УДК 519.614
DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-2-90-96

ОБОСНОВАНИЕ ПЕРЕХОДА ГИПОТЕЗЫ АДАМАРА В ТЕОРЕМУ

А. М. Сергеев

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: mbse@mail.ru

Обсуждается доказанность гипотезы Адамара о существовании ортогональных матриц максимума детерминанта с элементами –1 и +1 на всех порядках 4t, широко используемых в задачах обработки, преобразования и кодирования информации. Приводятся „проблемные“ порядки матриц Адамара для вычисления известными методами, не позволяющие практически подтвердить доказанность гипотезы. Рассматриваются матрицы Адамара и матрицы Мерсенна как математические объекты, поиск которых принципиально различен. Приводится взаимосвязь существующих на всех порядках (4t–1) матриц Мерсенна с матрицами Адамара, доказывающая существование этих матриц на всех порядках 4t.

Ключевые слова: *ортогональные преобразования, взаимосвязь ортогональных матриц, матрицы Адамара, квазиортогональные матрицы, матрицы Мерсенна, гипотеза Адамара*

Аппарат ортогональных преобразований в системах кодирования и передачи информации широко используется [1—4] в задачах помехоустойчивого кодирования, маскирования и сжатия изображений, генерации кодов для систем связи и радиолокации и др., основой которых являются хорошо изученные ортогональные преобразования. Однако остались не решенными некоторые вопросы теории ортогональных матриц, используемых в указанных преобразованиях.

Сформулированная Адамаром [5] гипотеза о существовании матриц максимума детерминанта, состоящих из элементов –1 и +1 и удовлетворяющих уравнению $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = n\mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ — единичная матрица) на всех порядках $n = 4t$, где t — натуральное число, породила за полтора века существования множество попыток доказать ее теоретически и практически, сопровождавшихся появлением большого количества методов вычисления и конструирования таких матриц, рассуждений и предположений.

Для практического применения в перечисленных выше задачах ортогональных преобразований с возрастанием размерности данных особое значение приобретает возможность свободного выбора матриц Адамара как по структурам, так и по их порядкам, в том числе большим.

Практика применения компьютеров при поиске матриц Адамара показала, что для каждого порядка существуют различные по внешнему виду — расположению элементов и структуре — матрицы. При этом сам Адамар не определял структуру (орнамент, узор и внешний вид) матриц, которые жестко связаны с применяемыми методами вычисления.

В настоящей работе на основе обсуждения работ [6, 7] уточняется современное состояние теории ортогональных матриц, что подтверждает преобразование гипотезы Адамара в теорему.

Отметим, что теоретическое доказательство существования матриц Адамара не обязательно связано с методами их вычисления. Например, теоретически еще в середине XX века для каждого нечетного числа q была установлена логарифмическая граница $t = 2\log_2(q - 2)$ порядков $2^t q$, на которой и выше которой (при удвоении порядков) матрицы Адамара определенно существуют [8]. Однако для ветви $q = 3\mathrm{mod}4$ конкретные образцы матриц вычислить непросто, это представляет математическую проблему.

Поскольку переход от теоретических рассуждений к практическим доказательствам требует разработки методов вычисления и анализа их результативности, в работах [6, 7] с использованием диофантовых уравнений описания ортогональных орнаментов рассмотрены свойства, вытекающие из порядков матриц и их орнаментов.

Как правило, вид орнамента матриц Адамара связан с используемым методом вычисления. Структурированные орнаментальные матрицы Адамара позволяют вычислить ставшие классическими методы Сильвестра, Пэли, Вильямсона, Скарпи, а также их современные модификации.

Для метода Сильвестра, например, характерно удвоение порядка очередной искомой матрицы относительно предыдущей [6]. Соответственно орнамент любой матрицы Адамара, полученной по методу Сильвестра, состоит из четырех итерационно наращиваемых вдвое блоков: трех одинаковых и одного с инверсией знаков элементов, что может быть представлено как вложение некоторой исходной матрицы в матрицу Адамара второго порядка.

Вычисление матриц Адамара методом Скарпи предполагает вложение нормализованной матрицы Адамара без учета ее каймы: замену элемента исходной матрицы самой матрицей с учетом знака заменяемого элемента. Служащий обобщением кронекерова умножения метод формирует блочно-составной орнамент вычисляемой матрицы [9, 10].

