УДК 62-507.15
DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-7-478-491

СЛОЖНОСТЬ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ МАЛОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

О. Н. Музыченко

Научно-производственная фирма „Меридиан“, Санкт-Петербург, Россия
syntez2@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен способ оценивания сложности произвольных функций алгебры логики, основанный на их представлении композицией монотонных функций. Получены точные верхние оценки сложности монотонных и произвольных функций, зависящих от малого числа переменных.

Ключевые слова: *монотонные и произвольные функции алгебры логики, сложность*

Ссылка для цитирования: *Музыченко О. Н.* Сложность произвольных функций алгебры логики малого числа переменных // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 7. С. 478—491. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-7-478-491.

COMPLEXITY OF ARBITRARY FUNCTIONS OF THE LOGIC ALGEBRA OF A SMALL NUMBER OF VARIABLES

O. N. Muzychenko

Research and Production Firm Meridian, St. Petersburg, Russia
syntez2@yandex.ru

Abstract. A method for evaluating the complexity of arbitrary function of Boolean algebra is examined, based on presenting such a function as a composition of monotone functions. Accurate upper estimates have been received for the complexity of monotone and arbitrary functions depending on a small number of variables.

Keywords: monotone and arbitrary logic functions, complexity

For citation: Muzychenko O. N. Complexity of arbitrary functions of the logic algebra of a small number of variables. *Journal of Instrument Engineering.* 2022. Vol. 65, N 7. P. 478—491 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-7-478-491.

Введение. Вопрос оценивания сложности функций алгебры логики является одним из важнейших в теории цифровых автоматов. Данной проблеме посвящено большое число работ, в которых в основном рассматривался вопрос получения асимптотических оценок сложности функций. Приведем основные результаты этих исследований.

Под сложностью $L(S)$ схемы S понимают число входящих в нее элементов выбранного базиса. Минимальную из сложностей схем, реализующих функцию $f(X)$, называют сложностью функции $f(X)$ и обозначают $L(f)$. Для оценки сложности функций в зависимости от числа переменных n используют числовую функцию $L(n)$, равную максимальной сложности полностью определенных функций $f(X)$, зависящих от n переменных $x_1, x_2,\ldots, x_n$. Она была введена К. Шенноном [1, с. 59—67] и получила название **функции Шеннона**. Величина $L(n)$ позволяет оценивать, сколь сложными могут быть простейшие схемы для функций n переменных.

Впервые проблема асимптотически оптимальных методов синтеза была исследована К. Шенноном [1, с. 68—83], доказавшим на основе мощностного подхода асимптотическую оценку сложности вида

$$(n) > (1-\varepsilon)2^n/n. \qquad (1)$$

Асимптотически точное значение функции $L(n)$ доказано О. Б. Лупановым [2] и определяется следующей теоремой.

Теорема Лупанова. Имеет место асимптотическое равенство

$$L(n) \sim 2^n / n, \tag{2}$$

причем доля функций $f(X)=f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$, для которых $L(f)\le 2^n/n$, стремится к нулю с ростом n.

Оценка (2) получена для базиса И, ИЛИ, НЕ.

Наиболее полный обзор исследований сложности монотонных функций приведен в [3]. А. Б. Угольниковым в [4] доказана асимптотическая оценка сложности для класса монотонных функций вида

$$L_m(n) \sim \rho\sqrt{2/\pi}\cdot 2^n \big/ n^{3/2}, \tag{3}$$

где ρ — коэффициент, зависящий от используемого базиса.

Позже данная оценка была несколько уточнена Н. Пиппинджером [5].

Все указанные оценки являются асимптотическими, т.е. справедливы при $n\to\infty$. Вместе с тем для практических целей значительный интерес представляет получение неасимптотических оценок сложности функций, в том числе зависящих от сравнительно небольшого числа переменных. Однако данной проблеме посвящено крайне незначительное число работ.

Для синтеза схем симметричных функций f_S О. Б. Лупановым в работе [6] предложен метод промежуточного преобразования и доказано, что в классе схем из функциональных элементов они реализуются с линейной относительно числа переменных сложностью

$$L(f_S) \le C_o n \ (C_o = \text{const}). \tag{4}$$

К классу симметричных функций относятся все пороговые равновесные функции (ПРФ), являющиеся также монотонными.

В [7, с. 88—97; 8, с. 489—503] показано, что сложность симметричных функций в базисе И, ИЛИ, НЕ при синтезе методом промежуточного преобразования составляет:

— для пороговых равновесных функций $F_n^a(X)$

$$L\left(F_n^a(X)\right) = l_s \sum_{i=0}^{\left[\log_2 n\right]} \left[n/2^{i+1}\right] - \left(l_s - l_p\right) \sum_{i=0}^{\left[\log_2 n\right]} \left]\left(\left[n/2^i\right]+1\right)/2 - \right]\left[n/2^i\right]/2\left[\right[+ \\ + \left]\log_2(n+1)\right[- N(a); \tag{5}$$

— для элементарных симметричных функций $S_n^a(X)$

$$L\left(S_n^a(X)\right) = l_s \sum_{i=0}^{\left[\log_2 n\right]} \left[n/2^{i+1}\right] - \left(l_s - l_p\right) \sum_{i=0}^{\left[\log_2 n\right]} \left]\left(\left[n/2^i\right]+1\right)/2 - \right]\left[n/2^i\right]/2\left[\right[+ \\ + \left]\log_2(n+1)\right[, \tag{6}$$

где a — порог пороговой равновесной функции (индекс элементарной симметричной функции), l_p — сложность полусумматора, l_s — сложность полного сумматора, составляющая для случая его абсолютно-минимальной реализации 9 операторов И, ИЛИ, НЕ [9, с. 141].

В [10] доказана верхняя оценка сложности произвольных пороговых функций $P_n^a(X)$ в базисе И, ИЛИ, НЕ вида

$$L\left(P_n^a(X)\right) < l_s\left(n^2 - 2n - 1\right) + 2n + \left]\log_2 n\right[- 3. \tag{7}$$

Данная оценка справедлива при любом n.

В [11] исследована сложность релейной реализации монотонных функций пяти переменных. Полученные представления монотонных функций показывают, что наибольшую сложность в базисе И, ИЛИ, равную 12, имеет пороговая равновесная функция $F_5^3(X)$.

Основной проблемой получения неасимптотических оценок сложности произвольных функций алгебры логики является необходимость полного перебора функций и вариантов их реализации. Очевидно, что при n>4 такой подход практически нереализуем.

