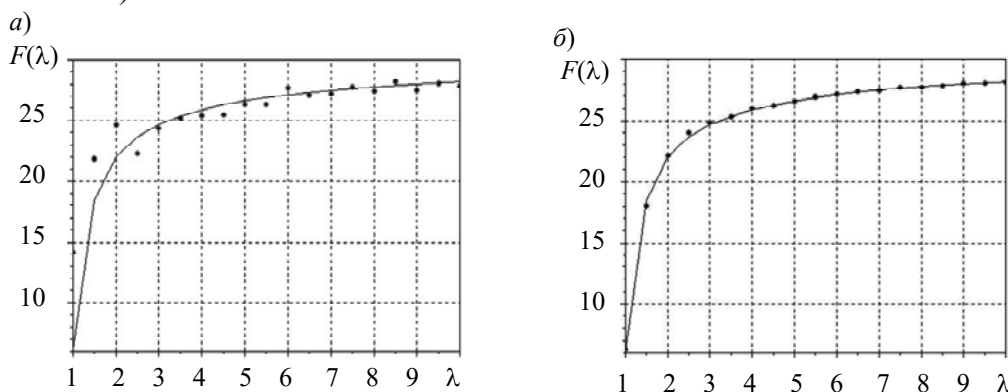
Представленное решение позволяет получить конечный результат в абсолютном большинстве практических задач. Теоретически возможно использовать более сложные аппроксимирующие многочлены, представленные рядами из множества функций таблицы. Но эти решения с точки зрения алгоритмического и технического обеспечения пока представляются более сложными.

Полученные результаты проверены моделированием в пакете прикладных математических программ Scilab, содержащем достаточный набор инструментов для статистического моделирования [16].

В качестве примера выполнено моделирование процесса воспроизведения произвольного нелинейного функционала $F(\lambda) = 30 - \frac{20}{\lambda} + \frac{20}{\lambda^2} - \frac{24}{\lambda^3}$ в диапазоне $\lambda=1-10$.

В соответствии с уравнением (5) для рассматриваемой задачи оригинал $f(t)$ должен иметь вид $f(t) = 30 - 20t + 10t^2 - 4t^3$.

На рисунке приведены результаты моделирования при разном количестве испытаний ($a - 50$, $b - 1000$).



В любом рассмотренном случае заданная функциональная зависимость воспроизводится довольно точно в пределах допустимой статистической погрешности, уменьшающейся с ростом количества испытаний.

Полученные результаты полностью подтверждают гипотезу исследования. Расчетные формулы могут быть использованы при воспроизведении произвольных таблично заданных функций в стохастических системах с пуассоновской составляющей: при построении современных радиоизотопных приборов, систем массового обслуживания, в прикладных задачах радиотехники и связи. Представленный алгоритм синтеза нелинейных функционалов в режиме реального времени обладает оригинальностью и новизной в части совмещения дискретно-событийной имитационной модели пуассоновского процесса и однозначных алгоритмов синтеза функции-оригинала, реализуемой при вычислениях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Малахов А. Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. М.: Сов. радио, 1978.
2. Zhang Y., Yang Y., Shi P., Pan J.-S. Finite-time boundedness of Markovian jump nonlinear systems with incomplete information // Intern. Journal of Systems Science. 2018. Vol. 49, is. 16. P. 3296—3306.
3. Zeng Y., Zhu W. Q. Stochastic averaging of strongly nonlinear oscillators under poisson white noise excitation // Solid Mechanics and its Applications. 2011. Vol. 29. P. 147—155.
4. Левкина С. В. Математическая модель входного потока в информационно-аналитическую систему // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 2. С. 132—135.
5. Vodovozov A. M. Linearization of the static characteristics of a radioisotope density meter // Measurement Techniques. 2018. Vol. 61, is. 9. P. 950—954.
6. Zhou W., Zhang R., Zhou Y. A queuing model on supply chain with the form postponement strategy // Computers and Industrial Engineering. 2013. Vol. 66, is. 4. P. 643—652.
7. Pantelev A. V., Rybakov K. A. Analyzing nonlinear stochastic control systems in the class of generalized characteristic functions // Automation and remote control. 2011. Vol. 72, is. 2. P. 393—404.
8. Rashid R., Hoseini S. F., Gholamian M. R., Feizabadi M. Application of queuing theory in production-inventory optimization // Journal of Industrial Engineering International. 2015. Vol. 11, is. 4. P. 485—494.
9. Yongjun Du, Shubin Si, Tongdan Jin. Reliability importance measures for network based on failure counting process // IEEE Transactions on Reliability. 2019. Vol. 68, is. 1. P. 267—279.
10. Водовозов А. М. Синтез нелинейных функционалов стохастических систем с пуассоновской составляющей // Изв. вузов. Приборостроение. 2018. Т. 61, № 6. С. 485—489.
11. Sobolev V. I. On the correspondence between dynamic and static errors in data measurement systems // Measurement Techniques. 2014. Vol. 57, N 3. P. 247—254.
12. Vodovozov A. M. Digital processing of measurement information in radioisotope devices // Measurement Techniques. 2018. Vol. 61, is. 2. P. 177—181.
13. Кингман Д. Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007.
14. Shynk J. J. Mathematical Foundations for Linear Circuits and Systems in Engineering. Santa Barbara: University of California, 2016. 656 p.
15. Radi B., El Hami A. Advanced Numerical Methods with Matlab: Function Approximation and System Resolution. Hoboken: Wiley, 2018.
16. Thanki R. M., Kothari A. M. Digital image processing using SCILAB. NY: Springer International Publishing, 2018.

