УДК 621.391.82

А. Ю. Янушковский А. В. Кривошейкин

ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРИЕМА СИГНАЛОВ ФАЗОАМПЛИТУДНОЙ МОДУЛЯЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕИДЕАЛЬНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ КАНАЛОВ

Предлагается метод нахождения допусков на параметры демодулятора в цифровых системах связи, в которых применяется квадратурная амплитудно-фазовая модуляция. Приводится выражение, связывающее отклонение угла сдвига фаз несущих колебаний квадратурных каналов демодулятора и вероятность ошибки.

Ключевые слова: *номинальные значения, отклонение вероятности ошибки, квадратурная амплитудно-фазовая модуляция, поле сигналов, квадратурные каналы, пороговые уровни.*

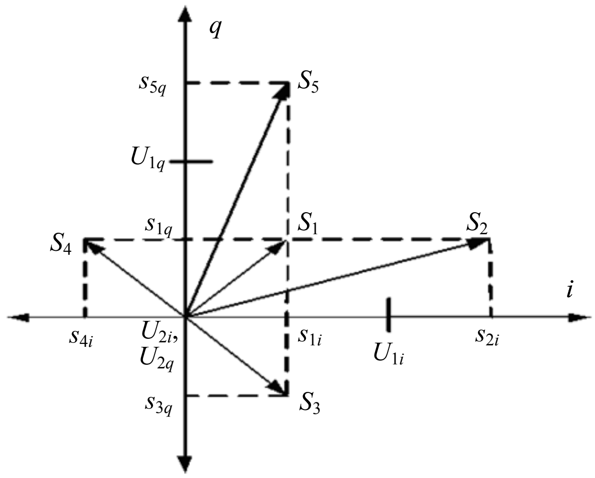
Введение. Квадратурная амплитудно-фазовая модуляция (КАМ) — это вид модуляции, при котором информация передается путем изменения амплитуды и фазы сигнала несущей частоты. При передаче цифровых сигналов некоторое число битов цифрового потока ставится в соответствие определенному сочетанию амплитуды и фазы; прием сигнала с такой модуляцией заключается в принятии решения о том, какое из возможных сочетаний амплитуды и фазы (далее — *сигналов*) было передано. Такая модуляция может быть реализована путем амплитудной модуляции двух синусоидальных колебаний, угол сдвига фаз которых составляет 90° (*квадратурные каналы* i и q), с последующим их сложением. При приеме сигнала, в процессе демодуляции, также производится его разделение на квадратурные составляющие (поэтому в данной статье вывод всех выражений осуществляется для двух каналов i и q).

Показателем качества работы цифрового канала связи является *вероятность возникновения ошибки*, т.е. вероятность того, что при передаче какого-либо из сигналов было принято решение о приеме другого сигнала. Такая ошибка может возникнуть из-за наличия шумов в канале связи [1]. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум для систем, использующих КАМ, известна и регламентируется соответствующими стандартами [2]. Однако на вероятность возникновения ошибки могут также влиять и отклонения параметров систем, составляющих канал связи, а также неточное их изготовление.

В настоящей статье рассматривается влияние отклонения одного из параметров системы от номинального значения на помехоустойчивость системы, в которой используется квадратурная амплитудно-фазовая модуляция. В качестве параметра системы, вызывающего увеличение вероятности ошибки, принят угол сдвига фаз несущих колебаний квадратурных каналов.

При выводе выражений было принято допущение, что на вероятность ошибки влияют только четыре сигнала S_2, S_3, S_4, S_5, ближайшие к переданному сигналу S_1 (см. рисунок). Справедливость такого допущения объясняется в работе [3].

В данной статье рассматривается модель канала связи, в котором области сигналов приемника разделены некоторыми пороговыми уровнями U_{1i}, U_{2i}, U_{1q}, U_{2q} (см. рисунок), именно с этими значениями происходит сравнение принятого сигнала.



Расчетные соотношения. Фазы сигналов несущей частоты в квадратурных каналах многоуровневых систем передачи должны быть сдвинуты относительно друг друга на 90°. Неточность исполнения реальных систем (т.е. неточность выполнения операции сдвига несущих колебаний на 90° как в цифровых системах, так и в аналоговых) приводит к дополнительному сдвигу на угол φ, что вызывает увеличение вероятности ошибки при приеме сигнала. В этом случае передаваемый сигнал S_1 определяется как

$$S_1 = s_{1i}\cos(\omega t+\varphi)+\xi_i + s_{1q}\sin(\omega t)+\xi_q =$$

$$= s_{1i}\cos\varphi\cos(\omega t)+\xi_i + \left(s_{1q} - s_{1i}\sin\varphi\right)\sin(\omega t)+\xi_q, \quad (1)$$

где s_{1i} и s_{1q} — амплитуды квадратурных составляющих сигнала S_1 при $\varphi = 0$; ξ_i, ξ_q — гауссовские некоррелированные шумы в каналах *i*, *q*.