Способ оценивания сложности произвольных функций. В [8, с. 170—184; 12] предложен декомпозиционный метод синтеза схем произвольных функций алгебры логики, основанный на их представлении композицией приближающих монотонных функций (ПМФ).

Предложено искать представление функции F в виде

$$F = K_1\left(f_{11}\bar{f}_{21} \vee K_2\left(f_{12}\bar{f}_{22} \vee K_3\left(\ldots K_{\alpha_{\max}}\left(f_{1\alpha\max}\,\bar{f}_{2\alpha\max} \vee D_{\alpha\max}\right)\ldots \vee D_3\right) \vee D_2\right) \vee D_1\right), \quad (8)$$

где $f_{1\alpha}, f_{2\alpha}$ — приближающие монотонные функции, K_α — элементарная конъюнкция или константа 1, D_α — элементарная дизъюнкция или 0.

Суммарное число ПМФ в представлении (8) не превышает n.

Представление (8) сводит задачу оценки сложности произвольной функции к задаче оценки сложности системы монотонных функций.

При использовании метода приближающих монотонных функций сложность произвольной функции составляет

$$L(F) = L\left(\left\{f_{1\alpha} f_{2\alpha}\right\}\right) + L_p, \quad (9)$$

где $L(\{f_{1\alpha}f_{2\alpha}\})$ — сложность совместной реализации системы ПМФ, L_p — сложность реализации композиции (8) при сформированных ПМФ.

Для получения оценки сложности произвольной функции F необходимо найти оценку сложности совместной реализации системы не более чем n монотонных функций. Однако данная проблема в настоящее время не получила решения. Поэтому сложность произвольной функции может быть оценена лишь для случая раздельной реализации приближающих монотонных функций и только по верхней оценке их сложности. В этом случае

$$L(F) < nL(f_m) + L_p, \quad (10)$$

где f_m — приближающая монотонная функция.

С учетом оценки (7) для функции F, допускающей декомпозицию в систему приближающих монотонных функций, являющихся пороговыми, из (10) получаем

$$L(F) \sim Cn^3 \ \ (C=\text{const}). \quad (11)$$

Приведенный подход к получению оценок сложности произвольной функции позволяет свести задачу к оценке сложности монотонных функций. Однако и в этом случае задача оказывается чрезвычайно трудоемкой, поскольку число $N(n)$ монотонных функций n переменных весьма велико. В табл. 1 приведены оценки числа монотонных функций, зависящих от малого числа переменных [3].

Таблица 1

n	$N(n)$
2	6
3	20
4	168
5	7 581
6	7 828 354
7	2 414 682 040 998
8	56 130 437 228 687 557 907 788

Асимптотические оценки числа $N(n)$ монотонных функций n переменных приведены в [3]. Наилучшие из них получены в [13, 14].

Для сокращения множества монотонных функций, подлежащих рассмотрению, модифицируем метод приближающих монотонных функций. Будем искать представление произвольной функции F вида

$$F = \bigvee_{\alpha=1}^{]n/2[} f_{1\alpha}\overline{f}_{2\alpha}, \tag{12}$$

где характеристические подмножества приближающих монотонных функций удовлетворяют условиям

$$M_0(f_{1\alpha}) = M_n^0(X) \cup \ldots \cup M_n^{2\alpha-2}(X) \cup M_0^{2\alpha-1}(F); \tag{13}$$

$$M_1(f_{1\alpha}) = M_1^{2\alpha-1}(F) \cup M_n^{2\alpha}(X) \cup \ldots \cup M_n^{n}(X); \tag{14}$$

$$M_0(f_{2\alpha}) = M_n^1(X) \cup \ldots \cup M_n^{2\alpha-1}(X) \cup M_1^{2\alpha}(F); \tag{15}$$

$$M_1(f_{2\alpha}) = \left\{M_1^{2\alpha}(f_{1\alpha}) \cap M_0(F)\right\} \cup M_n^{2\alpha+1}(X) \cup \ldots \cup M_n^{n}(X), \tag{16}$$

а $M_1(f)$, $M_0(f)$ — единичное и нулевое характеристические подмножества функции f;

$$M_1^j(f) = M_1(f) \cap \mathrm{M}_n^j(X);$$

$$M_0^j(f) = M_0(f) \cap \mathrm{M}_n^j(X);$$

$\mathrm{M}_n^j(X)$ — подмножество двоичных наборов $X = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \ldots x_n^{\gamma_n}$, имеющих j неинверсных переменных.

Таким образом, в соответствии с представлением (12) исходная функция F реализуется по частям, причем каждая пара приближающих монотонных функций $f_{1\alpha}\overline{f}_{2\alpha}$ реализует наборы $X_i \in M_1^{2\alpha-1}(F) \cup M_1^{2\alpha}(F)$. Следовательно, в соответствии с (14) и (16) в представлении (12) все приближающие монотонные функции имеют в минимальных дизъюнктивных нормальных формах (МДНФ) импликанты не более чем двух соседних рангов r=2α–1 и r=2α у функции $f_{1\alpha}$ и r=2α и r=2α+1 у функции $f_{2\alpha}$. В результате задача получения оценки сложности произвольной функции сведена к задаче оценки сложности монотонных функций одного подкласса, отличающихся тем, что их МДНФ имеют импликанты I одного или двух соседних рангов $r_{\min}=j$ и $r_{\max}=j+1$, причем в МДНФ входят все элементарные конъюнкции ранга $r_{\max}=j+1$, не покрываемые импликантами ранга $r_{\min}=j$. Очевидно, что количество импликант I_r ранга r в МДНФ приближающей монотонной функции удовлетворяет условию

$$\sigma\{I_r\} \in \{0, 1, \ldots, C_n^r\}. \tag{17}$$

Оценим количество монотонных функций $f_m(j)$ рассматриваемого подкласса. Очевидно, что количество Q монотонных функций, удовлетворяющих условиям (13)—(16), определяется количеством возможных комбинаций элементарных конъюнкций неинверсных переменных ранга $r_{\min}=j$ и составляет

$$Q(f_m(j)) = 2^{C_n^j} - 1. \tag{18}$$

Для сокращения количества анализируемых функций целесообразно выделить группы функций одного типа, получаемых путем перенумерации переменных, и определить число типов функций Q_t. Соответствующая классификация была проведена путем анализа (перебора на ПЭВМ) монотонных функций рассматриваемого подкласса для 4, 5, 6 и 7 переменных. Для сокращения перебора использовался упорядоченный вектор $W=\{w_1,\ldots,w_n\}$, где $w_i \geq w_{i+1}$, а w_i — число переменных x_i в импликантах ранга $r_{\min}$ минимальной дизъюнктивной нормальной формы монотонной функции. Результаты классификации приведены в табл. 2. Очевидно, что количество типов приближающих монотонных функций для n, равного 4, 5, 6, сравнительно невелико и позволяет провести исследование сложности всех типов функций путем их полного перебора.

