

Ю. А. НИКИТИН

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДОВ ПАССИВНОГО ЦИФРОВОГО СИНТЕЗА

Рассмотрена математическая модель, предназначенная для анализа и расчета спектров двух- и многоуровневых колебаний с равномерной и неравномерной дискретизацией по фазе, а также многоуровневых колебаний, характеризующихся конечной точностью выбора узлов аппроксимации. Получены аналитические выражения для спектров колебаний с различными огибающими.

Ключевые слова: пассивный цифровой синтез, накапливающий сумматор, счетчик импульсов, делитель с дробно-переменным коэффициентом деления.

Методы двух- и многоуровневого пассивного цифрового синтеза (ПЦС) частот обеспечивают выполнение целого ряда жестких и взаимно противоречивых требований, предъявляемых к современной аппаратуре синтеза частот и обработки сигналов. К таким требованиям относят высокую долговременную стабильность фазы выходного колебания и ее преемственность при смене частот, малое время переключения с частоты на частоту, низкий относительный уровень дискретных побочных спектральных составляющих, малый уровень фазовых шумов.

Однако на спектр формируемого колебания существенным образом влияет алгоритм работы системы ПЦС как (цифрового) конечного автомата (КА). Наилучший спектр обеспечивается посредством методов оптимального синтеза, использование которых в случае двухуровневого ПЦС [1] позволяет аппаратно реализовать конечный автомат в виде накапливающего сумматора (НС) и/или делителя с дробно-переменным коэффициентом деления (ДДПКД), а в случае многоуровневого ПЦС — только НС, дополненный цифроаналоговым преобразователем или управляемым устройством задержки [2].

Целью настоящей статьи является описание работы конечного автомата применительно к теории синтеза частот и рассмотрение математической модели формирования периодического колебания с огибающей произвольной формы.

Рассмотрим структурные схемы некоторых простейших КА, применяемых в технике синтеза частот, и описывающие их работу алгоритмы [1—5].

Наиболее широко в системах активного и пассивного цифрового синтеза частот используются счетчики импульсов (СИ) (могут содержать поглотители импульсов) и накапливающие сумматоры (рис. 1, а, б соответственно).

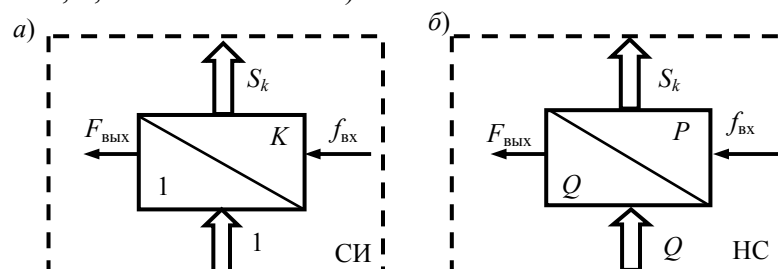


Рис. 1

Функция выхода (сигнал переполнения) ρ_k СИ определяется как

$$\rho_k = \lfloor k/P \rfloor - \lfloor (k-1)/P \rfloor; \quad \rho_k \in (0, 1), \quad (1)$$

где $\lfloor * \rfloor$ — оператор выделения целой части числа, меньшей или равной ему; при этом длительность такта на входе КА равна T_0 .

Функция переходов (текущая сумма) S_k для СИ определяется следующим образом:

$$S_k = P \{ k/P \}, \tag{2}$$

где $\{*\}$ — оператор выделения дробной части числа, $0 \leq \{ k/P \} < 1$ [5].

Изменение коэффициента пересчета СИ с дробно-переменным коэффициентом деления (N) осуществляется с помощью поглотителя импульсов и накапливающего сумматора (рис. 2). Такое решение КА широко применяют в системах активного цифрового синтеза частот на основе колец импульсно-фазовой автоподстройки частоты. В последние годы в зарубежной литературе накапливающие сумматоры также называют аккумуляторами фазы и $\Delta\Sigma$ -модуляторами: первое название пришло из теории и техники пассивного (прямого) цифрового синтеза (Direct Digital Synthesis — DDS), а второе — из теории и техники аналого-цифрового преобразования.

Из двух последовательно включенных НС первого порядка (рис. 3) состоит накапливающий сумматор второго порядка — НС₂ (и т.д.) (рис. 4).