Из выражения (1) следует, что сигналы в каналах *i* и *q* приемника определяются соответственно соотношениями

$$S_{1i} = s_{1i}\cos\varphi + \xi_i, \quad (2)$$

$$S_{1q} = s_{1q} - s_{1i}\sin\varphi + \xi_q. \quad (3)$$

Распределение плотности вероятности принято нормальным исходя из закона больших чисел [4]. Математические ожидания сигналов (2) и (3) вычисляются как

$$M\left[S_{1i}\right] = s_{1i}\cos\varphi, \quad (4)$$

$$M\left[S_{1q}\right] = s_{1q} - s_{1i}\sin\varphi. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала *канал i.* Вероятность ошибки P_i, возникающая в канале *i*, равна сумме вероятности того, что сигнал S_{1i} превысит пороговое значение U_{1i}, и вероятности того, что сигнал S_{1i} будет меньше значения U_{2i}. Таким образом, справедлива формула

$$P_i\left(M\left[S_{1i}\right]\right) = P\left(S_{1i} > U_{1i}\right) + P\left(S_{1i} < U_{2i}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{U_{1i}-M[S_{1i}]}{\sigma}}^{\infty} e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{U_{2i}-M[S_{1i}]}{\sigma}} e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho, \quad (6)$$

где ρ — переменная интегрирования, σ — среднее квадратическое отклонение.

Разложим функцию $P_i\left(M\left[S_{1i}\right]\right)$ в ряд Тейлора по переменной $M\left[S_{1i}\right]$ в окрестности значения s_{1i} и ограничимся тремя членами разложения. Найдем выражения для первой и второй производной и определим их значения при условии $s_{1i}=\dfrac{U_{2i}+U_{1i}}{2}$, т.е. при номинальном значении сигнала, находящемся в середине области (между пороговыми уровнями) [5]:

$$\frac{dP_i\left(s_{1i}\right)}{dM\left[S_{1i}\right]}=0, \tag{7}$$

$$\frac{d^2P_i\left(s_{1i}\right)}{d\left(M\left[S_{1i}\right]\right)^2}=\frac{2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left(U_{1i}-M\left[S_{1i}\right]\right)^2}{8\sigma^2}\right)\left(\frac{U_{1i}-U_{2i}}{2}\right). \tag{8}$$

Ограничимся тремя членами разложения и представим выражение (6) в следующем виде:

$$P_i\left(M\left[S_{1i}\right]\right)=P_i\left(s_{1i}\right)+\frac{dP_i\left(s_{1i}\right)}{dM\left[S_{1i}\right]}\left(M\left[S_{1i}\right]-s_{1i}\right)+\frac{1}{2}\frac{d^2P_i\left(s_{1i}\right)}{d\left(M\left[S_{1i}\right]\right)^2}\left(M\left[S_{1i}\right]-s_{1i}\right)^2. \tag{9}$$

Подставив уравнения (7) и (8) в формулу (9), получим

$$P_i\left(M\left[S_{1i}\right]\right)-P_i\left(s_{1i}\right)=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{U_{1i}-U_{2i}}{8\sigma^2}\right)\left(\frac{U_{1i}-U_{2i}}{2}\right)\left(M\left[S_{1i}\right]-s_{1i}\right)^2. \tag{10}$$

Введем функцию $X\left(\varphi\right)=\left(M\left[S_{1i}\right]-s_{1i}\right)^2$, которая с учетом выражения (4) имеет вид

$$X\left(\varphi\right)=s_{1i}{}^2\left(1-\cos\varphi\right)^2. \tag{11}$$

Для разложения функции (11) в ряд Тейлора по переменной φ при $\varphi=0$ определим коэффициенты разложения:

$$\left.\frac{dX\left(\varphi\right)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}=0,\quad \left.\frac{d^2X\left(\varphi\right)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=0,\quad \left.\frac{d^3X\left(\varphi\right)}{d\varphi^3}\right|_{\varphi=0}=0,\quad \left.\frac{d^4X\left(\varphi\right)}{d\varphi^4}\right|_{\varphi=0}=6s_{1i}^2.$$

Ограничимся пятью членами разложения и представим выражение (11) в следующем виде:

$$X\left(\varphi\right)=\frac{6}{4!}s_{1i}^2\varphi^4=\frac{1}{4}s_{1i}^2\varphi^4. \tag{12}$$

Подставив формулу (12) в (10) и разделив обе части выражения (10) на величину $P_i\left(s_{1i}\right)$, после выполнения преобразований получим

$$\frac{P_i\left(M\left[S_{1i}\right]\right)}{P_i\left(s_{1i}\right)}=1+\frac{\left[\dfrac{1}{4\sigma^3\sqrt{2\pi}}\dfrac{U_{1i}-U_{2i}}{2}s_{1i}^2\exp\left(-\dfrac{\left(U_{1i}-U_{2i}\right)^2}{8\sigma^2}\right)\varphi^4\right]}{P_i\left(s_{1i}\right)}. \tag{13}$$

Из уравнения (13) следует, что при любом отклонении разности фаз от значения 90° вероятность ошибки увеличится.