В [10] для классификации типов монотонных функций предложено использовать вектор $\Lambda(f_m)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, где λ_i — число импликант ранга i в минимальной дизъюнктивной нормальной форме монотонной функции f_m, т.е. $\lambda_r=\sigma\{I_r\}$. Используем данный вектор для классификации приближающих монотонных функций. Очевидно, что для рассматриваемого подкласса монотонных функций ненулевое значение имеют один элемент $\lambda_i>0$ вектора $\Lambda(f_m)=\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, где $\lambda_j=0$ ($j\neq i$), или два соседних элемента $\lambda_i>0$, $\lambda_{i+1}>0$, где $\lambda_j=0$ ($j\neq i$, $j\neq i+1$).

Таблица 2

n	$r_{\min}$	$\sigma(I_r)$	Q_r/Q
4	1	4	1/1
4	1	1, 3	1/4
		2	1/6
		Σ	**3/14**
4	1(2)	0(6)	1/1
4	2	1, 5	1/6
		2, 4	2/15
		3	3/20
		Σ	**9/62**
4	2(3)	0(4)	1/1
4	3	1, 3	1/4
		2	1/6
		Σ	**3/14**
4	3(4)	0(1)	1/1
		Всего	**19/94**

n	$r_{\min}$	$\sigma(I_r)$	Q_r/Q
5	1	5	1/1
5	1	1, 4	1/5
		2, 3	1/10
		Σ	**4/30**
5	1(2)	0(10)	1/1
5	2	1, 9	1/10
		2, 8	2/45
		3, 7	4/120
		4, 6	6/ 210
		5	6/252
		Σ	**32/1022**
5	2(3)	0(10)	1/1
5	3	1, 9	1/10
		2, 8	2/45
		3, 7	4/120
		4, 6	6/210
		5	6/252
		Σ	**32/1022**
5	3(4)	0(5)	1/1
5	4	1,4	1/5
		2, 3	1/10
		Σ	**4/30**
5	4(5)	0(1)	1/1
		Всего	**77/2109**

n	$r_{\min}$	$\sigma(I_r)$	Q_r/Q
6	1	6	1/1
6	1	1, 5	1/6
		2, 4	1/15
		3	1/20
		Σ	**5/62**
6	1(2)	0(15)	1/1
6	2	1, 14	1/15
		2, 13	2/105
		3, 12	5/455
		4, 11	9/1365
		5, 10	15/3003
		6, 9	21/5005
		7, 8	24/6435
		Σ	**154/32766**
6	2(3)	0(20)	1/1
6	3	1, 19	1/20
		2, 18	3/190
		3, 17	7/1140
		4, 16	21/4845
		5, 15	43/15504
		6, 14	94/38760
		7, 13	161/77520
		8, 12	249/125970
		9, 11	312/167960
		10	352/184756
		Σ	**2134/1048574**
6	3(4)	0(15)	1/1
6	4	1, 14	1/15
		2, 13	2/105
		3, 12	5/455
		4, 11	9/1365
		5, 10	15/3003
		6, 9	21/5005
		7, 8	24/6435
		Σ	**154/32766**
6	4(5)	0(6)	1/1
		1, 5	1/6
		2, 4	1/15
		3	1/20
		Σ	**5/62**
6	5(6)	0(1)	1/1
		Всего	**2458/1114236**

Оценка сложности приближающих монотонных функций. Поскольку приближающие функции являются монотонными, то их минимальные дизъюнктивные нормальные формы не содержат инверсий переменных [7, с. 118—121]. Следовательно, и получаемые на их основе в результате факторизации скобочные представления инверсий переменных также не содержат. Если в полученном в результате факторизации скобочном представлении монотонной функции, характеризующейся вектором $\Lambda(f_m)=\{\lambda_1,\ldots,\lambda_n\}$, где $\lambda_i\geq0$, $\lambda_{i+1}\geq0$, $\lambda_i+\lambda_{i+1}>0$, а $\lambda_j=0$ ($j\neq i$, $j\neq i+1$), проинвертировать переменные и само скобочное представление функции, а затем произвести его преобразование в соответствии с законами де Моргана, то получим скобочное представление функции в базисе И, ИЛИ, не содержащее инверсий. Очевидно, что оно является представлением монотонной функции f_m^*, которая двойственна исходной f_m, причем полученная функция f_m^* также относится к рассматриваемому подклассу монотонных функций, удовлетворяющих условиям (14)—(17), сложность ее представления такая же, как и у исходной функции f_m, а вектор $\Lambda(f_m^*)=\{\lambda_1^*,\ldots,\lambda_n^*\}$, где $\lambda_{n-i}^*=C_n^i-\lambda_i$, $\lambda_{n-i+1}^*\geq0$, а $\lambda_j^*=0$ при $j\neq n-i$, $n-i+1$. При этом двойственная функция имеет вектор $W^*=\left\{w_1^*,\ldots,w_n^*\right\}$, где $w_{n-i+1}^*=C_{n-1}^r-\lambda_r+w_i$, а $r=r_{\min}$. Данное обстоятельство позволяет ограничиться рассмотрением лишь половины монотонных функций рассматриваемого подкласса, имеющих $\lambda_i>0$ при $i=1,\ldots,]n/2[$ либо при $i=[n/2],\ldots,n$.

Приближающая монотонная функция является ПРФ, когда $\sigma(I_r)=C_n^r$. ПРФ являются симметричными и, следовательно, в базисе И, ИЛИ, НЕ имеют линейную относительно числа переменных сложность [5], определяемую оценкой (4). Однако использованный для их реализации метод промежуточного преобразования не применим для большинства монотонных функций рассматриваемого подкласса, не являющихся пороговыми.

