УДК 517.977.5
DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-11-916-924

СПОСОБ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСОБОГО ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В. П. Иванов[1], А. А. Тюгашев[2]

[1] *Санкт-Петербургский федеральный исследовательский центр Российской академии наук, 199178, Санкт-Петербург, Россия*
E-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com

[2] *Самарский государственный технический университет, 443100, Самара, Россия*

Рассматриваются вопросы синтеза оптимального терминального управления нелинейной динамической системой, когда управление не находится на границах предельно допустимого множества значений и линейно входит в математическую модель системы. В этом случае приравнивание к нулю частных производных гамильтониана по управлению приводит к требованию обнуления соответствующих множителей Лагранжа. Но тогда, с формальной стороны, любое управление удовлетворяет условию оптимума, т.е. оптимальное управление не может быть найдено традиционным способом. Возникает проблема поиска особого управления. Известен способ нахождения особого оптимального управления, однако его реализация связана с особенностями решения нелинейной краевой задачи. Поэтому предложен другой способ определения особого оптимального управления, основанный на последовательном дифференцировании условия первого порядка сингулярности. Полученный результат должен удовлетворять как необходимым, так и достаточным условиям оптимальности. Приведены иллюстрирующие примеры.

Ключевые слова: *особое оптимальное управление, терминальный функционал, нелинейная математическая модель, порядок сингулярности*

Постановка задачи. Рассмотрим математическую модель динамического объекта:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx_j}{dt} = f_j(x) + B_j(x)u_j, \quad && j = 1, \dots, m; \\ &\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), && i = m+1, \dots, n, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где t — действительная переменная, $t \in \Im(t)$; $\Im(t)$ — открытое множество вещественной оси t, $\Im(t) = (-\infty, \dots, +\infty)$; $x = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор состояния действительного n-мерного пространства; $f = (f_1, \dots, f_n)$ и $B = (B_1, \dots, B_m)$ — заданные нелинейные в общем случае вектор-функции, $B_j \neq 0, \quad j = 1, \dots, m$; $u = (u_1, \dots, u_m)$ — m-мерный вектор управления, $u \in U$; U — заданное множество допустимых управлений; $m < n$.

В рамках настоящей статьи рассматривается случай, когда каждая j-я компонента вектора управления ограничена отрезками $\left[U_{j\min}\right]$.

Задан терминальный функционал

$$J = F\left[\left\| x_i(T) - x_{zi} \right\|, \quad i = m+1, \dots, n\right], \tag{2}$$

определенный на решениях системы уравнений (1); здесь F — некоторая заданная функция; $T \in \Im(t)$; $x_z = (x_{z1}, \dots, x_{zn})$ — заданные значения вектора состояния.

В момент $t = T$ могут быть заданы дополнительные условия вида

$$h_i = h_i\left[x(T)\right], \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

которые могут быть включены в функционал (2) через дополнительные множители Лагранжа.

Так как система уравнений (1) автономная, то множество $\mathfrak{I}(t)$ допустимо сузить до отрезка $\left[t_0, T\right]$, где t_0 — начальное значение аргумента t, $t_0 \in \mathfrak{I}(t)$. Момент времени T не фиксирован.

Значения $x(t_0) = x_0$ полагаются известными.

Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом [1, 2]: среди всех допустимых на отрезке $\left[t_0, T\right]$ управлений $u \in U$, переводящих точку (t_0, x_0) в точку $(T, x(T))$, найти такие, для которых функционал (2) принимает наименьшее значение при выполнении условий (3).

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = (p_1, \ldots, p_n)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации H:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i + \sum_{j=1}^{m} p_j B_j u_j \ . \tag{4}$$

С использованием функции H в пространстве переменных $D^n(x, p)$, $x \in D^n(x, p)$, $p \in D^n(x, p)$, уравнения для x и p могут быть записаны в следующей канонической форме [1—3]:

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \\ \frac{d \rightleftarrows p}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \end{gathered} \tag{5}$$

Отметим, что функции H и p при оптимальном решении непрерывны, и к этому же приводит аналог условия Эрдмана — Вейерштрасса классического вариационного исчисления. Непрерывность сохраняется и в том случае, когда правые части уравнений (1) терпят разрыв.