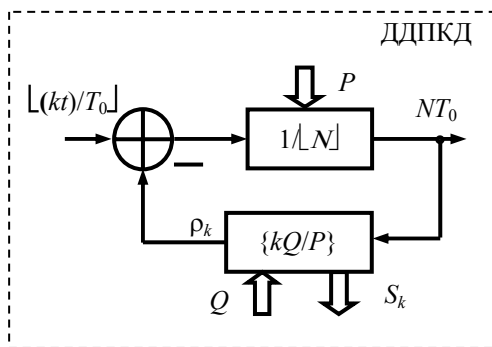


Рис. 2

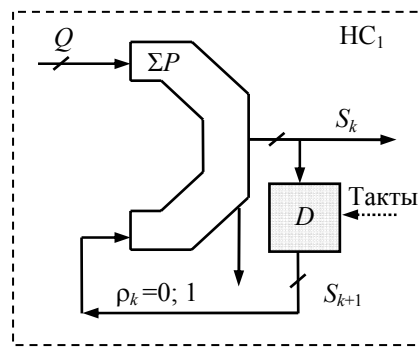


Рис. 3

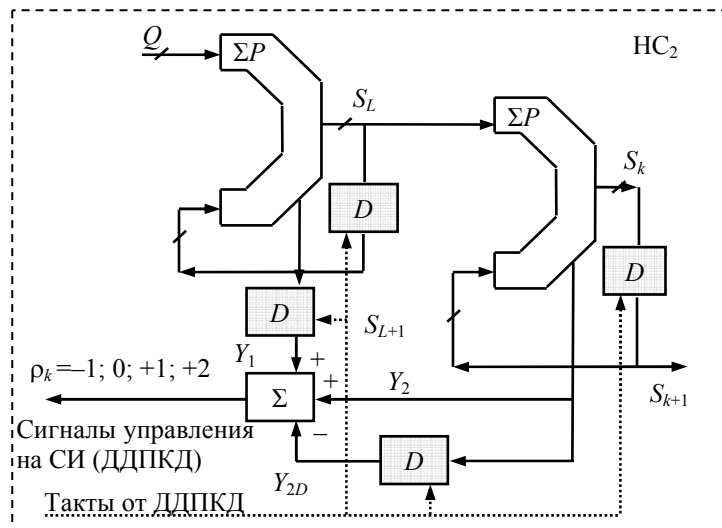


Рис. 4

Если принять емкость НС первого порядка ($n=1$) равной P единиц (см. рис. 3), то на его входе можно записать число $Q \in (0, 1, 2, \dots, P-1)$.

Функцию ρ_k для НС₁ можно представить как

$$\rho_k = \lfloor kQ/P \rfloor - \lfloor (k-1)Q/P \rfloor; \quad \rho_k \in (0, 1), \tag{3}$$

а функцию S_k — как

$$S_k = P \{ kQ/P \}. \tag{4}$$

Сравнивая выражения (1) и (3), можно сделать вывод, что СИ является частным случаем НС₁ при $Q = 1$.

В табл.1 приведены примеры записи функций переходов (текущей суммы S_k) и функции выхода (сигнала переполнения ρ_k) для вариантов НС₁ различной емкости P .

Таблица 1

Функция	Номер такта									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$P = 7; Q = 2$										
S_k	0	2	4	6	1	3	5	0	2	
ρ_k	1	0	0	0	1	0	0	1	0	
$P=7; Q=3$										
S_k	0	3	6	2	5	1	4	0	3	
ρ_k	1	0	0	1	0	1	0	1	0	
$P=8; Q=3$										
S_k	0	3	6	1	4	7	2	5	0	
ρ_k	1	0	0	1	0	0	1	0	1	

В табл. 2—5 приведены примеры записи функций переходов и выходов для вариантов НС₂ различной емкости P ; в таблицах приняты следующие обозначения:

S_L — текущая сумма 1;

S_{L+1} — текущая сумма 1 при задержке (D) на один такт;

S_k — текущая сумма 2;

S_{k+1} — текущая сумма 2 при задержке на один такт;

Y_1, Y_2 — сигналы управления;

Y_{2D} — сигнал управления Y_2 при задержке на один такт;

ρ_k — сигнал управления СИ.

Таблица 2

$P = 5; Q = 2$

Функция	Номер такта												
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S_L	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4	1
S_{L+1}	0	2	4	1	3	0	2	4	1	3	0	2	4
S_k	2	1	2	0	0	2	1	2	0	0	2	1	2
S_{k+1}	0	2	1	2	0	0	2	1	2	0	0	2	1
Y_1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0
Y_2	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
Y_{2D}	0	0	-1	0	-1	0	0	-1	0	-1	0	0	-1
ρ_k	1	1	-1	2	-1	1	1	-1	2	-1	1	1	-1

Таблица 3

$P = 7; Q = 3$

Функция	Номер такта										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_L	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2	5
S_{L+1}	0	3	6	2	5	1	4	0	3	6	2
S_k	3	2	4	2	3	0	0	3	2	4	2
S_{k+1}	0	3	2	4	2	3	0	0	3	2	4
Y_1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	1
Y_2	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	1
Y_{2D}	0	0	-1	0	-1	0	-1	0	0	-1	0
ρ_k	1	1	-1	2	-1	2	-1	1	1	-1	2