В [6, с. 6—23; 7, с. 412—424; 15] рассмотрен декомпозиционный метод синтеза схем ПРФ, основанный на их представлении композицией ПРФ разложения, зависящих от меньшего числа переменных вида

$$F_n^a(X)=\bigvee_{\{A_\rho\}}F_{m_1}^{a_1}(X_1)F_{m_2}^{a_2}(X_2)\ldots F_{m_\rho}^{a_\rho}(X_\rho), \tag{19}$$

где $F_{m_i}^{a_i}(X_i)$ — функции разложения, являющиеся ПРФ; ρ — параметр разложения; $A_\rho=\left\{a_1,\ldots,a_\rho\right\}$ — ρ-мерный вектор; a_i — элемент ρ-мерного вектора A_ρ, являющийся порогом функции $F_{m_i}^{a_i}(X_i)$; $\left\{A_\rho\right\}$ — множество всех ρ-мерных векторов, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{\rho}a_i=a \quad (a_i\geq0);$$

X_i — множества переменных функций разложения $F_{m_i}^{a_i}(X_i)$, удовлетворяющие условиям

$$X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_\rho=X,$$

$$X_i\cap X_j=\varnothing \text{ при } i\neq j.$$

Доказано [15], что при синтезе методом декомпозиции с параметром разложения $\rho=2$ сложность в базисе И, ИЛИ системы ПРФ $F_n^{\{a\}}(X)$, включающей ($\beta-\alpha+1$) функций, зависящих от n переменных, с порогами от $a_{\min}=\alpha$ до $a_{\max}=\beta$ составляет

$$L\left(F_n^{\{a\}}\right)=n^2-n-(\alpha-1)^2-(n-\beta)^2, \tag{20}$$

причем оценка (20) инвариантна относительно порядка декомпозиции (мощности подмножеств X_1 и X_2 на каждом шаге декомпозиции).

Из (20) следует, что сложность в базисе И, ИЛИ системы $F(n)$ всех n ПРФ $F_n^a(X)$ с порогами от $a_{\min}=1$ до $a_{\max}=n$ составляет

$$L(F(n))=n^2-n, \tag{21}$$

а сложность отдельной ПРФ

$$L\left(F_n^a\right)=\left(a-1\right)+\left(2a-1\right)\left(n-a\right). \quad (22)$$

В табл. 3 приведены оценки числа импликант $\sigma_{\max}(I_r)$ и сложности L ПРФ F_n^a для n, равного 4, 5, 6, при синтезе методом декомпозиции с параметром ρ=2.

Таблица 3

n	$L/\sigma_{\max}(I_r)$					
	a=1	a=2	a=3	a=4	a=5	a=6
4	3/4	7/6	7/4	3/1	—	—
5	4/5	10/10	12/10	10/5	4/1	—
6	5/6	13/15	17/20	17/15	13/6	5/1

Приведенные результаты позволяют получить на основе разложения (19) и оценок сложности ПРФ (22) и их систем (21) точные оценки сложности для ряда типов монотонных функций рассматриваемого подкласса.

1) ПМФ с параметрами $\lambda_1=k$, $k<n$, $X_1=\{x_1,\ldots,x_k\}$, $X_2=\{x_{k+1},\ldots,x_n\}$ может быть представлена в виде

$$f = x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee F_{n-k}^2\left(X_2\right), \quad (23)$$

при этом сложность данного представления функции составляет

$$L(f) = k + L(F_{n-k}^2) = k+\left(2-1\right)+\left(2\cdot 2-1\right)\left(n-k-2\right)=3n-2k-5. \quad (24)$$

Покажем, что во всех случаях рассмотренная реализация ПМФ имеет сложность, не превышающую сложности ПРФ с порогом a=2:

$$\begin{aligned}\Delta = L\left(F_n^2\right)-L(f) = {}&\left\{\left(2-1\right)+\left(2\cdot 2-1\right)\left(n-2\right)\right\}-\{3n-2k-5\} = \\ &= 3n-5-3n+2k+5=2k>0.\end{aligned} \quad (25)$$

Следовательно, сложность приближающей монотонной функции рассмотренного типа во всех случаях меньше сложности пороговой равновесной функции с порогом a=2.

2) ПМФ с параметрами $\lambda_a=1$, $a>1$, $I_1= x_1\ldots x_a$, $X_1=\{x_1,\ldots,x_a\}$, $X_2=\{x_{a+1},\ldots,x_n\}$ может быть представлена в виде

$$f=\begin{cases} x_1\ldots x_a \bigvee\limits_{i=1}^{a-1} F_a^i\left(x_1,\ldots,x_a\right)F_{n-a}^{a+1-i}\left(x_{a+1},\ldots,x_n\right)\vee F_{n-a}^{a+1}\left(x_{a+1},\ldots,x_n\right) \text{ при } n-a\ge a+1,\\ x_1\ldots x_a \bigvee\limits_{i=2a-n+1}^{a-1} F_a^i\left(x_1,\ldots,x_a\right)F_{n-a}^{a+1-i}\left(x_{a+1},\ldots,x_n\right) \text{ при } n-a<a+1.\end{cases}$$

В соответствии с данным представлением получаем следующие оценки сложности функции:

— при n–$a \ge a$+1, a>1

$$L(f)=L\left(F_a^{\{1,\ldots,a\}}\right)+L\left(F_{n-a}^{\{2,\ldots,a+1\}}\right)+2a-1=$$

$$=\left(a^2-a\right)+\left\{\left(n-a\right)^2-\left(n-a\right)\ -\left(2-1\right)^2-\left(n-2a-1\right)^2\right\}+2a-1=$$

$$=2na-2a^2-2a+n-3;$$

— при 1<n–a < a+1, a>1

$$L(f)=L\left(F_a^{\{2a-n+1,\ldots,a\}}\right)+L\left(F_{n-a}^{\{2\ldots,n-a\}}\right)+2(n-a-1)=\left\{a^2-a+\left(2a-n\right)^2-\left(a-a\right)^2\right\}+$$

$$+\left\{\left(n-a\right)^2-\left(n-a\right)-\left(2-1\right)^2\right\}+2\left(n-a-1\right)=2na-2a^2-2a+n-3;$$

— при n–a =1, a>1

$$L(f) = L\left(F_a^a\right) = a-1.$$

Таким образом,

$$L(f) = \begin{cases} 2na-2a^2-2a+n-3 & \text{при } a>1, \\ a-1 \text{ при } & n=a+1. \end{cases}$$

Покажем, что во всех случаях рассмотренная реализация ПМФ имеет сложность, не превышающую сложности ПРФ с порогом a при $a \geq n/2$ и порогом $a+1$ при $a<n/2$.