Как обычно, при решении оптимизационных задач заданы условия трансверсальности [1, 2].

Для определения оптимального управления $u(t)$ во внутренних точках множества допустимых управлений (см. [1—3]) воспользуемся уравнением $\dfrac{\partial H}{\partial u_j} = 0$, что соответствует условию $p_j = 0$. Последнее соотношение говорит о том, что с формальной точки зрения форма любого управления может быть произвольной. Но из постановки задачи следует, что такое управление, названное особым, может существовать; его находят, например, сменив систему отсчета координат.

В известной книге Р. Габбасова и Ф. М. Кирилловой [3] доказывается, что вследствие линейного вхождения управления в систему уравнений (1) выражение для каждой j-й компоненты может быть найдено из системы уравнений

$$\frac{d^k}{dt^k}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right) = 0, \ \ k = 0, 1, \ldots, 2p_s \tag{6}$$

(p_s — порядок сингулярности) при выполнении следующих необходимых условий оптимальности:

$$(-1)^{p_s}\frac{\partial}{\partial u_j}\left[\frac{d^{2p_s}}{dt^{2p_s}}\left(\frac{\partial H}{\partial u_j}\right)\right]\ge 0,\quad p_s=0,1,2,\ldots,\tag{7}$$

если $\det\left\{\dfrac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j}\right\}\equiv 0,\quad i,j=1,\ldots,m$, или, что то же самое, — из системы уравнений

$$\frac{d^k p_j}{dt^k}=0,\quad k=0,1,\ldots,2p_s,\quad j=1,\ldots,m,\tag{8}$$

решая которую, находим особое оптимальное управление $u_{j\,\mathrm{spec}}$.

Несмотря на достаточно конструктивный подход, в ряде случаев выражение для особого оптимального управления целесообразно находить другим способом.

Основной результат. Отметим, что система уравнений (8) содержит, во-первых, условие существования особого управления $p_j=0$ и, во-вторых, результат его последовательного дифференцирования вплоть до заданного порядка сингулярности, т.е. последовательно реализуются условия первого, второго, третьего и т.д. порядков сингулярности.

Первоначально рассмотрим случай, когда порядок сингулярности равен единице. Тогда имеем

$$p_j=0,\quad \frac{dp_j}{dt}=0,\quad \frac{d^2 p_j}{dt^2}=0,\quad j=1,\ldots,m,\tag{9}$$

при выполнении необходимых условий оптимальности (7).

Представим уравнения сопряженных переменных (5) для $p=(p_1,\ldots,p_m)$ в следующей форме:

$$\frac{d \rightleftarrows p_\nu}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_\nu}=$$

$$=-p_\nu\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}\cdot u_\nu\right)-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne\nu}}^{m} p_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}+\frac{\partial B_j}{\partial x_\nu}\cdot u_j\right)-\sum_{i=m+1}^{n} p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu},\quad \nu=1,\ldots,m.\tag{10}$$

Преобразуем эти уравнения к виду

$$\frac{dp_\nu}{dt}+\Phi_\nu p_\nu=G_\nu,\quad \nu=1,\ldots,m,\tag{11}$$

где

$$\Phi_\nu=\left(\frac{\partial f_\nu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial B_\nu}{\partial x_\nu}\cdot u_\nu\right),\; G_\nu=-\sum_{\substack{j=1\\ j\ne\nu}}^{m} p_j\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_\nu}+\frac{\partial B_j}{\partial x_\nu}\cdot u_j\right)-\sum_{i=m+1}^{n} p_i\frac{\partial f_i}{\partial x_\nu}.$$

Проинтегрировав уравнения (11), получим [4]

$$p_\nu=\exp(-\textstyle\int\Phi_\nu dt)\left[\int G_\nu\exp(\int\Phi_\nu dt)-C_\nu\right],\quad \nu=1,\ldots,m,\tag{12}$$

где $C_\nu,\ \nu=1,\ldots,m,$ — постоянные интегрирования.