Используя соотношение $s_{1i}=\dfrac{U_{2i}+U_{1i}}{2}$, подставим в формулу (6) значение $\left.M\left[S_{1i}\right]\right|_{\varphi=0}=s_{1i}$, в результате получим

$$P_i\left(s_{1i}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{U_{1i}-U_{2i}}{2\sigma}}^{\infty} e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{U_{2i}-U_{1i}}{2\sigma}} e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{U_{1i}-U_{2i}}{2\sigma}}^{\infty} e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho\,. \tag{14}$$

Введем обозначение $h_i=\dfrac{U_{1i}-U_{2i}}{2\sigma}$ и подставим выражение (14) в (13):

$$\frac{P_i\left(M\left[S_{1i}\right]\right)}{P_i(s_{1i})}=1+\frac{\left[\left(\frac{s_{1i}}{2\sigma}\right)^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}h_i e^{\frac{-h_i^2}{2}}\varphi^4\right]}{\left[\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{h_i}^{\infty}e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho\right]}. \tag{15}$$

Величина h_i в реальных системах с многоуровневой модуляцией значительно больше единицы. Поэтому, считая величину h_i в уравнении (15) сколь угодно большой, воспользуемся правилом Лопиталя для устранения неопределенности, в результате получим

$$\frac{P_i(M\left[S_{1i}\right])}{P_i(s_{1i})}=1+\frac{1}{8}\left(\frac{s_{1i}}{\sigma}\right)^2 h_i^2\varphi^4\,. \tag{16}$$

Перейдем теперь к *рассмотрению канала q*. Вероятность ошибки P_q, возникающая в канале q, определяется по формуле

$$P_q\left(M\left[S_{1q}\right]\right)=P\left(S_{1q}>U_{1q}\right)+P\left(S_{1q}<U_{2q}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{U_{1q}-M\left[S_{1q}\right]}{\sigma}}^{\infty} e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{U_{2q}-M\left[S_{1q}\right]}{\sigma}} e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho. \tag{17}$$

Выполнив преобразования уравнения (17), идентичные проведенным для канала *i*, получим формулу, аналогичную выражению (10):

$$P_q\left(M\left[S_{1q}\right]\right)-P_q\left(s_{1q}\right)=\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{U_{1q}-U_{2q}}{8\sigma^2}\right)\left(\frac{U_{1q}-U_{2q}}{2}\right)\left(M\left[S_{1q}\right]-s_{1q}\right)^2. \tag{18}$$

Введем функцию $Y\left(\varphi\right)=\left(M\left[S_{1q}\right]-s_{1q}\right)^2$, которая с учетом уравнения (3) имеет вид

$$Y\left(\varphi\right)=s_{1i}^2\sin^2\varphi\,. \tag{19}$$

Разложим (19) в ряд Тейлора по переменной φ при $\varphi=0$, для этого определим коэффициенты разложения:

$$\left.\frac{dY\left(\varphi\right)}{d\varphi}\right|_{\varphi=0}=0,\quad \left.\frac{d^2Y\left(\varphi\right)}{d\varphi^2}\right|_{\varphi=0}=2s_{1i}^2\,.$$

Ограничимся тремя членами разложения и представим выражение (19) в следующем виде:

$$Y\left(\varphi\right)=s_{1i}^2\varphi^2\,. \tag{20}$$

Подставив формулу (20) в (18) и разделив обе части выражения (18) на величину $P_q\left(s_{1q}\right)$, после выполнения преобразований получим

$$\frac{P_q\left(M\left[S_{1q}\right]\right)}{P_q\left(s_{1q}\right)}=1+\left[\frac{\frac{1}{\sigma^3}\frac{U_{1q}-U_{2q}}{2}s_{1i}^2\exp\left(-\frac{\left(U_{1q}-U_{2q}\right)^2}{8\sigma^2}\right)\varphi^2}{P_{q\left(s_{1q}\right)}}\right]. \quad (21)$$

