ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

УДК 681.51
DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-2-97-103

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ В УСЛОВИЯХ ЗАПАЗДЫВАНИЯ И АДДИТИВНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ВЫХОДА

Куок Дат Во, А. А. Бобцов, Н. А. Николаев, А. А. Пыркин

Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: cuoi.di.em89@gmail.com

Решается задача стабилизации линейного нестационарного объекта управления по выходу, то есть без измерения переменных состояния. Решение этой задачи затруднено тем, что выходная переменная содержит запаздывание, кроме того, в измерениях присутствует возмущение в виде синусоидальной функции времени с неизвестными постоянными параметрами. В предположении, что параметры объекта управления являются известными нестационарными функциями времени, предлагается решение: синтез наблюдателя переменных состояния строится с использованием подхода, предусматривающего идентификацию постоянных параметров.

Ключевые слова: *нестационарные системы, наблюдатели переменных состояния, идентификация постоянных параметров, синусоидальное возмущение, запаздывание*

Введение. В статье рассматривается задача синтеза стабилизирующего закона управления по выходу (т.е. без измерения вектора переменных состояния или производных выходного сигнала) для линейного нестационарного объекта. Несмотря на то что рассматривается линейный объект с известными параметрами, именно нестационарность параметров вызывает дополнительные трудности [1, 2]. Особенные сложности возникают при управлении по выходу и при запаздывании (см., например, [3—6]).

Отметим, что поднимаемая в статье проблема является крайне актуальной при решении практических задач, поскольку измерительные устройства вносят изменяющиеся во времени задержки. Этот факт осложняет оценку состояния динамической системы и, как следствие управление (в нашем случае стабилизацию), поскольку выходной сигнал будет подвержен задержкам. Заметим, что для линейных систем со стационарными параметрами данная проблема хорошо изучена, и сходимость наблюдателя обычно определяется выполнимостью линейного матричного неравенства. С другой стороны, проблема синтеза наблюдателей и методов управления по выходу активно исследуется (см. обзоры литературы и список ссылок в недавних публикациях [5, 6]).

Предлагаемое решение от аналогов (см., например, [5, 6]) отличает одновременное наличие запаздывания и возмущающего воздействия в канале измерения. Именно возмущающее воздействие усложняет использование хорошо зарекомендовавших себя подходов, предусматривающих решение матричного дифференциального уравнения Риккати [5] и синтез предикторов [6].

В качестве возмущающего воздействия выбирается синусоидальный сигнал с неизвестными амплитудой, частотой и фазой. Такая постановка задачи имеет физический смысл и в общем случае может быть расширена до случая суммы нескольких синусоидальных функций.

Математическая постановка задачи. Рассматривается полностью наблюдаемая и управляемая одноканальная линейная нестационарная система вида

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \tag{1}$$

$$y(t) = C^{\mathrm{T}}(t-D)x(t-D) + \delta(t), \tag{2}$$

где $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ — известные матрицы и векторы с переменными известными коэффициентами; $u(t)$ и $y(t)$ — измеряемые сигнал управления и выходная переменная; δ_1, ω и δ_0 — неизвестные параметры возмущающего воздействия $\delta(t) = \delta_1 \sin(\omega t + \delta_0)$; D — известное запаздывание, которое представляет собой некоторую гладкую ограниченную функцию времени.

Требуется синтезировать наблюдатель

$$\hat{x}(t) = G(y, u),$$

обеспечивающий выполнение целевого условия

$$\lim_{t\to\infty} \left|\hat{x}(t) - x(t)\right| = 0, \tag{3}$$

где $\hat{x}(t)$ — оценка вектора $x(t)$, и построить регулятор $u(t)$, обеспечивающий асимптотическую устойчивость положения равновесия $x = 0$.