Сведения об авторе

Александр Михайлович Водовозов — канд. техн. наук, профессор; Вологодский государственный университет, кафедра управляющих и вычислительных систем; заведующий кафедрой; E-mail: am.vodovozov@gmail.com

Поступила в редакцию
27.01.2020 г.

Ссылка для цитирования: Водовозов А. М. Нелинейные задачи реального времени в стохастических системах с пуассоновской составляющей // Изв. вузов. Приборостроение. 2020. Т. 63, № 6. С. 501—506.

NONLINEAR REAL-TIME PROBLEMS IN STOCHASTIC SYSTEM WITH POISSON COMPONENT

A. M. Vodovozov

Vologda State University, 160000, Vologda, Russia
E-mail: am.vodovozov@gmail.com

Nonlinear stochastic systems under pulsed input effects forming Poisson flows of events are considered. The process of nonlinear transformation in the system of information represented by time intervals between events is analyzed, and a given nonlinear functional in the Poisson flow intensity function is synthesized. The research is based on the probabilistic time-pulse representation of the Poisson process; the time interval between input events is used as an argument for calculations. An analytical solution to the problem accounting for the exponential distribution of random time intervals characteristic for the simplest Poisson flow is proposed. The algorithm of synthesis of a generalized nonlinear functional given as a table is considered, and formulas for calculating the original function are presented for the case when table data are approximated by power series with negative exponents. The results are confirmed by digital modeling in the Scilab package of applied mathematical programs. The proposed algorithm for configuring a computing device to reproduce a given analytically nonlinear functional can be applied for solution of practical problems in stochastic systems with a Poisson input signal, such as devices using ionizing radiation, queuing systems, etc.

Keywords: stochastic system, Poisson flow, time-pulse transformation, nonlinear functional, synthesis algorithm

REFERENCES

1. Malakhov A.N. *Kumulyantnyy analiz sluchaynykh negaussovykh protsessov i ikh preobrazovaniy* (Cumulative Analysis of Random Non-Gaussian Processes and Their Transformations), Moscow, 1978. (in Russ.)
2. Zhang Y., Yang Y., Shi P., Pan J.-S. *International Journal of Systems Science*, 2018, no. 16(49), pp. 3296–3306.
3. Zeng Y., Zhu W.Q. *Solid Mechanics and its Applications*, 2011, vol. 29, pp. 147–155.
4. Levkina S.V. *Journal of Instrument Engineering*, 2017, no. 2(60), pp. 132–135.
5. Vodovozov A.M. *Measurement Techniques*, 2018, no. 9(61), pp. 950–954.
6. Zhou W., Zhang R., Zhou Y. *Computers and Industrial Engineering*, 2013, no. 4(66), pp. 643–652.
7. Panteleev A.V., Rybakov K.A. *Automation and remote control*, 2011, no. 2(72), pp. 393–404.
8. Rashid R., Hoseini S.F., Gholamian M.R., Feizabadi M. *Journal of Industrial Engineering International*, 2015, no. 4(11), pp. 485–494.
9. Yongjun Du, Shubin Si, Tongdan Jin. *IEEE Transactions on Reliability*, 2019, no. 1(68), pp. 267–279.
10. Vodovozov A.M. *Journal of Instrument Engineering*, 2018, no. 6(61), pp. 485–489.
11. Sobolev V.I. *Measurement Techniques*, 2014, no. 3(57), pp. 247–254.
12. Vodovozov A.M. *Measurement Techniques*, 2018, no. 2(61), pp. 177–181.
13. Kingman J. *Poisson Processes*, Oxford University Press, 1992.
14. Shynk J.J. *Mathematical Foundations for Linear Circuits and Systems in Engineering*, Santa Barbara, University of California, 2016, 656 p.
15. Radi B., El Hami A. *Advanced Numerical Methods with Matlab: Function Approximation and System Resolution*, Hoboken, Wiley, 2018.
16. Thanki R.M., Kothari A.M. *Digital image processing using SCILAB*, NY, Springer International Publishing, 2018.

Data on author

Alexander M. Vodovozov

— PhD, Professor; Vologda State University, Department of Control and Computing Systems; Head of the Department;
E-mail: am.vodovozov@gmail.com

For citation: Vodovozov A. M. Nonlinear real-time problems in stochastic system with Poisson component. *Journal of Instrument Engineering*. 2020. Vol. 63, N 6. P. 501—506 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2020-63-6-501-506