В основе метода Пэли — обобщение алгоритмов расчета матриц Адамара при переходе от простых GF(p) к сложным GF(p^m) конечным полям [11, 12]. Классическая работа [11] освещает не одну, а две возможные конструкции матриц Адамара, состоящих (в зависимости от сложности поля) из простых или составных циклических блоков. Формируемая методом Пэли строка-циркулянт определяет циклический орнамент блоков матриц Адамара [12].

Именно Пэли заметил, что предлагаемые им конструкции не всегда совпадают по порядкам с конструкциями Скарпи, поскольку Скарпи применил вставку усеченной до основы матрицы. Этот факт иллюстрирует рис. 1, где область I соответствует множеству матриц Адамара, вычисляемых методом Пэли, II — множеству матриц Адамара, вычисляемых методом Скарпи, III — всему множеству матриц Адамара.

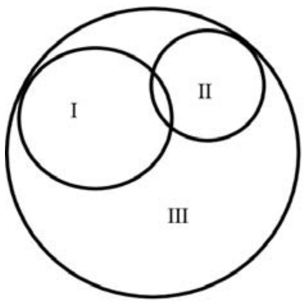

Рис. 1

В настоящее время формируются выходящие за пределы областей I и II отдельные матрицы или семейства, порядки которых характерны для компьютерных решений: 92, 116, 156, 172, 184, 188, 232, 236, 260, 268, 292, 324, 356, 372, 376, 404, 412, 428, 436, 452, 472, 476, 508, 520, 532, 536, 584, 596, 604, 612, 652, 668, 712, 716, 732, 756, 764, 772, 808, 836, 852, 856, 872, 876, 892, 904, 932, 940, 944, 952, 956, 964, 980, 988, 996 и т.д.

Например, компьютерный метод, впервые позволивший получить матрицу порядка 92, основанный на конструкции Вильямсона [4], опирается на использование четырех симметричных блоков **A**, **B**, **C** и **D**, из которых получается несимметричная в целом матрица учетверенного порядка с соответствующим орнаментом.

Анализ позволяет выделить проблемные порядки перечисленных методов, на которых матрицы Адамара не могут быть найдены. Так, последовательность порядков матриц Адамара, теоретически получаемых по методу Сильвестра: 4, 8, 16, 32, 64, 128 и т.д. Соответственно порядки 12, 20, 24, 36 и т.д. являются невычислимыми. Метод Пэли позволяет быстро вычислять матрицы, порядок которых косвенно связан с простыми числами или их степенями, позволяющими организовать поле для вычислений. Есть свои ограничения и у метода Скарпи.

Использование компьютерных методов позволяет преодолеть эти ограничения, однако по методу Вильямсона невозможно найти матрицу 144 и некоторых других порядков в силу ограничений несимметричной структуры. Симметрирование четырехблочной конструкции [13] позволило найти порядок 144 и отмеченные выше порядки 92, 116, 172 [14]. Суперкомпьютеры [15, 16] и специальные программы поиска не только расширили пределы возможного, придав универсальности доказательству гипотезы Адамара положением о разрешающей силе симметрии.

Тем не менее, современные возможности вычислительной техники не позволяют найти матрицы Адамара порядков 668, 716, 892, 1004, 1132, 1244, 1388, 1436, 1676, 1772, 1916, 1948, 1964 и т.д. Сказанное выше не означает, что сегодня нельзя доказать существование матриц Адамара на всех порядках $4t$.

Попытки с помощью комбинаторных методов перебрать распространенные [5, 9, 11] или специфичные структуры — матрицы Буша с группированием на диагонали одинаковых блоков из единичных элементов максимально возможной величины, предложенные основателем современной теории групп З. Янко [17], — зашли в тупик, поскольку матрицы Адамара способны к неограниченному усложнению с ростом порядка. Комбинаторными методами это множество матриц Адамара не вычислить. Нужно отойти от привычных способов доказательства, которые это доказательство не приближают.

Доказательства сложных теорем, таких как теорема Ферма, потребовали учета связей весьма разных объектов: эллиптических кривых и модулярных форм. В середине XX века японский исследователь Танияма заметил, что всякая эллиптическая кривая с рациональными коэффициентами является модулярной. Иными словами, между объектами разной природы имеется определенное родство. Преобразование гипотезы Таниямы в теорему базируется на соответствии этих объектов друг другу и переложении сложности на другие, более исследуемые объекты.