На участках особого управления $p_\nu=0$. Отметим, что знак функций $p_\nu=0$ определяется знаком функций C_ν.

Из первых двух уравнений системы (9) с учетом (12) следует, что [5]

$$G_j=0,\ j=1,\ldots,m.\tag{13}$$

Разрешим это уравнение относительно переменной x_j. Если корень существует, то

$$x_j=\eta_j\left(x_\nu,\,p_\nu;\ \nu=1,\ldots,n;\ \nu\ne j\right).\tag{14}$$

Так как соотношения (14) должны удовлетворять условиям минимизации функционала (2), то

$$\eta_j = \underset{x_j}{\operatorname{argmin}} F\left[\left\| x_i\left(x_j, T\right) - x_{zi} \right\|, \quad i = m+1, \ldots, n\right], \; j = 1, \ldots, m. \tag{15}$$

Тогда третье уравнение системы (9) после преобразований запишем как

$$\frac{dx_j}{dt} = f_j + B_j u_{j\,\text{spec}} = \frac{d\eta_j}{dt}, \tag{16}$$

откуда можно найти особое управление

$$u_{j\,\text{spec}} = \frac{1}{B_j}\left(-f_j + \frac{d\eta_j}{dt}\right) \tag{17}$$

при выполнении необходимых условий оптимальности в следующей форме:

$$B_j \left.\frac{\partial G_j}{\partial x_j}\right|_{x_j = \eta_j} \le 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{18}$$

Отметим, что корень уравнения $G_j = 0$ необязательно может быть единственным. Тогда каждый корень проверяется на выполнение необходимых (18) и достаточных (2) условий оптимальности.

Отметим некоторые особенности данного подхода:

— фактически η, а следовательно, и управление определяются на редуцированном пространстве переменных, а именно, вместо пространства переменных $x_1, \ldots, x_n$ используется пространство переменных $x_{m+1}, \ldots, x_n$, т.е. пространство определения функционала (2);

— параметры η в момент времени t в пространстве определения функционала (2) формируют особое оптимальное управление по принципу обратной связи.

В случае произвольного порядка сингулярности (см. (8)) особое оптимальное управление, вследствие (1), определяется из решения следующей системы дифференциальных уравнений:

$$p_j = 0, \quad \frac{dp_j}{dt} = 0, \quad \frac{d^2 p_j}{dt^2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^{2p_s} p_j}{dt^{2p_s}}, \quad j = 1, \ldots, m, \tag{19}$$

при выполнении необходимых условий (18). Как доказано в [3], особое управление „проявится“ в последней производной.

Выделив условие сингулярности первого порядка $G_j = 0$, или, что то же самое, $x_j = \eta_j$, а затем, продифференцировав его до появления управления в уравнениях (19), можно найти особое управление как

$$u_{j\,\text{spec}} = f\left(x, \eta_j, \frac{d\eta_j}{dt}, \ldots, \frac{d^{2p_s}\eta_j}{dt^{2p_s}}\right). \tag{20}$$

Очевидно, что если переход от условия сингулярности первого порядка $G_j = 0$ к особому управлению описывается линейной системой дифференциальных уравнений с передаточной функцией $W_{x_j}^{u_{\text{spec}}}$, то $u_{j\,\text{spec}} = W_{x_j}^{u_{\text{spec}}} \eta_j$.