Случай $n=a+1$ очевиден;

— при $a \geq n/2$

$$\Delta = L\left(F_n^a\right) - L(f) = \{(a-1)+(2a-1)(n-a)\} - \{2na-2a^2-2a+n-3\} =$$

$$=4a-2n+2 \geq 2,$$

— при $a<n/2$

$$\Delta = L\left(F_n^{a+1}\right) - L(f) =$$

$$=\Big\{(a+1-1)+\big(2(a+1)-1\big)\big(n-(a+1)\big)\Big\} - \{2na-2a^2-2a+n-3\} = 2>0.$$

Следовательно, сложность приближающей монотонной функции рассмотренного типа во всех случаях меньше сложности соответствующей пороговой равновесной функции.

3) ПМФ с параметрами $\lambda_a=2$, $\lambda_{a+1}>0$, $\lambda_j=0$ ($j \neq a$, $j \neq a+1$), $a \geq 2$, $X_1=\{x_1,\ldots,x_a\}$, $X_2=\{x_{a+1},\ldots,x_{2a}\}$, $X_3=\{x_{2a+1},\ldots,x_n\}$ в зависимости от соотношения мощности подмножеств переменных имеет следующие скобочные представления.

При $n-2a \geq a+1$, $a=2$

$$f = F_2^2(X_1) \vee F_2^2(X_2) \vee F_{n-4}^3(X_3) \vee F_{n-4}^2(X_3)\Big[F_2^1(X_1) \vee F_2^1(X_2)\Big] \vee$$

$$\vee F_{n-4}^1(X_3) F_2^1(X_1) F_2^1(X_2),$$

а ее сложность составляет

$$L(f) = 2L(F(2)) + L\left(F_{n-2a}^{\{1,\ldots,a+1\}}\right) + 2+2+4 =$$

$$= 2\cdot 2 + \Big\{(n-2\cdot 2)^2 - (n-2\cdot 2) - (n-7)^2\Big\} + 8 = 5n-17.$$

При $n-2a=a$, $a=2$

$$f = F_2^2(X_1) \vee F_2^2(X_2) \vee F_2^2(X_3)\Big[F_2^1(X_1) \vee F_2^1(X_2)\Big] \vee F_2^1(X_3) F_2^1(X_1) F_2^1(X_2),$$

а ее сложность составляет

$$L(f) = 3L(F(2)) + 7 = 3\left(a^2-a\right) + 7 = 13\,.$$

При $n-2a=1$, $a=2$

$$f = F_2^2(X_1) \vee F_2^2(X_2) \vee F_1^1(X_3) F_2^1(X_1) F_2^1(X_2),$$

а ее сложность составляет

$$L(f) = 2L(F(2)) + 1 + 4 = 2\left(a^2-a\right) + 1 + 4 = 9\,.$$

При $n-2a \geq a+1$, $a>2$

$$f=F_a^a\left(X_1\right)\vee F_a^a\left(X_2\right)\vee F_{n-2a}^{a+1}\left(X_3\right)\vee\left\{\bigvee_{i=2}^{a}F_{n-2a}^{i}\left(X_3\right)\left[F_a^{a-i+1}\left(X_1\right)\vee F_a^{a-i+1}\left(X_2\right)\right]\right\}\vee$$

$$\vee\left\{\bigvee_{i=1}^{a-1}F_{n-2a}^{i}\left(X_3\right)\left[\bigvee_{j=1}^{a-i}F_a^{j}\left(X_1\right)F_a^{a-i-j+1}\left(X_2\right)\right]\right\}\vee\left\{\bigvee_{i=2}^{a-1}F_a^{i}\left(X_1\right)F_a^{a-i+1}\left(X_2\right)\right\},$$

а ее сложность составляет

$$L\left(f\right)=2L\left(F(a)\right)+L\left(F_{n-2a}^{\{1,\ldots,a+1\}}\right)+\left\{3a-4\right\}+$$

$$+\left\{\left(a-1\right)+\sum_{i=1}^{a-1}\left(a-i\right)+\sum_{i=1}^{a-1}\left(a-i-1\right)+\left(a-2\right)\right\}+\left\{2a-5\right\}+5=2na-2a^2+n-2a-4.$$

При $1<n–2a<a+1$, $a>2$

$$f=F_a^a\left(X_1\right)\vee F_a^a\left(X_2\right)\vee\left\{\bigvee_{i=2}^{n-2a}F_{n-2a}^{i}\left(X_3\right)\left[F_a^{a-i+1}\left(X_1\right)\vee F_a^{a-i+1}\left(X_2\right)\right]\right\}\vee$$

$$\vee\left\{\bigvee_{i=1}^{n-2a-1}F_{n-2a}^{i}\left(X_3\right)\left[\bigvee_{j=1}^{a-i}F_a^{j}\left(X_1\right)F_a^{a-i-j+1}\left(X_2\right)\right]\right\}\vee\left\{\bigvee_{i=2}^{a-1}F_a^{i}\left(X_1\right)F_a^{a-i+1}\left(X_2\right)\right\},$$

а ее сложность составляет

$$L\left(f\right)=2L\left(F(a)\right)+L\left(F\left(n-2a\right)\right)+\left\{3\left(n-2a-1\right)-1\right\}+$$

$$+\left\{2\left(n-2a-1\right)-1+\sum_{i=1}^{n-2a-1}(a-i)+\sum_{i=1}^{n-2a-1}(a-i-1)\right\}+\left\{2a-5\right\}+4=$$

$$=2na-2a^2+4n-10a-7.$$

При $n–2a=1$, $a>2$

$$f=F_a^a\left(X_1\right)\vee F_a^a\left(X_2\right)\vee\left\{F_1^1\left(X_3\right)\left[\bigvee_{j=1}^{a-1}F_a^{j}\left(X_1\right)F_a^{a-j}\left(X_2\right)\right]\right\}\vee\left\{\bigvee_{i=2}^{a-1}F_a^{i}\left(X_1\right)F_a^{a-i+1}\left(X_2\right)\right\},$$

а ее сложность составляет

$$L\left(f\right)=2L\left(F(a)\right)+2\left(a-1\right)+\left\{2\left(a-2\right)-1\right\}+3=2a^2+2a-4.$$

Покажем, что во всех случаях рассмотренная реализация ПМФ имеет сложность, не превышающую сложности ПРФ с порогом a при $a\geq n/2$ и порогом $a+1$ при $a<n/2$.