В 1985 г. немецкий математик Герхард Фрей предположил, что эллиптическая кривая, полученная из степенного уравнения, не может быть модулярной, когда теорема Ферма, являющаяся следствием гипотезы Таниямы, неверна. Самому Фрею не удалось доказать это утверждение, однако вскоре доказательство на анализе соотношения эллиптических кривых и модулярных форм было получено американским математиком Кеннетом Рибетом.

Для осуществления подобного способа доказательства существования матриц Адамара требовались матрицы, значительно отличающиеся от них. В 2006 г. было положено начало теории квазиортогональных матриц **M** [18], основанной на выделенном Адамаром свойстве — максимуме детерминанта. Однако, как показали исследования, предсказуемый вид орнамента свойствен матрицам максимального детерминанта не выше порядка 13 [18, 19].

Предсказуемый вид орнамента был найден в матрицах нечетного порядка $4t - 1$, определенных локальным экстремумом, а не уравнением вида, сходного с $\mathbf{H}^{\mathrm{T}}\mathbf{H} = n\mathbf{I}$ [20]. Под локальным экстремумом матрицы понимается частный оптимум модуля ее детерминанта при наличии ограничений на значения элементов (меньше единицы по абсолютной величине) и ортогональность столбцов. При этом вариация элементов в некоторой достаточно малой окрестности желаемого решения приводит к уменьшению модуля ее детерминанта [18].

Для поиска экстремальных матриц был предложен алгоритм шаговой оптимизации детерминанта ортогональных матриц [21], находящий на порядках $4t$ матрицы Адамара, а на порядках на единицу меньше — неструктурированные матрицы локального экстремума (на рис. 2 представлена матрица локального экстремума детерминанта порядка 7).

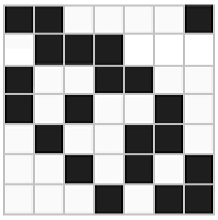

Рис. 2

Поиск экстремальных матриц даже невысокого порядка проблематичен. В работе [22] выделены ветви матриц, имеющих по два элемента $\{1, -b\}$. Если оба элемента отличны от единицы, то один всегда можно привести к единице. Второй элемент b у ортогональных по столбцам матриц нечетного порядка $n = 4t - 1$ заведомо меньше единицы. По нескольким образцам на смежных порядках можно однозначно установить (идентифицировать) формулу для $b = t/(t + \sqrt{t})$ всех матриц $\mathbf{M}_n$ выделенного семейства. После чего апостериори (а не априори), устанавливается, что эта формула описывает рост элемента от стартового значения ½ монотонно к единице, без разрывов [22].

Поскольку матрицы ортогональны в смысле $\mathbf{M}_n^{\mathrm{T}}\mathbf{M}_n=\mu\mathbf{I}_n$, то полученное апостериори уравнение можно положить в основу априорного определения, следуя Адамару. Но тогда необходимо перейти к поиску переборами.

Согласно принципу двойственности, матрицы Мерсенна с вещественными или иррациональными элементами взаимно-однозначно выстраиваются, сопровождая матрицы Адамара.

Отметим, что при $n\to\infty$ элемент $-b\to-1$. На порядках, равных числам Мерсенна $n=2^t-1$, матрицы легко построить алгоритмом, подобным алгоритму Сильвестра [23]. В таком случае связанная с матрицей Мерсенна матрица Адамара находится по формуле

$$\mathbf{H}_{4t} = \begin{pmatrix} -\lambda & e^T \\ e & \mathbf{M}_{4t-1} \end{pmatrix}.$$

Здесь $\lambda = 1$ и e — собственные число и вектор матрицы $\mathbf{M}_{4t-1}$ при $-b = -1$. Доказательство следует из того, что структурный инвариант матриц $\mathbf{M}_n$, тесно связанный с выражением для b, соответствует превалированию положительных элементов над отрицательными на единицу. Баланс $\mathbf{M}_{4t-1}e = \lambda e$ приводит к ортогональности по столбцам синтезируемой матрицы Адамара. Заметим, что этот инвариант не зависит от порядка матрицы. Следовательно, так можно поступить с матрицей Мерсенна любого порядка [24, 25], которая, заметим, позволяет находить матрицы Адамара (на рис. 3, *а* и *б* представлены портреты матриц Мерсенна порядков 7 и 8, *в* и *г* — Адамара порядков 11 и 12).