Синтез адаптивного наблюдателя. Для синтеза наблюдателя будем использовать методы, предусматривающие параметрическую идентификацию [7, 8]. Для этого рассмотрим дифференциальное уравнение, аналогичное (1):

$$\dot{\xi}(t) = A(t)\xi(t) + B(t)u(t). \tag{4}$$

Сформируем вектор

$$e(t) = \xi(t) - x(t). \tag{5}$$

Продифференцировав (5) с учетом уравнений (1) и (4), получаем

$$\dot{e}(t) = A(t)e(t). \tag{6}$$

Из выражения (6) следует

$$e(t) = \Phi(t)\theta, \tag{7}$$

где θ — вектор неизвестных постоянных параметров ($\theta = e(0)$ при единичной матрице $\Phi(0)$ и нулевых начальных условиях вектора $\xi(t)$); матрица $\Phi(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t).$$

Из уравнений (5) и (7) легко видеть, что

$$x(t) = \xi(t) - e(t) = \xi(t) - \Phi(t)\theta, \tag{8}$$

откуда проблема синтеза наблюдателя переменных состояния $x(t)$ может быть сведена к задаче идентификации вектора неизвестных постоянных параметров θ.

Таким образом, наблюдатель примет вид

$$\hat{x}(t) = G(y, u) = \xi(t) - e(t) = \xi(t) - \Phi(t)\hat{\theta},$$

где $\hat{\theta}$ — оценка вектора неизвестных параметров θ.

Из (8) легко видеть, что

$$x(t-D) = \xi(t-D) - \Phi(t-D)\theta.$$

Для идентификации вектора θ подставим в уравнение (2) выражение

$$x(t-D) = \xi(t-D) - \Phi(t-D)\theta.$$

Тогда

$$y(t)=C(t-D)(\xi(t)-\Phi(t)\theta)+\delta(t)=$$
$$=C^{\mathrm{T}}(t-D)\xi(t-D)-C^{\mathrm{T}}(t-D)\Phi(t-D)\theta+\delta(t)=$$
$$=C^{\mathrm{T}}(t-D)\xi(t-D)+m^{\mathrm{T}}\theta+\delta(t),$$

где $m^{\mathrm{T}}(t)=-C^{\mathrm{T}}(t-D)\Phi(t-D)$.

Таким образом, получаем

$$y(t)-C^{\mathrm{T}}(t-D)\xi(t-D)=m^{\mathrm{T}}\theta+\delta(t). \quad (9)$$

Рассмотрим линейный оператор

$$W(p)=\frac{\lambda^2 p^2}{(p+\lambda)^2},$$

где $p=d/dt$ и коэффициент $\lambda>0$, сформируем с его помощью на основе (9) вспомогательный сигнал вида

$$q(t):=W(p)[y(t)-C^{\mathrm{T}}(t-D)\xi(t-D)]$$

и заметим, что

$$q(t)=W(p)[m^{\mathrm{T}}(t)\theta+\delta(t)]=W(p)[m^{\mathrm{T}}(t)\theta]-\omega^2\frac{\lambda^2}{(p+\lambda)^2}[\delta(t)],$$

где в последнем выражении было использовано легко проверяемое соотношение

$$p^2[\delta(t)]=-\omega^2\delta(t).$$

Таким образом, для идентификации вектора θ находим регрессионную модель вида

$$q(t)=W(p)m^{\mathrm{T}}\theta-\omega^2\frac{\lambda^2}{(p+\lambda)^2}[y(t)-C^{\mathrm{T}}(t-D)\xi(t-D)-m^{\mathrm{T}}\theta]=$$
$$=m_1^{\mathrm{T}}\theta+m_2\omega^2+m_3^{\mathrm{T}}\omega^2\theta,$$

где $m_1^{\mathrm{T}}=W(p)[m^{\mathrm{T}}];m_2=\dfrac{\lambda^2}{(p+\lambda)^2}[y(t)-C^{\mathrm{T}}(t-D)\xi(t-D)];m_3^{\mathrm{T}}=\dfrac{\lambda^2}{(p+\lambda)^2}[m^{\mathrm{T}}]$.

Итак, получаем стандартное регрессионное уравнение

$$q(t)=M^{\mathrm{T}}(t)\eta, \quad (10)$$

где известный вектор $M^{\mathrm{T}}=[m_1^{\mathrm{T}};\, m_2;\, m_3^{\mathrm{T}}]$ и неизвестный вектор постоянных параметров $\eta=\mathrm{col}\left\{\theta;\omega^2;\omega^2\theta\right\}$.