При $n–2a\geq a+1$, $a=2$

$$\Delta=L\left(F_n^3\right)-L(f)=\left\{\left(3-1\right)+\left(2\cdot 3-1\right)\left(n-3\right)\right\}-\{5n-17\}=4>0;$$

— при $n–2a=a$, $a=2$

$$\Delta=L\left(F_6^3\right)-L(f)=\left\{\left(3-1\right)+\left(2\cdot 3-1\right)\left(6-3\right)\right\}-13=4>0;$$

— при $n–2a=1$, $a=2$

$$\Delta=L\left(F_5^3\right)-L(f)=\left\{\left(3-1\right)+\left(2\cdot 3-1\right)\left(5-3\right)\right\}-9=3>0.$$

При $a\geq n/2$, $1<n–2a<a+1$, $a>2$

$$\Delta=L\left(F_n^a\right)-L(f)=\left\{\left(a-1\right)+\left(2a-1\right)\left(n-a\right)\right\}-\left\{2na-2a^2+4n-10a-7\right\}=$$

$$=12a-5n+6\geq n+6>0.$$

При $a<n/2$:

1) $n–2a\geq a+1$, $a>2$

$$\Delta = L\left(F_n^{a+1}\right) - L(f) = \left\{\left(a+1-1\right)+\left(2\left(a+1\right)-1\right)\left(n-a-1\right)\right\} - \left\{2na-2a^2+n-2a-4\right\} =$$

$$= a + \left(2a+1\right)\left(n-a-1\right) - \left(2na-2a^2+n-2a-4\right) = 3 > 0;$$

2) $1 < n-2a < a+1$, $a>2$ $n<3a+1$

$$\Delta = L\left(F_n^{a+1}\right) - L(f) = \left\{\left(a+1-1\right)+\left(2a+2-1\right)\left(n-a-1\right)\right\} -$$

$$-\left\{2na-2a^2+4n-10a-7\right\} = n+6 > 0;$$

3) $a=2<n/2$

$$\Delta = L\left(F_n^{3}\right) - L(f) = \left\{\left(3-1\right)+\left(2\cdot 3-1\right)\left(n-3\right)\right\} - \{5n-17\} =$$

$$= \left\{2+5\left(n-3\right)\right\} - 5n+17 = 2+5n-15-5n+17 = 4 > 0.$$

При $n-2a=1$, $a>2$

$$\Delta = L\left(F_n^{a+1}\right) - L(f) = \left\{\left(a+1-1\right)+\left(2a+2-1\right)\left(n-a-1\right)\right\} - \left\{2a^2+2a-4\right\} =$$

$$= a+2an-2a^2-2a+n-a-1-2a^2-2a+4 = 2an-4a^2-4a+n+3 = 4 > 0.$$

Таким образом, сложность всех рассмотренных типов монотонных функций с векторами $\Lambda(f_m)=\{0,\ldots, \lambda_i, \lambda_{i+1}, 0,\ldots, 0\}$, где $\lambda_i>0$, $\lambda_{i+1}\geq 0$, а также двойственных им функций меньше сложности пороговых равновесных функций с порогами $a=i+1$ при $i\leq n/2$ и $a=i$ при $i>n/2$. Однако дальнейший анализ сложности приближающих монотонных функций в общем виде оказывается нецелесообразен с учетом количества типов функций, в том числе таких, экономичные представления которых не могут быть получены рассмотренным способом.

По указанным причинам для всех монотонных функций четырех и пяти переменных рассматриваемого подкласса были синтезированы скобочные представления и получены оценки их сложности. Синтез осуществлялся путем факторизации минимальных дизъюнктивных нормальных форм функций. Для формирования скобочных представлений использовались формализованные методы факторизации [7, с. 209—239], а в случае получения неудовлетворительных по сложности представлений проводилась факторизация вручную неформализованными методами.

Кроме того, для функций f_m, у которых получаемое в результате факторизации скобочное представление оказывалось сложным, получение их представления формировалось на основе скобочного представления двойственной функции f_m^*, которое в большинстве случаев оказывалось более экономичным.

Еще один способ получения экономичных скобочных представлений монотонных функций рассматриваемого подкласса — введение избыточных импликант ранга $r_{\max}$, не меняющих самой функции, но улучшающих ее факторизуемость за счет искусственного формирования новых факторов.

Анализ полученных оценок показал, что сложность всех монотонных функций рассматриваемого подкласса, зависящих от четырех и пяти переменных, удовлетворяет следующему условию:

$$L\left(f_{\Lambda}\right) \leq \max\left\{L\left(F_n^{i}\right), L\left(F_n^{i+1}\right)\right\}, \tag{26}$$

где $\lambda_i\geq 0$, $\lambda_{i+1}\geq 0$, $\lambda_i+\lambda_{i+1}>0$, а $\lambda_j=0$ $(j\neq i, j\neq i+1)$.

Иными словами, их сложность не превышает сложности соответствующих пороговых равновесных функций.

Для функций шести переменных полученные скобочные представления почти всех монотонных функций рассматриваемого подкласса также имеют сложность, удовлетворяющую оценке (26). Исключение составили функции всего пяти типов, приведенные в табл. 4, сложность которых оказалась на единицу больше определяемой оценкой (26) .

Таблица 4

№	f_m	L	
f_1	{1+[2+3(456)][3+456][4+5]}{2+[3+456][4+5]}{6+[4+13][5+23]}	18	$f_1=f_2^*$
f_2	1[2(3+{4+5+6})+{3(4+5+6)+45}]+2[3(4+5+6)+45]+ +6[4(1+3)+5(2+3)]	18	$f_2=f_1^*$
f_3	1[5(2+4)+34]+2{3(4+5)}+6{(1+5)[3(2+4)+24]+1[3(4+5)]}	18	$f_3=f_4^*$
f_4	1[2(3+4+5+6)+3(4+5+6)+4(5+6)]+2[3(4+5+6)+5(4+6)]+36(4+5)	18	$f_4=f_3^*$
f_5	1[(2+5)(3+4)+2(56)]+3[(4+6)(1+2)+4(56)]+24(5+6)	18	$f_5=f_5^*$
П р и м е ч а н и е . В таблице переменные представлены их номерами.			

Характеристики данных типов функций приведены в табл. 5*.