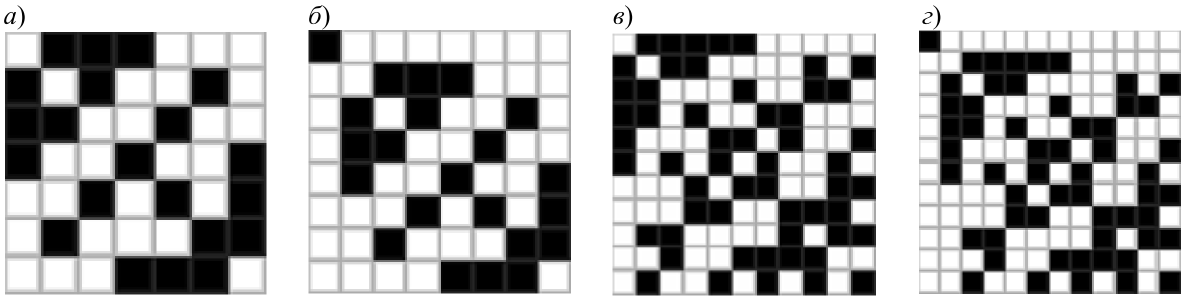

Рис. 3

Матрица порядка 12 подтверждает гипотезу Адамара об ее отличии от матриц Сильвестра [5]. Таким образом, вне зависимости от орнамента существующих матриц Мерсенна на всех порядках $4t - 1$ аналитически однозначно следует существование матриц Адамара на всех порядках $4t$.

Разумеется, орнаменты упрощают нахождение квазиортогональных матриц, особенно симметричных [26, 27]. За счет вклада работ [13—15] и других, выполненных международными коллективами исследователей, в том числе по грантам Минобрнауки РФ, а также грантам научных фондов Австралии и Канады, справочник [4] значительно пополнен.

Для практики ортогональных преобразований информации очень важны игнорируемые в данной работе орнаментальные ограничения и специальные приемы нахождения симметричных матриц Адамара. Это не помешало установить, что, с одной стороны, существующие орнаментальные связи, а с другой — аналитическая связь матриц Мерсенна и Адамара позволяют говорить о том, что гипотеза Адамара сегодня уже доказана.

Как известно, мерилом истинности теоретических рассуждений и утверждений является практика. А практика, к сожалению, показывает, что вычислить матрицы Адамара на всех порядках $4t$ даже на современных суперкомпьютерах не представляется возможным даже с использованием рассмотренной выше связи, поскольку сами компьютеры (языки программирования) не оперируют величиной „бесконечность“.

Следовательно, можно считать гипотезу Адамара теоремой.

Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования РФ, грант FSRF-2020-0004.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ahmed N., Rao R.* Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Berlin-Heidelberg-NY: Springer-Verlag, 1975. 263 p.

2. *Wang R.* Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis. Cambridge University Press, 2010. 504 p.

3. *Horadam K. J.* Hadamard Matrices and Their Applications. Princeton University Press, 2012. 280 p.

4. Handbook of combinatorial designs. Discrete mathematics and its applications / Ed. by *Ch. J. Colbourn, J. H. Dinitz*. Chapman and Hall/CRC, 2006, 1000 p.

5. *Hadamard J.* Résolution d’une Question Relative aux Déterminants // Bulletin des Sciences Mathématiques. 1893. Vol. 17. P. 240—246.

6. *Балонин Н. А., Сергеев М. Б.* Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Ч. 1 // Информационно-управляющие системы. 2018. № 6. С. 2—13. DOI: 10.31799/1684-8853-2018-6-2-13.

7. *Балонин Н. А., Сергеев М. Б.* Как гипотезе Адамара помочь стать теоремой. Ч. 2 // Информационно-управляющие системы. 2019. № 1. С. 2—10. DOI: 10.31799/1684-8853-2019-1-2-10.

8. *Seberry J. W.* On the existence of Hadamard matrices // J. Combin. 1976. Th. (Ser. A). Vol. 21. P. 188—195.

9. *Scarpis U.* Sui determinanti di valore Massimo // Rendiconti della R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. 1898. N 31. P. 1441—1446.

10. *Балонин Н. А., Балонин Ю. Н., Сергеев М. Б.* Вычисление матриц Мерсенна и Адамара методом Скарпи // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2014. № 3 (91). С. 103—111.

11. *Paley R. E. A. C.* On orthogonal matrices // J. of mathematics and physics. 1933. Vol. 12. P. 311—320.

12. *Балонин Н. А., Сергеев М. Б.* Вычисление матриц Мерсенна методом Пэли // Изв. вузов. Приборостроение. 2014. Т. 57, № 10. С. 38—41.