Для идентификации вектора неизвестных постоянных параметров η могут быть использованы любые известные подходы, в том числе хорошо зарекомендовавший себя метод динамического расширения регрессора и смешивания (DREM, Dynamic Regressor Extension and Mixing) [9].

Следуя [9], пропустим известные элементы регрессионной модели (10) через блоки запаздывания $\left[H(\cdot)\right](t)=(\cdot)(t-\tau)$, где $\tau\in R_+$. Тогда для (10) имеем

$$q_{g_i}=M_{g_i}^{\mathrm{T}}\eta. \quad (11)$$

Сформулируем на основе исходной регрессионной модели (10) и отфильтрованной регрессионной модели (11) расширенную регрессионную модель

$$q_e=A_e\eta, \quad (12)$$

где

$$q_e = \begin{bmatrix} q \\ q_{g_1} \\ \vdots \\ q_{g_{n-1}} \end{bmatrix};\ A_e = \begin{bmatrix} M^{\mathrm{T}} \\ M_{g_1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ M_{g_{n-1}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix};\ \eta = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

Умножив (12) на алгебраическое дополнение A_e, получаем

$$Y = \mathrm{adj} A_e q_e = \Delta\eta,$$

откуда получаем скалярную модель вида

$$Y_i = \Delta\eta_i,$$

где $\Delta = \det\{A_e\}$ — определитель матрицы A_e.

Оценку η_i получим по формуле

$$d\hat{\eta}_i / dt = -K_i \Delta(\Delta\hat{\eta}_i - Y_i), \qquad (13)$$

где K_i — положительное число, увеличивая которое, можно ускорять сходимость неизвестных параметров к истинным значениям.

Для формирования оценок вектора $x(t)$ подставим полученные значения оцениваемых параметров $\hat{\theta}$ в уравнение

$$\hat{x}(t) = \xi(t) - \Phi(t)\hat{\theta}. \qquad (14)$$

Таким образом, представлен новый метод синтеза наблюдателя переменных состояния вида (4), (13), (14) в условиях измерений с запаздыванием и возмущений выхода, обеспечивающий асимптотическую сходимость настраиваемых оценок к истинным значениям объекта управления.

Синтез закона управления. Рассмотрим задачу синтеза закона управления с учетом наблюдателя (4), (13), (14). Для ее решения используем онлайн-процедуру решения матричного дифференциального уравнения Риккати (см., например, [5]). Рассмотрим модель (1), (2) в предположении, что вектор переменных состояния $x(t)$ оценивается с использованием полученного выше наблюдателя. Выберем закон управления в следующем виде:

$$u(t) = -B^{\mathrm{T}} P \hat{x}(t), \qquad (15)$$

где нестационарная матрица P находится из решения дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{P} + A^{\mathrm{T}} P + PA - PBB^{\mathrm{T}} P = -2\alpha P - Q, \qquad (16)$$

$\alpha > 0$ и стационарная матрица $Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$.

Покажем, что при измеримом векторе $x(t)$ и использовании закона управления вида (15) для объекта (1), (2) обеспечивается экспоненциальная сходимость вектора переменных состояния $x(t)$ к нулю. Для этого рассмотрим функцию Ляпунова вида

$$V = x^{\mathrm{T}} P x. \qquad (17)$$

Продифференцировав (1) с учетом уравнений (1), (2), (15), (16), получим

$$\dot{V} = -2\alpha x^{\mathrm{T}} P x - x^{\mathrm{T}} Q x \le -2\alpha V. \qquad (18)$$

Из неравенства (18) следует экспоненциальная сходимость вектора $x(t)$ к нулю. Однако по условиям задачи вектор $x(t)$ не измеряется, но может быть найден предложенным выше методом. Поскольку при условии незатухающего возбуждения (см., например, [10]) оценка (14) сходится экспоненциально к $x(t)$, в силу неравенства (18) следует сходимость вектора $x(t)$ к нулю.