Таблица 5

f_m	Λ	L	W	R
f_1	0,0,4,6,0,0	18	3 3 3 1 1 1	120
f_2	0,0,16,0,0,0	18	9 9 9 7 7 7	120
f_3	0,0,5,5,0,0	18	3 3 3 3 3 0	72
f_4	0,0,15,0,0,0	18	8 8 8 8 8 5	72
f_5	0,0,10,2,0,0	18	6 6 6 6 3 3	180
			Всего	564

Очевидно, что доля приближающих монотонных функций шести переменных, не удовлетворяющих условию (26), составляет всего 0,0005 от общего числа функций рассматриваемого подкласса, т. е. крайне незначительна. Также не следует исключать возможность того, что и для данных функций существуют скобочные представления, удовлетворяющие условию (26), которые не удалось найти автору. Необходимо также отметить, что все приближающие монотонные функции в табл. 5 имеют векторы Λ, у которых $\lambda_3>0$, $\lambda_4\geq 0$, а $\lambda_j=0$ при $j\neq 3,4$. Следовательно, в представлении (12) только одна ПМФ f_{12} может иметь сложность на единицу больше определяемой оценкой (26).

Оценка сложности произвольных функций. Оценка (26) сложности рассматриваемого подкласса монотонных функций позволяет на основе представления (12) получить оценку сложности произвольных функций.

Из разложения (12) следует, что

$$L(F)\leq\begin{cases}\sum\limits_{j=2}^{n/2}L\left(F_n^j\right)+\sum\limits_{j=n/2}^{n}L\left(F_n^j\right)+n/2+n-1 \text{ при } n \text{ четном},\\ \sum\limits_{j=2}^{]n/2[}L\left(F_n^j\right)+\sum\limits_{j=]n/2[}^{n}L\left(F_n^j\right)+[n/2]+n-1 \text{ при } n \text{ нечетном}.\end{cases} \quad (27)$$

С учетом (22) получаем:

— при n четном

$$\sum_{a=2}^{n/2}L\left(F_n^a\right)+\sum_{a=n/2}^{n}L\left(F_n^a\right)=\sum_{a=1}^{n}L\left(F_n^a\right)-L\left(F_n^1\right)+L\left(F_n^{n/2}\right)=$$

$$=\sum_{a=1}^{n}\left(2a+2an-2a^2-n-1\right)-(n-1)+(n/2-1)+(n-1)n/2=\left(n^3-4n\right)/3+n^2/2;$$

— при n нечетном

* Каталог скобочных представлений монотонных функций рассматриваемого подкласса 4, 5 и 6 переменных высылается при обращении на адрес электронной почты автора.

$$\sum_{a=2}^{]n/2[} L\left(F_n^a\right)+\sum_{a=]n/2[}^{n} L\left(F_n^a\right)=\sum_{a=1}^{n} L\left(F_n^a\right)-L\left(F_n^1\right)+L\left(F_n^{(n+1)/2}\right)=$$

$$=\sum_{a=1}^{n}\left(2a+2an-2a^2-n-1\right)-\left(n-1\right)+\left(n-1\right)/2+\left(n-1\right)n/2=\left(n^3-4n\right)/3+\left(n^2+1\right)/2,$$

откуда

$$L\left(n\right)\le n^3/3+n^2/2+n/6-1. \qquad (28)$$

Данная оценка справедлива для всех функций, зависящих от 4, 5 и 6 переменных, поскольку для n, равного 4, 5, сложность всех приближающих монотонных функций удовлетворяет (26).

Для n=6 одна из приближающих монотонных функций может иметь сложность, превышающую на единицу оценку (26). Однако, как следует из (25), ПМФ f_{11} имеет сложность на $\Delta=2k$ операторов меньше определяемой оценкой (22), следовательно, $\Delta_{\min}=2$. Исключением является случай, когда $f_{11}=F_6^2\left(x_1,\ldots,x_6\right)$. Однако в этом случае

$$M_1\left(F\right)\cap \mathrm{M}_6^1\left(X\right)=\varnothing$$

и функция F может быть представлена в виде

$$F\left(X\right)=f_{11}\left(X\right)\overline{f}_{21}\left(X\right)\vee f_{12}\left(X\right)\overline{f}_{22}\left(X\right)\vee f_{13}\left(X\right).$$

Очевидно, что сложность данного представления меньше определяемого оценкой (28), поскольку в нем отсутствует приближающая монотонная функция, имеющая вектор $\Lambda(f)=\{\lambda_1, \lambda_2, 0, 0, 0, 0\}$ и реализующая наборы единичного характеристического подмножества функции F с одной и двумя неинверсными переменными. Следовательно,

$$L\left(n\right)\le n^3/3+n^2/2-n/6-2. \qquad (29)$$

Данная оценка справедлива для всех функций, зависящих от переменных n, равного 4, 5 и 6. В табл. 6 приведены количественные оценки сложности произвольных функций алгебры логики в соответствии с оценкой (29).

Таблица 6

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$L(n)$	28	53	89	138	202	283	383	503	648	817	1013	1238
$\sum_{a=1}^{n} L\left(F_n^a\right)$	20	40	70	112	168	240	330	440	572	728	910	1120
$L(F(n))$	12	20	30	42	56	72	90	110	132	156	182	210
R	1,67	2	2,34	2,67	3	3,34	3,67	4	4,33	4,67	5	5,33
$L(n)/R$	17	27	39	52	68	85	105	126	150	176	203	233

Очевидно, что полученная оценка является существенно завышенной. Это обусловлено допущениями, принятыми при ее получении. Во-первых, сложность всех приближающих монотонных функций принималась максимальной. Во-вторых, рассматривалась раздельная реализация всех приближающих монотонных функций. В третьих, не учитывалась возможность уменьшения сложности приближающих монотонных функций $f_{1\alpha}$ и $f_{2\alpha}$ за счет их оптимизации [7, с. 171—180; 11] путем включения в единичное характеристическое подмножество наборов, принадлежащих подмножествам $M_n^j\left(X\right)$ при j=1,…,2(α–1).

Для оценки потенциальных возможностей уменьшения сложности произвольных функций за счет их совместной реализации сравним сложность раздельной и совместной реализации системы всех пороговых равновесных функций n переменных при синтезе методом декомпозиции на основе представления (20) при ρ=2. Сложность совместной реализации определяется оценкой (21). Сложность раздельной реализации системы пороговых равновесных функций с учетом (26) составляет

$$\sum_{a=1}^{n} L\left(F_n^a\right) = \sum_{a=1}^{n}\left(2a + 2an - 2a^2 - n - 1\right) = \left(n^3 - n\right)/3 .$$

Уменьшение сложности системы пороговых равновесных функций при их совместной реализации определяется как

$$R = L\left(F\left(n\right)\right) \Big/ \sum_{a=1}^{n} L\left(F_n^a\right) = \left(n^3 - n\right)/3\left(n^2 - n\right) \approx n/3 ,$$

т.е. использование совместной реализации системы приближающих монотонных функций позволяет уменьшать сложность получаемого представления произвольной функции до R=n/3 раз.