Пример 1. Дана динамическая система первого порядка сингулярности [5]:

$$\frac{dx_1}{dt} = A(x);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{B}{x_1}\left(u - \cos x_2\right);$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 \sin x_2;$$

$$\frac{dx_4}{dt} = x_1 \cos x_2,$$

где t — независимая переменная (время), $x = \left(x_1, x_2, x_3, x_4\right)$ — вектор фазовых координат, $A(x)$ — заданная функция, B — константа, u — управление, $u \in \left[-U, +U\right]$; U — предельно допустимое значение управления.

Требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$J = \sqrt{\left[x_3(T) - x_{z\,3}\right]^2 + \left[x_4(T) - x_{z\,4}\right]^2}\ ,$$

где $x_{z\,3}, x_{z\,4}$ — заданные значения координат.

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = \left(p_1, p_2, p_3, p_4\right)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации

$$H = p_1 A + p_2 \frac{B}{x_1}\left(u - \cos x_2\right) + p_3 x_1 \sin x_2 + p_4 x_1 \cos x_2 .$$

Запишем дифференциальные уравнения для сопряженных переменных:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\,p_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} + p_2 \frac{B}{x_1^2}\left(u - \cos x_2\right) - p_3 \sin x_2 - p_4 \cos x_2;$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\,p_1 \frac{\partial \rightleftarrows A}{\partial \rightleftarrows x_1} - p_2 \frac{B}{x_1} \sin x_2 - p_3 x_1 \cos x_2 + p_4 x_1 \sin x_2;$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0,$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0.$$

Уравнения трансверсальности при $t = T$ примут следующий вид:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 0;$$

$$p_3 = \frac{\partial J}{\partial x_3} = \frac{x_3(T) - x_{z\,3}}{\sqrt{\left[x_3(T) - x_{z\,3}\right]^2 + \left[x_4(T) - x_{z\,4}\right]^2}},$$

$$p_4 = \frac{\partial J}{\partial x_4} = \frac{x_4 \rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows\rightleftarrows (T) - x_{z\,4}}{\sqrt{\left[x_3(T) - x_{z\,3}\right]^2 + \left[x_4(T) - x_{z\,4}\right]^2}}.$$

Из второго и третьего уравнений для сопряженных переменных следует, что

$$p_3 = \text{const};\ p_4 = \text{const}.$$

Введем параметр η, такой, что $\operatorname{tg}\eta = p_3 / p_4$.

Для порядка сингулярности, равного единице, оптимальное управление определяется из решения следующей системы уравнений:

$$p_2 = 0,\quad \frac{dp_2}{dt} = 0,\quad \frac{d^2 p_2}{dt^2} = 0\,.$$

Перепишем ее с учетом полученных результатов:

$$p_2 = 0,\quad x_1 \sin(x_2 - \eta) = 0,\quad \frac{d}{dt}\left[x_1 \sin(x_2 - \eta)\right] = 0\,.$$

Отсюда из второго уравнения следует, что $x_2 = \eta$, а из третьего, что $\frac{dx_2}{dt} = \frac{d\eta}{dt}$. Тогда выражение для определения особого оптимального управления примет вид

$$u_{\text{spec}} = \cos\eta + \frac{x_1}{B}\frac{d\eta}{dt}\,.$$

Значение $x_2 = \eta$ должно удовлетворять минимизации заданного функционала, т.е. быть равным $\text{tg}\eta = \dfrac{x_{z\,3} - x_3(t)}{x_{z\,4} - x_4(t)}$.

Расчеты показали идентичность результатов, полученных по основной и предлагаемой методикам.

