

Процессы переноса в телах эллипсоидальной конфигурации

Миронов Н.А., Сергеева А.А., Косачев В.С., Кошевой Е.П.

Кубанский государственный технологический университет

Процессы переноса тепла и массы в объектах пищевой технологии (зерна, семена, плоды или ягоды и др.) широко распространены. Эти объекты имеют форму эллипсоида. В работе оценено влияние формы объектов на процессы переноса. Установлено, что в частицах равного объема скорость переноса потенциала тем медленнее, чем ближе форма частицы к сферической.

Ключевые слова: процессы переноса; эллипсоид.

Многие объекты пищевой технологии (зерна, семена, плоды или ягоды и др.) характеризуются их габаритами: главным (a), средним (b) и малым (c) осям – и они по форме близки к эллипсоидальной конфигурации. Процессы переноса в них тепла или массы (нагрев, охлаждение, сушка и т.п.) широко распространены, и адекватное описание процесса требует учета формы объекта.

Целью данной работы является оценить влияние формы объектов эллипсоидальной конфигурации на процессы переноса. В случае расчетов переноса в трехмерных частицах важным параметром расчетов является обобщенный радиус (R_{ph}), используемый для расчета критерия Фурье. В случае трехосного эллипсоида, определяющий размер можно определить, используя соотношения объемов и поверхностей коаксиальных эллипсоидов [1], входящих в формулу

$$a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left[s(\xi) \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right] = v'(\xi)_n \frac{\partial \Theta}{\partial \tau}. \quad (1)$$

Формула расчета объема эллипсоида элементарна:

$$V_{El}(a, b, c) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot c. \quad (2)$$

Формулу площади поверхности эллипсоида нельзя выразить при помощи простейших функций, хотя выражение известно:

$$S_{EI}(a, b, c) = 2 \cdot \pi \cdot \left\{ c^2 + \frac{b \cdot c^2}{\sqrt{a^2 - c^2}} \cdot LegendreF[\theta(a, c), m(a, b, c)] + \right. \\ \left. + b \cdot \sqrt{a^2 - c^2} \cdot LegendreE[\theta(a, c), m(a, b, c)] \right\}, \quad (3)$$

где LegendreF(x,k), LegendreE(x,k) - эллиптические интегралы Лежандра:

$$LegendreF(x, k) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \cdot \sin(t)^2}} dt \quad LegendreE(x, k) := \int_0^x \sqrt{1 - k^2 \cdot \sin(t)^2} dt \quad (4)$$

Параметры θ и m определяются следующими соотношениями:

$$m(a, b, c) = \frac{a^2 \cdot b^2 - c^2}{b^2 \cdot a^2 - c^2} \quad \theta(a, c) = \text{ArcSin} \left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} \right) \quad (5)$$

Кнуд Томсен из Дании предложил следующую приближенную формулу площади:

$$S_{KT}(a, b, c, p) = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{a^p \cdot b^p + a^p \cdot c^p + c^p \cdot b^p}{3} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6)$$

Параметр p используемый в этой формуле определяем минимизацией отклонений от теоретической формулы по нескольким эллипсоидам. Учитывая размерность используемой формулы, расчеты проводили в системе СИ, подставляя в формулу полуоси эллипсоида a, b, c в метрах получали значение площади в m^2 . Нормировку параметра p осуществляли по четырем эллипсоидам, имеющим примерно равный объем и площадь поверхности, но значительно отличающуюся по размерам геометрию осей. Основные характеристики представлены ниже (Таблица 1). Нормировку осуществляли минимизируя стандартное отклонение между теоретическим значением S_{EI} и упрощенной формулой S_{KT} .

Таблица 1. Геометрия нормирующих эллипсоидов ($p = 1.69795$).

№ n./n.	a, м	b, м	c, м	V_{EI}, m^3	S_{EI}, m^2	S_{KT}, m^2	Rph, м
1	3,95949	1,05947	0,23838	4,189	29,000	29,006	0,433
2	2,07728	2,07728	0,23174	4,189	28,091	29,192	0,447
3	8,08650	0,35166	0,35166	4,189	28,092	28,184	0,447
4	7,34545	0,47634	0,28580	4,189	30,543	28,351	0,411

Как видно из представленных данных среднеквадратичное отклонение между этими показателями составляет 3% от теоретического значения, что вполне допустимо для технических расчетов. Поэтому в дальнейшем использовали формулу Кнуда Томсена с нормированным параметром $p = 1.69795$. Кроме того, из расчета эффективного радиуса R_{ph} по отношению объема к площади видно, что для всех эллипсоидов, выбранных в качестве нормирующих, этот параметр практически не изменяется, что говорит о его недостаточной применимости для расчетов нестационарного потенциалопереноса. Поэтому в дальнейшем использовали в качестве опорной величины радиуса равнообъемного эллипсоиду шара R_{Sph} , определяемого наиболее точно по формуле:

$$R_{Sph} = \frac{\sqrt[3]{6 \cdot \pi^2 \cdot V_{Ell}}}{2 \cdot \pi} \quad (7)$$