Для сравнения в табл. 5 приведены оценки суммарной сложности n ПРФ, сложности фундаментального многопорогового элемента $F(n)$, синтезированного методом декомпозиции, а также значения параметров R и $L(n)/R$. Сравнение приведенных данных дает оценку потенциального уменьшения сложности произвольной функции при использовании совместной реализации приближающих монотонных функций.

Заключение. Полученные результаты позволяют полагать, что оценка (28) справедлива для большинства функций и при n>6, поскольку доля монотонных функций рассматриваемого подкласса, имеющих сложность больше определяемой оценкой (26), крайне незначительна, а различие в сложности минимально. Однако диапазон числа переменных, в котором оценка (28) справедлива для большинства функций, определить на основе рассмотренного подхода к оценке их сложности не представляется возможным, учитывая требуемый объем перебора и анализа функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике. М.: Изд-во иностр. лит., 1963. 829 с.

2. *Лупанов О. Б.* О синтезе некоторых классов управляющих систем // Проблемы кибернетики. 1963. Вып. 10. С. 88—96.

3. *Коршунов А. Д.* Монотонные булевы функции // Успехи мат. наук. 2003. № 5. С. 89—162.

4. *Угольников А. Б.* О реализации монотонных функций схемами из функциональных элементов // Проблемы кибернетики. 1976. Вып. 31. С. 167—185.

5. *Pippenger N.* The complexity of monotone Boolean functions // Math. Systems Theory. 1978. Vol. 11. P. 289—316.

6. *Лупанов О. Б.* Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования // Проблемы кибернетики. 1965. Вып. 14. С. 31—110.

7. *Музыченко О. Н.* Специализированные методы синтеза логических схем. Ч. 1. Методы синтеза логических схем симметричных и пороговых функций. СПб: Балт. гос. техн. ун-т, 2004. 161 с.

8. *Музыченко О. Н.* Методы синтеза логических схем. СПб: Изд-во „Печатный цех“, 2018. 860 с.

9. *Поспелов Д. А.* Логические методы анализа и синтеза схем. М.: Энергия, 1974. 368 с.

10. *Музыченко О. Н.* О сложности реализации пороговых функций // Изв. вузов. Математика. 2017. № 7. С. 41—49.

11. *Карпова Н. А.* Минимальные схемы из замыкающих контактов для монотонных функций пяти переменных // Проблемы кибернетики. 1973. Вып. 26. С. 53—94.

12. *Музыченко О. Н.* Синтез логических схем методом приближающих монотонных функций // Автоматика и телемеханика. 1994. № 12. С. 117—128.

13. *Коршунов А. Д.* Решение проблемы Дедекинда о числе монотонных булевых функций // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233, № 4. С. 543—546.

14. *Коршунов А. Д.* О числе монотонных булевых функций // Проблемы кибернетики. 1981. Вып. 38. С. 5—108.

15. *Музыченко О. Н.*, *Лукоянов В. П.* Быстродействующий алгоритм синтеза схем симметричных функций алгебры логики для систем автоматизированного проектирования // Вопр. радиоэлектроники. Сер. Общие вопросы радиоэлектроники. 1984. Вып. 12. С. 120—128.

Сведения об авторе

Олег Николаевич Музыченко — д-р техн. наук, профессор; Научно-производственная фирма „Меридиан“; главный конструктор информационно-управляющих систем; E-mail: syntez2@yandex.ru

Поступила в редакцию 31.03.22; одобрена после рецензирования 12.04.22; принята к публикации 31.05.22.

REFERENCES

1. Shannon C.E. *Bell System Technical Journal*, 1948, no. 3(July).
2. Lupanov O.B. *Problemy kibernetiki*, 1963, no. 10, pp. 88–96. (in Russ.)
3. Korshunov A.D. *Russian Mathematical Surveys*, 2003, no. 5, pp. 929–1001.
4. Ugol'nikov A.B. *Problemy kibernetiki*, 1976, no. 31, pp. 167–185. (in Russ.)
5. Pippenger N. *Math. Systems Theory*, 1977/78, vol. 11, pp. 289–316.
6. Lupanov O.B. *Problemy kibernetiki*, 1965, no. 14, pp. 31–110. (in Russ.)
7. Muzychenko O.N. *Spetsializirovannyye metody sinteza logicheskikh skhem. Chast' 1. Metody sinteza logicheskikh skhem simmetrichnykh i porogovykh funktsiy* (Specialized Methods for Synthesizing Logic Circuits. Part 1. Methods for Synthesizing Logic Circuits of Symmetric and Threshold Functions), St. Petersburg, 2004, 161 p. (in Russ.)
8. Muzychenko O.N. *Metody sinteza logicheskikh skhem* (Methods for Synthesizing Logic Circuits), St. Petersburg, 2018, 860 p. (in Russ.)
9. Pospelov D.A. *Logicheskiye metody analiza i sinteza skhem* (Logical Methods of Analysis and Synthesis of Circuits), Moscow, 1974, 368 p. (in Russ.)
10. Muzychenko O.N. *Russian Mathematics*, 2017, no. 7, pp. 35–42.
11. Karpova N.A. *Problemy kibernetiki*, 1973, no. 26, pp. 53–94. (in Russ.)
12. Muzychenko O.N. *Automation and Remote Control*, 1994, no. 12, pp. 117–128. (in Russ.)
13. Korshunov A.D. *Soviet Mathematics. Doklady,* 1977, no. 4(233), pp. 543–546. (in Russ.)
14. Korshunov A.D. Problemy kibernetiki, 1981, no. 38, pp. 5–108. (in Russ.)
15. Muzychenko O.N., Lukoyanov V.P. *Questions of radio electronics. General questions of radio electronics*, 1984, no. 12, pp. 120–128. (in Russ.)

Data on author

Oleg N. Muzychenko — Dr. Sci., Professor; Research and Production Firm Meridian JSC; Chief Designer of Information Control Systems; E-mail: syntez2@yandex.ru

Received 31.03.22; approved after reviewing 12.04.22; accepted for publication 31.05.22.