Таблица 4

$P = 8; Q = 3$

Функция	Номер такта																	
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
S_L	3	6	1	4	7	2	5	0	3	6	1	4	7	2	5	0	3	6
S_{L+1}	0	3	6	1	4	7	2	5	0	3	6	1	4	7	2	5	0	3
S_k	3	1	2	6	5	7	4	4	7	5	6	2	1	3	0	0	3	1
S_{k+1}	0	3	1	2	6	5	7	4	4	7	5	6	2	1	3	0	0	3
Y_1	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0
Y_2	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	0	0	1
Y_{2D}	0	0	-1	0	0	-1	0	1	0	0	-1	0	-1	-1	0	-1	0	0
ρ_k	1	1	-1	1	1	-1	2	-1	1	1	-1	2	0	-1	2	-1	1	1

Таблица 5

$P = 10; Q = 3$

Функция	Номер такта																				
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
S_L	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0	3
S_{L+1}	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7	0
S_k	3	9	8	0	5	3	4	8	5	5	8	4	3	5	0	8	9	3	0	0	3
S_{k+1}	0	3	9	8	0	5	3	4	8	5	5	8	4	3	5	0	8	9	3	0	0
Y_1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1
Y_2	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0
Y_{2D}	0	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	0	0	-1	-1	0	-1	0	0	-1	-1	0
ρ_k	1	0	1	0	0	1	-1	1	1	-1	1	1	0	-1	2	-1	0	2	0	-1	1

В табл. 1—5 фоном выделен период повторения цикла счета.

Для анализа спектра выходных колебаний КА, дискретных во времени с шагом $T_0 = 1/f_0$ и/или квантованных по амплитуде с шагом s , в работе [6] рассмотрена математическая модель (рис. 5), пригодная для формирования цифрового колебания ($A_B(t)$) с периодической огибающей любой формы. Модель позволяет учесть конечную точность воспроизведения огибающей при использовании ограниченного набора строго периодических колебаний разной амплитуды и частоты следования, причем на периоде неравномерности структуры выходного потока импульсов $T_c = 1/F_c$ укладывается целое число периодов вспомогательных колебаний модели; здесь $T_c = QT_B = PT_0$, $T_B = 1/F_{\text{вых}}$. Аналогичная структура, пригодная для компьютерного моделирования и анализа спектров цифровых двухуровневых колебаний, рассмотрена в работе [7].

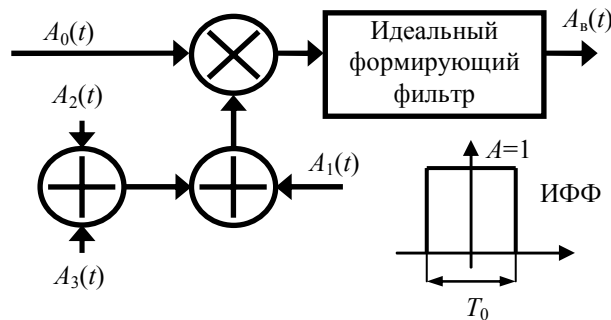


Рис. 5

Например, для модели формирования цифровой моногармоники (ЦМ) с равномерной дискретизацией по времени T_0 целесообразно выбрать следующие исходные строго периодические колебания:

- $A_0(t)$ — периодическую последовательность δ -импульсов с периодом следования T_0 ;
- $A_1(t) = \sin(2\pi Qt)$ — моногармоническую огибающую требуемой (синтезируемой) частоты;

$$A_2(t) = A_3(t) = 0;$$

ИФФ — идеальный формирующий фильтр с шириной окна, равной T_0 .

Для спектра ЦМ можно записать

$$A_{\text{ЦМ}}(n) = (-1)^n P \frac{\sin(\pi Q/P)}{\pi(nP \pm Q)},$$

где $n = 0, 1, \dots$

Аналогично, если принять

$$A_{\text{ЦТ}}(t) = \begin{cases} 1 + X/\pi & \text{для } -\pi \leq X \leq 0; \\ 1 - X/\pi & \text{для } 0 \leq X \leq \pi; \end{cases}$$

$$A_2(t) = A_3(t) = 0, \quad X = t/T_0, \quad PT_0/Q = \pi, \quad 0 \leq t \leq T_0,$$

получим модель формирования цифрового треугольного колебания (треугольника — ЦТ) с равномерной дискретизацией по времени T_0 , для спектра которого можно записать

$$A_{\text{ЦТ}}(k) = 2\lambda\mu \frac{\sin[\pi(Q \pm k)/P]}{\pi P(Q \pm k) \sin^2[\pi(R+1)/P]},$$

где $\mu = 1 \forall P \equiv 0 \pmod{2}$; $\mu = \cos[\pi(R+1)/P] \forall P \equiv 1 \pmod{2}$; $\lambda = 1 \cos[\pi(R+1)]$; $k = 0, 1, 2, \dots, Q-1$; $R = (-1)^{r-1} (\pm k)P_{r-1}$; здесь P_{r-1} — числитель предпоследнего $(r-1)$ -го члена разложения коэффициента деления $N = 2P/Q$ в цепную дробь по алгоритму Евклида [5].