Для всех нормирующих эллипсоидов этот параметр равен 1. Скорость потенциалопереноса согласно (1) определяется отношением $S(\xi)/V'(\xi)$, однако для трехосного эллипсоида существует три производных объема по соответствующим осям: $V'_a(\xi), V'_b(\xi)$ и $V'_c(\xi)$. В этом случае коэффициенты формы по осям также будут различны. Рассмотрим значения параметров $S(\xi)/V'(\xi)$ по осям эллипсоида. Формулы получим в аналитическом виде, на основе формулы Кнуда Томсена:

$$K_a(b, c) = 3 \cdot \frac{\left[\frac{(b)^{1.69795} + (c)^{1.69795} + (c)^{1.69795} \cdot (b)^{1.69795}}{3} \right]^{.588945}}{b \cdot c} \quad (8)$$

$$K_b(a, c) = 3 \cdot \frac{\left[\frac{(a)^{1.69795} + (a)^{1.69795} \cdot (c)^{1.69795} + (c)^{1.69795}}{3} \right]^{.588945}}{a \cdot c} \quad (9)$$

$$K_c(a, b) = 3 \cdot \frac{\left[\frac{(a)^{1.69795} \cdot (b)^{1.69795} + (a)^{1.69795} + (b)^{1.69795}}{3} \right]^{.588945}}{a \cdot b} \quad (10)$$

Полученные значения коэффициентов скорости потенциалопереноса по осям эллипсоида используем в дальнейшем для расчета обобщенного размера эллипсоида R_{Ell} , который будет учитывать эти величины. Аналогичный расчет этого параметра предложен Лыковым [2] для параллелепипеда с габаритами $2 \cdot R_1 \times 2 \cdot R_2 \times 2 \cdot R_3$.

В этом случае обобщенный размер определяется формулой:

$$\frac{1}{R_{box}^2} = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2}, \quad (11)$$

а коэффициенты скоростей переноса по осям параллелепипеда задаются формулой:

$$K_i = \frac{R_{box}}{R_i}, \quad (12)$$

где $i=1,2,3$. В случае трехосного эллипсоида аналоги уравнений (11) и (12) могут быть получены на основе формулы Кнуда Томсена:

$$R_{sp}(a, b, c) = e \frac{\ln\left(\frac{1}{e^{p \cdot \ln(c \cdot b)} + e^{p \cdot \ln(c \cdot a)} + e^{p \cdot \ln(a \cdot b)}}\right) + (\ln(b) + \ln(c) + \ln(a)) \cdot p}{p} \quad (13)$$

Расчет обобщенного размера эллипсоида R_{Ell} , который будет учитываться в критерии гомохронности эллипсоида FO_{Ell} , определяется формулой:

$$R_{Ell}(a, b, c) = R_{sp}\left[K_a(b, c)^{.588945} \cdot (a), K_b(a, c)^{.588945} \cdot (b), K_c(a, b)^{.588945} \cdot (c)\right] \quad (14)$$

Расчеты для нормирующих эллипсоидов представленных выше (Таблица 1) в сравнении с шаром единичного радиуса на основании формул (13) и (14) представлены ниже (Таблица 2):

Таблица 2. Обобщенные параметры эллипсоидов.

№ n./n.	K_a	K_b	K_c	$R_{Ell}, м$
0 (шар $R_{Sph}=1м$)	3	3	3	1
1	7,217	6,955	2,365	0,389
2	7,199	7,199	2,055	0,351
3	7,049	4,911	4,911	0,596
4	7,086	5,886	3,837	0,547

Представленные данные показывают, что для сферической частицы коэффициенты скоростей переноса по осям равны между собой, а обобщенный размер эллипсоида R_{Ell} (14) равен опорной величине радиуса шара R_{Sph} (7). Для эллипсоидов деформация по осям вносит существенные изменения в коэффициенты скоростей переноса по осям, что отражается на обобщенный размер эллипсоида R_{Ell} . Используя эти параметры можно произвести расчет для эллипсоидальных частиц в координатах избыточного потенциала от критерия гомохронности. В качестве исходных параметров модели переноса использовали габариты эллипсоидов и их обобщенный размер.

Таблица 3. Параметры сеточной модели для нормирующих эллипсоидов ($p = 1.69795$).