13. *Балонин Н. А., Балонин Ю. Н., Джокович Д. Г., Карбовский Д. А., Сергеев М. Б.* Конструкция симметричных матриц Адамара // Информационно-управляющие системы. 2017. № 5(90). С. 2—11. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2017.5.2.

14. *Di Matteo O., Djokovic D. Z., Kotsireas I. S.* Symmetric Hadamard matrices of order 116 and 172 exist // Spec. matrices. 2015. N 3. P. 227—234.

15. *Di Matteo O.* Methods for parallel quantum circuit synthesis, fault-tolerant quantum RAM, and quantum state tomography: Doctor’s thesis. Waterloo, Ontario, Canada, 2019. 98 p.

16. *Sawade K. A.* Hadamard matrix of order 268 // Graphs and Combinatorics. 1985. Vol. 1, is. 1. P. 185—187.

17. *Janko Z.* The existence of a Bush-type Hadamard matrix of order 36 and two new infinite classes of symmetric designs // J. of combinatorial theory. 2001. Ser. A. Vol. 95, N 2. P. 360—364.

18. *Балонин Н. А., Мироновский Л. А.* Матрицы Адамара нечетного порядка // Информационно-управляющие системы. 2006. № 3. С. 46—50.

19. *Балонин Н. А., Сергеев М. Б.* М-матрицы // Информационно-управляющие системы. 2011. № 1(50). С. 14—21.

20. *Балонин Н. А., Сергеев М. Б.* Матрицы Мерсенна и Адамара // Информационно-управляющие системы. 2016. № 1(80). С. 2—15. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.1.2.

21. *Балонин Н. А., Сергеев М. Б.* Матрицы локального максимума детерминанта // Информационно-управляющие системы. 2014. № 1(68). С. 2—15.

22. *Балонин Н. А., Сергеев М. Б.* Нормы обобщенных матриц Адамара // Вестн. СПбГУ. Сер. 10. 2014. Вып. 2. С. 5—11.

23. *Balonin N. A., Vostrikov A. A., Sergeev M. B.* On Two Predictors of Calculable Chains of Quasi-Orthogonal Matrices // Automatic Control and Computer Sciences. 2015. Vol. 49, N 3. P. 153—158. DOI: 10.3103/S0146411615030025.

24. *Сергеев А. М.* О взаимосвязи одного вида квазиортогональных матриц, построенных на порядках последовательностей $4k$ и $4k - 1$ // Изв. СПбГЭТУ ЛЭТИ. 2017. № 7. С. 12—17.

25. *Балонин Ю. Н., Востриков А. А., Сергеев А. М., Егорова И. С.* О взаимосвязях квазиортогональных матриц, построенных на известных последовательностях чисел // Тр. СПИИРАН. 2017. № 1(50). С. 209—223. DOI: 10.15622/SP.50.9.

26. *Балонин Н. А., Сергеев М. Б.* Матрицы Пропус 92 и 116 // Информационно-управляющие системы. 2016. № 2(81). С. 101—103. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.2.101.

27. *Сергеев А. М., Востриков А. А.* Специальные матрицы: вычисление и применение. СПб: Политехника, 2018. 112 с.

Сведения об авторе

Александр Михайлович Сергеев — Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, кафедра вычислительных систем и сетей; научный сотрудник; E-mail: mbse@mail.ru

Поступила в редакцию
01.09.2020 г.

Ссылка для цитирования: *Сергеев А. М.* Обоснование перехода гипотезы Адамара в теорему // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 2. С. 90—96.

JUSTIFICATION OF THE TRANSITION OF THE HADAMARD HYPOTHESIS TO THE THEOREM

A. M. Sergeev

St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
190000, St. Petersburg, Russia
E-mail: mbse@mail.ru

The validity of Hadamard hypothesis about the existence of orthogonal matrices of the maximum determinant with elements –1 and +1 of all orders of 4t with t being a natural number, which are widely used in problems of information processing, transformation, and encoding, is discussed. The "problematic" orders of Hadamard matrices for calculation by known methods, which do not allow to practically confirm the proof of the hypothesis, are presented. Hadamard matrices and Mersenne matrices are considered as mathematical objects whose search is fundamentally different. The relationship of Mersenne matrices existing for all orders (4t–1) with Hadamard matrices is given, which proves the existence of these matrices for all orders of 4t.