Пример 2. Дополним динамическую систему первого порядка сингулярности уравнением $\frac{dx_5}{dt} = u$, где x_5 — новая переменная при том же функционале. Получим следующую систему уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = A(x);$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{B}{x_1}\left(x_5 - \cos x_2\right);$$
$$\frac{dx_3}{dt} = x_1 \sin x_2;$$
$$\frac{dx_4}{dt} = x_1 \cos x_2,$$
$$\frac{dx_5}{dt} = u\,.$$

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $p = \left(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\right)$ и составим гамильтониан задачи оптимизации

$$H = p_1 A + p_2 \frac{B}{x_1}\left(x_5 - \cos x_2\right) + p_3 x_1 \sin x_2 + p_4 x_1 \cos x_2 + p_5 u.$$

Запишем дифференциальные уравнения для сопряженных переменных:

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -p_1 \frac{\partial A}{\partial x_1} + p_2 \frac{\partial B}{\partial x_1^2}(x_5 - \cos x_2) - p_3 \sin x_2 - p_4 \cos x_2;$$
$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_2 \frac{B}{x_1} \sin x_2 - p_3 x_1 \cos x_2 + p_4 x_1 \sin x_2;$$
$$\frac{dp_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = 0;$$
$$\frac{dp_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = 0,$$
$$\frac{dp_5}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_5} = -p_2 \frac{B}{x_1}.$$

Уравнения трансверсальности при $t = T$ примут следующий вид:

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 0; \quad p_5 = 0;$$

$$p_3 = \frac{\partial J}{\partial x_3} = \frac{x_3(T) - x_{z\,3}}{\sqrt{\left[x_3(T) - x_{z\,3}\right]^2 + \left[x_4(T) - x_{z\,4}\right]^2}},$$

$$p_4 = \frac{\partial J}{\partial x_4} = \frac{x_4(T) - x_{z\,4}}{\sqrt{\left[x_3(T) - x_{z\,3}\right]^2 + \left[x_4(T) - x_{z\,4}\right]^2}}.$$

Из второго и третьего уравнений для сопряженных переменных следует, что

$$p_3 = \mathrm{const}; \quad p_4 = \mathrm{const}.$$

Введем параметр η, такой что $\mathrm{tg}\eta = p_3/p_4$.

Система уравнений (16) первого порядка сингулярности примет вид

$$p_5 = 0, \quad \frac{d p_5}{dt} = p_2 \frac{B}{x_1} = 0, \quad \frac{d^2 p_5}{dt^2} = \frac{d p_2}{d t} = x_1 \sin(x_2 - \eta) = 0,$$

откуда получим условие первого порядка сингулярности: $\sin(x_2 - \eta) = 0$.

Параметр η, как и в предыдущем примере, удовлетворяет условию минимизации функционала. Продолжим дифференцировать последнее соотношение, пока в новом выражении не появится управление. Имеем:

$$\frac{d^3 p_5}{d t^3} = \frac{d}{dt}\left[x_2 - \eta\right] = \frac{B}{x_1}(x_5 - \cos\eta) - \frac{d\eta}{dt} = 0;$$

$$\frac{d^4 p_5}{dt^4} = \frac{d}{dt}\left[\frac{B}{x_1}(x_5 - \cos\eta) - \frac{d\eta}{dt}\right] =$$

$$= -\frac{BA}{x_1^2}(x_5 - \cos\eta) + \frac{B}{x_1}\left(u + \sin\eta \frac{d\eta}{d t}\right) - \frac{d^2 \eta}{d t^2} = 0,$$

откуда получим

$$u_{\mathrm{spec}} = \left(\frac{A}{B} - \sin\eta\right)\frac{d\eta}{d t} + \frac{x_1}{B}\frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

Используя все полученные соотношения, последнее выражение можно представить и в другой форме:

$$u_{\mathrm{spec}} = \frac{A}{x_1}(x_5 - \cos\eta) - \sin\eta \frac{d\eta}{d t} + \frac{x_1}{B}\frac{d^2\eta}{dt^2}.$$

В какой форме использовать выражения для особого управления, решает исследователь.

Заключение. Рассмотрены вопросы синтеза особого оптимального управления нелинейной динамической системой, когда управление линейно входит в систему дифференциальных уравнений.

С использованием известного подхода к определению особого оптимального управления показано, что в нем последовательно реализуются условия для различных порядков сингулярности, начиная с первого. Поэтому если выразить условие первого порядка сингулярности в виде алгебраического соотношения, то условия последующих порядков сингулярности можно получить, дифференцируя соотношение первого порядка определенное число раз.