Используя соотношение $s_{1q}=\dfrac{U_{2q}+U_{1q}}{2}$, подставим в формулу (17) величину $M\left[S_{1q}\right]\Big|_{\varphi=0}=s_{1q}$, в результате получим

$$P_q\left(s_{1q}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{U_{1q}-U_{2q}}{2\sigma}}^{\infty}e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\frac{U_{2q}-U_{1q}}{2\sigma}}e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{U_{1q}-U_{2q}}{2\sigma}}^{\infty}e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho. \quad (22)$$

Введем обозначение $h_q=\dfrac{U_{1q}-U_{2q}}{2\sigma}$ и подставим выражение (22) в (21):

$$\frac{P_q\left(M\left[S_{1q}\right]\right)}{P_q\left(s_{1q}\right)}=1+\left[\frac{\left(\frac{s_{1i}}{\sigma}\right)^2\frac{h_q}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-h_q^2}{2}}\varphi^2}{\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{h_q}^{\infty}e^{\frac{-\rho^2}{2}}d\rho}\right]. \quad (23)$$

Считая величину h_q в уравнении (23) сколь угодно большой и используя правило Лопиталя для устранения неопределенности, получаем

$$\frac{P_q\left(M\left[S_{1q}\right]\right)}{P_q(s_{1q})}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{s_{1i}}{\sigma}\right)^2 h_q^2\varphi^2. \quad (24)$$

В силу того, что точки звездного поля [2] находятся на равном расстоянии друг от друга, справедливы следующие соотношения:

$$h_q=h_i=\frac{U_{1i}-U_{2i}}{2\sigma};\quad P_q\left(s_{1q}\right)=P_i\left(s_{1i}\right). \quad (25)$$

Введем обозначения для вероятностей ошибок в каналах i и q при наличии угла φ и его отсутствии, т.е. при $\varphi=0$:

$$\left.\begin{aligned}&P_i\left(\varphi\right)=P_i\left(M\left[S_{1i}\right]\right),\quad P_i(0)=P_i\left(s_{1i}\right);\\&P_q\left(\varphi\right)=P_q\left(M\left[S_{1q}\right]\right),\quad P_q\left(0\right)=P_q\left(s_{1q}\right)=P_i(0).\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

Полная вероятность ошибки $P\left(\varphi\right)$ при наличии дополнительного угла φ равна сумме вероятностей ошибок в каналах i и q. Используя выражения (16) и (24)—(26) , получаем

$$P(\varphi)=P_i(\varphi)+P_q\left(\varphi\right)=P_i\left(0\right)+P_q(0)+P_i(0)\frac{1}{8}\left(\frac{s_{1i}}{\sigma}\right)^2 h_i^2\varphi^4+P_q(0)\frac{1}{2}\left(\frac{s_{1i}}{\sigma}\right)^2 h_i^2\varphi^2. \quad (27)$$

Из уравнений (26) следует, что $P_i(0)=P(0)/2$, где $P(0)$ — полная вероятность ошибки при φ=0. Преобразуем выражение (27):

$$\frac{P(\varphi)}{P(0)}=1+\left(\frac{s_{1i}}{\sigma}\right)^2 h_i^2\left(\frac{1}{4}\varphi^2+\frac{1}{16}\varphi^4\right). \tag{28}$$

Так как значение угла φ <<1, то в уравнении (28) можно пренебречь вторым слагаемым. Запишем окончательную формулу:

$$k=\frac{P(\varphi)}{P(0)}=1+\frac{1}{4}\left(\frac{s_{1i}}{\sigma}\right)h_i^2\varphi^2 . \tag{29}$$

Соотношение (29) показывает, во сколько раз увеличится вероятность ошибки при появлении дополнительного угла φ сдвига фаз несущих колебаний в каналах i и q.

При известном допустимом увеличении вероятности ошибки k можно рассчитать допустимое значение угла φ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гехер К.* Теория чувствительности и допусков электронных цепей. М.: Сов. радио, 1973.
2. ETSI TR 101 290 Digital Video Broadcasting (DVB); Measurment Guidelines for DVB V1.2.1 (2001-05). [Электронный ресурс]: <http://www.etsi.org>.
3. *Боккер П.* Передача данных. Техника связи в системах телеобработки данных. М.: Связь, 1980.
4. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.
5. *Харкевич А. А.* Борьба с помехами. М.: Наука, 1965.

Сведения об авторах

Антон Юльевич Янушковский — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения, кафедра технической электроники; E-mail: yanushkovskiy@mail.ru

Анатолий Валентинович Кривошейкин — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет кино и телевидения, кафедра технической электроники; E-mail: krivav@yandex.ru

Рекомендована кафедрой технической электроники

Поступила в редакцию 23.12.10 г.