Keywords: orthogonal transformations, interrelation of orthogonal matrices, Hadamard matrices, quasi-orthogonal matrices, Mersenne matrices, Hadamard hypothesis

REFERENCES

1. Ahmed N., Rao R. *Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing*, Berlin-Heidelberg-NY, Springer-Verlag, 1975, 263 p.
2. Wang R. *Introduction to Orthogonal Transforms with Applications in Data Processing and Analysis*, Cambridge University Press, 2010, 504 p.
3. Horadam K.J. *Hadamard Matrices and Their Applications*, Princeton University Press, 2012, 280 p.
4. Colbourn Ch.J., Dinitz J. H., eds., *Handbook of combinatorial designs. Discrete mathematics and its applications*, 2nd ed., Chapman and Hall/CRC, 2006, 1000 p.
5. Hadamard J. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1893, vol. 17, pp. 240–246.
6. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* (Information and Control Systems), 2018, no. 6, pp. 2–13. DOI: 10.31799/1684-8853-2018-6-2-13.
7. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* (Information and Control Systems), 2019, no. 1, pp. 2–10. DOI: 10.31799/1684-8853-2019-1-2-10.
8. Seberry J.W. *J. Combin*, 1976, Th. (Ser. A), no. 21, pp. 188–195.
9. Scarpis U. *Rendiconti della R. Istituto Lombardo di scienze e lettere*, 1898, no. 31, pp. 1441–1446.
10. Balonin N.A., Balonin Y.N., Sergeev M.B. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2014, no. 3(91), pp. 103–111. (in Russ.)
11. Paley R.E.A.C. *Journal of mathematics and physics*, 1933, vol. 12, pp. 311–320.
12. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Journal of Instrument Engineering,* 2014, no. 10(57), pp. 38–41. (in Russ.)
13. Balonin N.A., Balonin Y.N., Dokovic D.Z., Karbovskiy D.A., Sergeev M.B. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* (Information and Control Systems), 2017, no. 5(90), pp. 2–11. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2017.5.2. (in Russ.)
14. Di Matteo O., Djokovic D.Z., Kotsireas I.S. *Spec. matrices*, 2015, no. 3, pp. 227–234.
15. Di Matteo O. *Methods for parallel quantum circuit synthesis, fault-tolerant quantum RAM, and quantum state tomography*, Doctor's thesis, Waterloo, Ontario, Canada, 2019, 98 p.
16. Sawade K.A. *Graphs and Combinatorics*, 1985, no. 1, pp. 185–187.
17. Janko Z. *Journal of combinatorial theory*, 2001, Ser. A, no. 2(95), pp. 360–364.
18. Balonin N.A., Mironovskii L.A. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* (Information and Control Systems), 2006, no. 3, pp. 46–50. (in Russ.)
19. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* (Information and Control Systems), 2011, no. 1(50), pp. 14–21. (in Russ.)
20. Balonin N.A., Sergeev M.B. Informatsionno-upravliaiushchie sistemy (Information and Control Systems), 2016, no. 1(80), pp. 2–15. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.1.2. (in Russ.)
21. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* (Information and Control Systems), 2014, no. 1(68), pp. 2–15. (in Russ.)
22. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, ser. 10, 2014, vol. 2, pp. 5–11. (in Russ.)
23. Balonin N.A., Vostrikov A.A., Sergeev M.B. *Automatic Control and Computer Sciences*, 2015, no. 3(49), pp. 153–158. DOI: 10.3103/S0146411615030025.
24. Sergeev A.M. *Proceedings of Saint Petersburg Electrotechnical University*, 2017, no. 7, pp. 12–17. (in Russ.)
25. Balonin Y.N., Vostrikov A.A., Sergeev A.M., Egorova I.S. *SPIIRAS Proceedings*, 2017, no. 1(50), pp. 209–223. DOI: 10.15622/SP.50.9.
26. Balonin N.A., Sergeev M.B. *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy* (Information and Control Systems, 2016, no. 2(81), pp. 101–103. DOI: 10.15217/issn1684-8853.2016.2.101(in Russ.)
27. Sergeev A.M., Vostrikov A.A. *Spetsial'nyye matritsy: vychisleniye i primeneniye* (Special Matrices: Calculation and Application), Saint-Petersburg, 2018, 112 p. (in Russ.)

Data on author

Alexander M. Sergeev — St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Computer Systems and Networks; Researcher; E-mail: mbse@mail.ru

For citation: Sergeev A. M. Justification of the transition of the Hadamard hypothesis to the theorem. *Journal of Instrument Engineering*. 2021. Vol. 64, N 2. P. 90—96 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-2-90-96