Одна из важных характеристик выходных колебаний КА, применительно к задачам синтеза частот, — уровень E полезной составляющей спектра, отнесенный к амплитуде A моногармонического колебания требуемой частоты: $G = 20 \lg(E/A)$. Параметр G позволяет оценить степень приближения формируемого конечным автоматом цифрового колебания к своему аналоговому прототипу. На рис. 6 показан график изменения параметра G в зависимости от коэффициента $N = P/Q$ деления (частоты) КА для разных огибающих цифрового колебания: идеальной моногармоники с равномерной дискретизацией по времени, псевдо- и квазиеандра, цифрового треугольника с равномерной дискретизацией по времени [6, 7]. Здесь величины P и Q выражают соответственно номинальные значения частот опорного f_0 и синтезируемого (выходного) $F_{\text{вых}}$ колебаний в единицах общей меры $F_c = f_0/P = F_{\text{вых}}/Q$ — шага сетки синтезируемых частот.

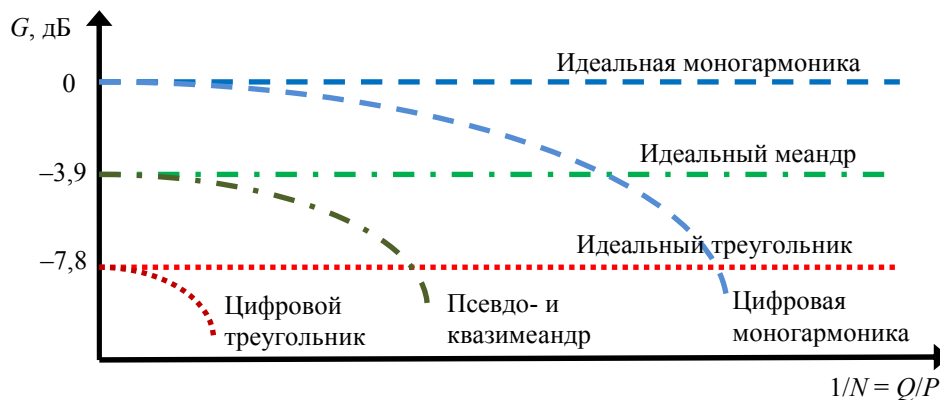


Рис. 6

Предложенная математическая модель позволяет производить численный расчет спектров формируемых конечным автоматом двух- и многоуровневых колебаний с равномерной и неравномерной дискретизацией по фазе, а также многоуровневых колебаний, характеризуемых конечной точностью выбора узлов аппроксимации, что, в свою очередь, позволяет получать аналитические выражения в свернутом виде для спектров колебаний с различной огибающей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Никитин Ю. А.* Широкополосный синтез частот с помощью цифровых структур // Изв. вузов СССР. Приборостроение. 1990. Т. 33, № 9. С. 39—47.
2. *Гуревич И. Н., Никитин Ю. А.* Синтез сетки частот с произвольным шагом // Радиотехника. 1992. № 4. С. 53—58.
3. *Брауэр В.* Введение в теорию конечных автоматов: Пер. с нем. М.: Радио и связь, 1987. 392 с.
4. Аperiodические автоматы / Под ред. *В. И. Варшавского*. М.: Наука, 1976. 424 с.
5. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. М.: Наука, 1972.
6. *Никитин Ю. А.* Математическая модель формирования колебаний с периодической огибающей // Тр. НИИР: Сб. статей. М., 1999. 124 с.
7. *Никитин Ю. А.* Конечный автомат как элемент цифровой системы синтеза частот // Докл. X Междунар. науч.-техн. конф. „Радиолокация, навигация, связь“. Воронеж, НПФ „САКВОЕЕ“ ООО, 2004. Т. 1. С. 526—533.

Сведения об авторе**Юрий Александрович Никитин**

— канд. техн. наук; Филиал ФГУП НИИ радио — Ленинградский отраслевой НИИР, Санкт-Петербург; ст. науч. сотрудник;
E-mail: yuriyan@list.ru

Рекомендована Институтом

Поступила в редакцию
21.05.10 г.