Численный пример. Для иллюстрации работоспособности предлагаемого подхода проведем компьютерное моделирование. Пусть параметры матриц $A(t)$, $B(t)$ и $C(t)$ имеют следующий вид:

$$A(t)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ a_{21}(t) & 0\end{bmatrix};\ B(t)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix};\ C^{\mathrm{T}}(t)=\begin{bmatrix}5\\-1\end{bmatrix},$$

где $a_{21}(t)=\cos(2t)-2$.

Проведем компьютерное моделирование для единичной матрицы $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$ и $\alpha=1$. Примем $k=10$, $\tau=0{,}05$, $\xi(0)=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$, $K_i=1000$ и промоделируем наблюдатель (4), (13), (14) совместно с законом управления (15), (16).

Предположим, что возмущающее воздействие $\delta(t)=1\sin(10t+1)$ и $x(0)=[1\quad -2]^{\mathrm{T}}$. Графики переходных процессов для *а* — $\hat{\theta}_i$, *б* — $x(t)$, *в* — $\hat{x}(t)$, *г* — $\tilde{x}(t)=\hat{x}(t)-x(t)$ представлены на рис. 1 ($D=1$) и 2 ($D=0{,}5+\cos^2(t)$).

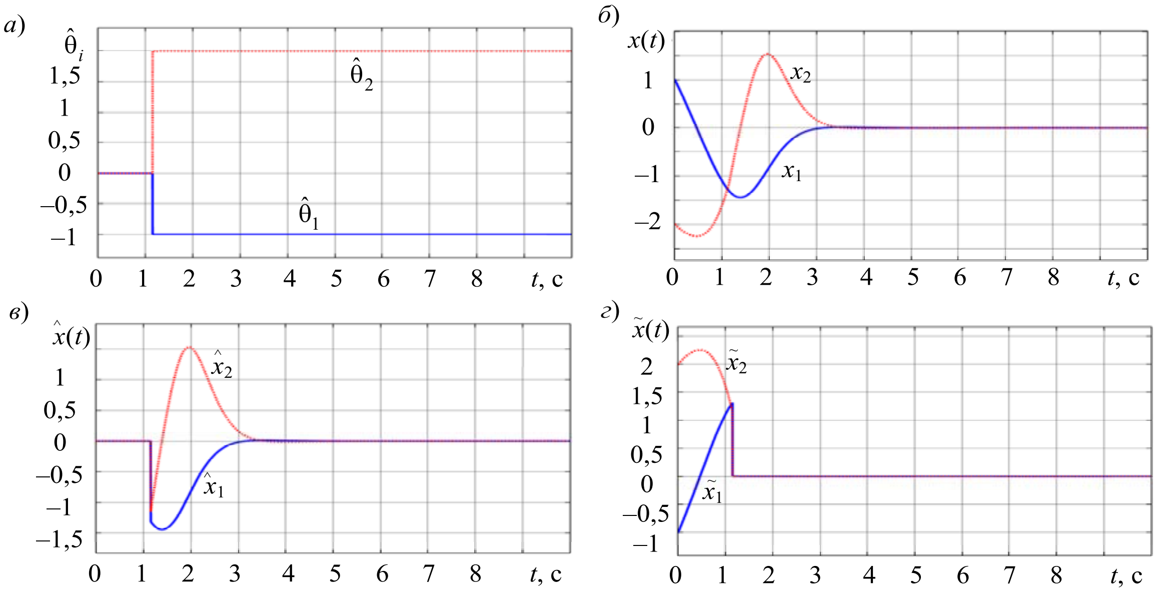

Рис. 1

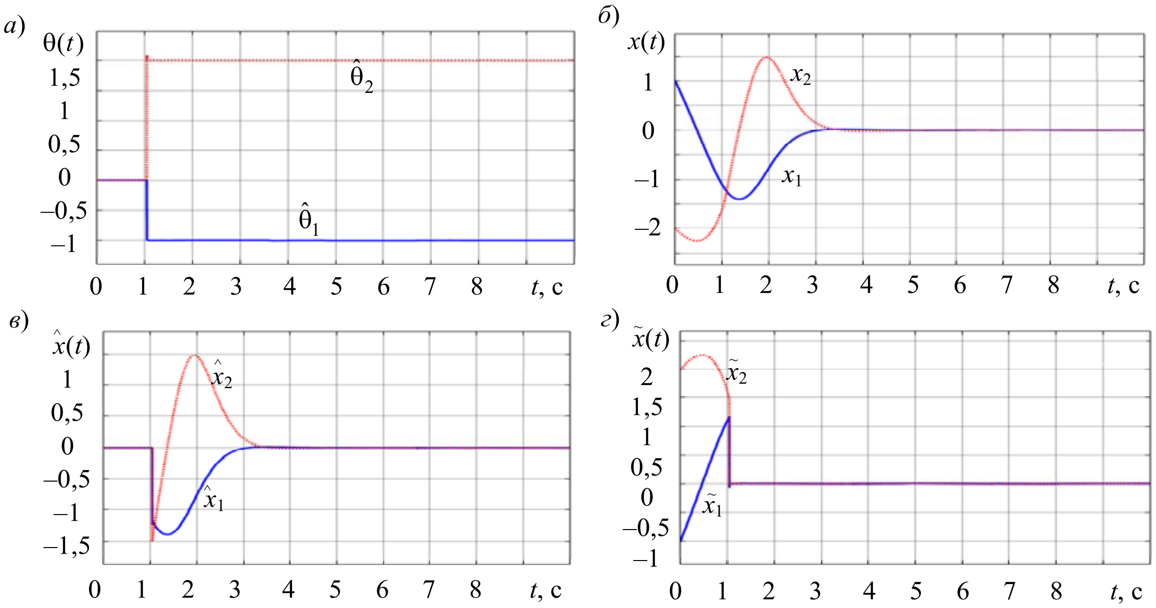

Рис. 2

Из графиков переходных процессов можно видеть, что предлагаемый подход к синтезу закона управления обеспечивает достижение целевого условия (3) и асимптотическую устойчивость положения равновесия $x = 0$.

Заключение. В работе предложен метод синтеза закона управления для стабилизации линейного нестационарного объекта вида (1), (2). Данный метод предусматривает преобразование исходного линейного нестационарного дифференциального уравнения (1) в статическую регрессионную модель (10). Точная идентификация вектора неизвестных параметров (10) обеспечивает выполнение целевого условия (3). Был синтезирован стабилизирующий закон управления по выходу для линейной нестационарной системы (1), (2), включающий в наблюдатель переменных состояния. Представленные в статье результаты компьютерного моделирования иллюстрируют работоспособность предложенного подхода, а также демонстрируют хорошее качество переходных процессов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wilson J. R.* Linear system theory. NJ, Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