<i>№ п./п.</i>	<i>a, м</i>	<i>b, м</i>	<i>c, м</i>	$V_{\text{ЕИВ}}, \text{ м}^3$	$S_{\text{КТ}}, \text{ м}^2$	$R_{\text{ЕИВ}}, \text{ м}$
0	1	1	1	4,189	12,566	1
1	3,95949	1,05947	0,23838	4,189	29,006	0,389
2	2,07728	2,07728	0,23174	4,189	29,192	0,351
3	8,08650	0,35166	0,35166	4,189	28,184	0,596
4	7,34545	0,47634	0,28580	4,189	28,351	0,547

Представленные данные были использованы для расчета кривых избыточного потенциала в процессе сушки эллипсоидальных частиц. На рисунке 1 приведены кинетические кривые для сравнения с различным обобщенным размером эллипсоида.

Вывод

В частицах равного объема скорость переноса потенциала тем медленнее, чем ближе форма частицы к сферической.

Список литературы

1. Косачев В.С., Алексеев С.А., Кошевой Е.П. Анализ метрических коэффициентов одномерного уравнения диффузии в криволинейных координатах. Журнал прикладной химии, 1987, т.60, №10, с. с.2384-2388.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа. 1967. –566 с.

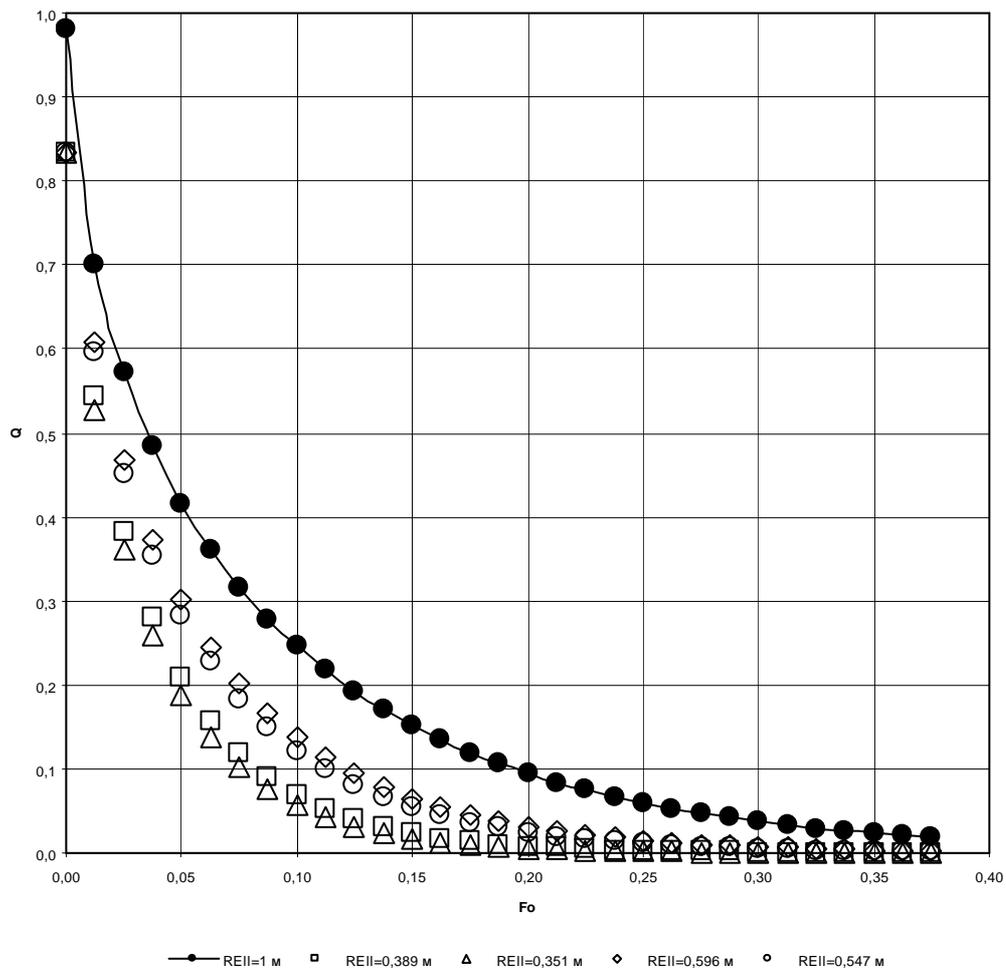


Рис. 1. Влияние обобщенных параметров эллипсоидов на кинетику потенциалопереноса.

Heat and mass transfer in ellipsoidal bodies

Mironov N.A., Sergeeva A.A., Kosachev V.S., Koshevoy E.P.

Kuban State Technological University

Heat and mass transfer in food processed objects (grains, seeds, fruit or berries, etc.) is very common. These objects are known to be of ellipsoidal shape. The study assesses the effect of object shapes on transfer processes. In particles of equal volume potential transfer rate was found to be the slower, the more spherical its shape was.

Key words: transfer processes, ellipsoid.