На этом основан предлагаемый способ определения особого оптимального управления. Полученный результат должен удовлетворять как необходимым, так и достаточным условиям оптимальности.

Исследования, выполненные по данной тематике, проводились в рамках бюджетной темы № 0073-2019-0003.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
2. *Сейдж Э. П., Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 389 с.
3. *Габбасов Р., Кириллова Ф. М.* Особое оптимальное управление. М.: Наука, 1973. 253 с.
4. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971. 576 с.
5. *Иванов В. П.* Оптимизация вырожденного управления динамическими системами методом огибающих // Тр. СПИИРАН. 2006. Т. 2, вып. 3. С. 358—365.

Сведения об авторах

Владимир Петрович Иванов — д-р техн. наук, ст. научный сотрудник; СПбФИЦ РАН, СПИИРАН, лаборатория прикладной информатики и проблем информатизации общества; E-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com

Андрей Александрович Тюгашев — д-р техн. наук, профессор; Самарский государственный технический университет, кафедра вычислительной техники; E-mail: tau797@mail.ru

Поступила в редакцию
25.08.2021 г.

Ссылка для цитирования: *Иванов В. П., Тюгашев А. А.* Способ определения особого оптимального управления // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 11. С. 916—924.

METHOD FOR DETERMINING A SPECIAL OPTIMAL CONTROL

V. P. Ivanov [1], A.A. Tyugashev[2]

[1] *St. Petersburg Federal Research Center of the RAS, 199178, St. Petersburg, Russia*
E-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com

[2] *Samara State Technical University, 443100, Samara, Russia*

The issues of synthesis of optimal terminal control of a nonlinear dynamic system are considered when the control is not on the boundaries of the maximum allowable set of values and linearly enters the mathematical model of the system. In this case, equating to zero the partial derivatives of the Hamiltonian with respect to the control leads to the requirement of zeroing the corresponding Lagrange multipliers. But then, on the formal side, any control satisfies the optimum condition, that is, the optimal control cannot be found in the traditional way. The problem of finding a special control arises. A method for finding a special optimal control is known, but its implementation is associated with the features of solving a nonlinear boundary value problem. Therefore, another method of determining a special optimal control is proposed, based on the sequential differentiation of the condition of the first row of the singularity. The result obtained must satisfy both necessary and sufficient optimality conditions. Illustrative examples are presented.

Keywords: optimal special control, terminal functional, nonlinear mathematical model, order of singularity

REFERENCES

1. Boltyanskiy V.G. *Matematicheskiye metody optimal'nogo upravleniya* (Mathematical Methods of Optimal Control), Moscow, 1969. (in Russ.)
2. Sage A.P., White Ch.C. *Optimum systems control*, Englewood Cliffs, NJ, 1977.
3. Gabbasov R., Kirillova F.M. *Osoboye optimal'noye upravleniye* (Special Optimal Control), Moscow, 1973, 253 p. (in Russ.)

4. Kamke E. *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, *Band 1: Gewöhnliche Differentialgleichungen,* Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1930.
5. Ivanov V.P. *Trudy SPIIRAN* (SPIIRAS Proceedings), 2006, no. 3(2), pp. 358–365. (in Russ.)

Data on authors

Vladimir P. Ivanov — Dr. Sci, Senior Researcher; St. Petersburg Federal Research Center of the RAS, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the RAS, Laboratory of Applied Informatics and Problems of Society Informatization; E-mail: vpivanov.spb.su@gmail.com

Andrey A. Tyugashev — Dr. Sci, Professor; Samara State Technical University, Department of Computing Technique; E-mail: tau797@mail.ru

For citation: Ivanov V. P., Tyugashev A. A. Method for determining a special optimal control. *Journal of Instrument Engineering*. 2021. Vol. 64, N 11. P. 916—924 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-11-916-924