2. *Furtat I. B., Fradkov A. L.* Robust Control of Multi-machine Power Systems with Compensation of Disturbances // Intern. J. of Electrical Power & Energy Systems. 2015. Vol. 73. P. 584—590.
3. *Furtat I. B.* Adaptive Predictor-free Control of a Plant with Delayed Input Signal // Automation and Remote Control. 2014. Vol. 75, N 1. P. 139—151.
4. *Furtat I. B.* Robust Synchronization of the Structural Uncertainty Nonlinear Network with Delay and Disturbances // Proc. of the IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 11th IFAC Intern. Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, ALCOSP 2013. 2013. P. 227—232.
5. *Rueda-Escobedo J., Ushirobira R., Efimov D., and Moreno J.* Gramian-based uniform convergent observer for stable LTV systems with delayed measurements // Intern. J. of Control. 2018. Vol. 93, N 2, January. DOI: 10.1080/00207179.2019.1569256.
6. *Sanz R., Garcia P., and Krstic M.* Observation and stabilization of LTV systems with time-varying measurement delay // Automatica. 2019. Vol. 103. P. 573—579.
7. *Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S.* A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems // Systems & Control Letters. 2015. Vol. 85, November. P. 84—94.
8. *Ortega R., Bobtsov A., Dochain D., Nikolaev N.* State observers for reaction systems with improved convergence rates // J. of Process Control. 2019. Vol. 83, November. P. 53—62.
9. *Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A.* Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Trans. Automat. Control. 2016. Vol. 62, N 7. P. 3546—3550.
10. *Мирошник И. В., Никифоров В. О., Фрадков А. Л.* Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. СПб: Наука, 2000.

Сведения об авторах

Куок Дат Во — аспирант; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: cuoi.di.em89@gmail.com

Алексей Алексеевич Бобцов — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; директор мегафакультета; E-mail: bobtsov@mail.ru

Николай Анатольевич Николаев — канд. техн. наук; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; доцент; E-mail: nikona@yandex.ru

Антон Александрович Пыркин — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; декан факультета; E-mail: a.pyrkin@gmail.com

Поступила в редакцию
22.12.2020 г.

Ссылка для цитирования: *Куок Дат Во, Бобцов А. А., Николаев Н. А., Пыркин А. А.* Стабилизация линейной нестационарной системы в условиях запаздывания и аддитивного синусоидального возмущения выхода // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 2. С. 97—103.

STABILIZATION OF A LINEAR NON-STATIONARY SYSTEM UNDER CONDITIONS OF DELAY AND ADDITIVE SINUSOIDAL PERTURBATION OF THE OUTPUT

Quoc Dat Vo, A. A. Bobtsov, N. A. Nikolaev, A. A. Pyrkin

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: cuoi.di.em89@gmail.com

A solution is proposed to the problem of stabilization of a linear non-stationary object controlled by the output, that is, without measuring the object state variables. The solution to this problem is complicated by the fact that the output variable contains a delay, and there is also a disturbance in the measurements in the form of a sinusoidal function of time with unknown constant parameters. Assuming that the parameters of the control object are known non-stationary functions of time, the proposed solution provides for the synthesis of an observer of state variables and is constructed using an approach involving the constant parameters identification.

Keywords: nonstationary systems, observers of state variables, identification of constant parameters, sinusoidal disturbance, delay

REFERENCES

1. Wilson J.R. *Linear system theory*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1996.
2. Furtat I.B., Fradkov A.L. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 2015, vol. 73, pp. 584–590.
3. Furtat I.B. *Automation and Remote Control*, 2014, no. 1(75), pp. 139–151.
4. Furtat I.B. *Proc. of the IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline), 11th IFAC International Workshop on Adaptation and Learning in Control and Signal Processing, ALCOSP 2013*, 2013, pp. 227–232.
5. Rueda-Escobedo J., Ushirobira R., Efimov D., and Moreno J. *Intern. J. of Control*. 2018, no. 2(93), January, DOI: 10.1080/00207179.2019.1569256.
6. Sanz R., Garcia P., and Krstic M. *Automatica*, 2019, no. 103, pp. 573–579.
7. Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S. *Systems & Control Letters*, 2015, vol. 85, November, pp. 84–94.
8. Ortega R., Bobtsov A., Dochain D., Nikolaev N. *Journal of Process Control*, 2019, vol. 83, November, pp. 53–62.
9. Aranovskiy S., Bobtsov A., Ortega R., Pyrkin A. *IEEE Trans. Automat. Control*, 2016, no. 7(62), pp. 3546–3550.
10. Miroshnik I.V., Nikiforov V.O., Fradkov A.L. *Nelineynoe i adaptivnoe upravlenie slozhnymi dinamicheskimi sistemami* (Nonlinear and Adaptive Control of Complex Dynamic Systems), St. Petersburg, 2000. (in Russ.)

Data on authors

Quoc Dat Vo	—	Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: cuoi.di.em89@gmail.com
Alexey A. Bobtsov	—	Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Director of the Megafaculty; E-mail: bobtsov@mail.ru
Nikolay A. Nikolaev	—	PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Associate Professor; E-mail: nikona@yandex.ru
Anton A. Pyrkin	—	Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; Dean of the Faculty; E-mail: a.pyrkin@gmail.com

For citation: Quoc Dat Vo, Bobtsov A. A., Nikolaev N. A., Pyrkin A. A. Stabilization of a linear non-stationary system under conditions of delay and additive sinusoidal perturbation of the output. *Journal of Instrument Engineering*. 2021. Vol. 64, N 2. P. 97—103 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-2-97-103