



УДК 519.684.6

МЕТОДЫ БИФУРКАЦИОННОГО И РЕКУРРЕНТНОГО АНАЛИЗА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПРИМЕРЕ МЕМРИСТИВНОЙ ЦЕПИ

Д.Н. Бутусов, Н.П. Кобызев, Д.О. Пестерев, А.В. Тутуева, В.Г. Рыбин

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация
Адрес для переписки: butusovdn@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 09.10.18, принята к печати 27.11.18

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-126-133

Язык статьи – русский

Ссылка для цитирования: Бутусов Д.Н., Кобызев Н.П., Пестерев Д.О., Тутуева А.В., Рыбин В.Г. Методы бифуркационного и рекуррентного анализа нелинейных динамических систем на примере мемристивной цепи // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2019. Т. 19. № 1. С. 126–133. doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-126-133

Аннотация

Рассмотрены алгоритмы анализа компьютерных моделей электрических цепей с перспективными нелинейными элементами. Выполнено экспериментальное сравнение четырех методов построения двухпараметрических бифуркационных диаграмм – метода на основе гистограммы максимальных значений временной области, метода на основе оценки ядерной плотности, метода скользящего среднего и алгоритма построения рекуррентных диаграмм, основанного на методе кластеризации. Для экспериментальной части работы выбрана модель простой мемристивной цепи с многовитковым аттрактором, обладающей хаотическим поведением. Представлены алгоритмы анализа хаотических систем, основанные на комплексировании подходов бифуркационного и рекуррентного анализа с методами математической статистики. Приведены способ построения двухпараметрических бифуркационных диаграмм высокого разрешения, основанный на методе скользящего среднего, и способ построения рекуррентных диаграмм, основанный на методе кластеризации. Исследована вычислительная эффективность численных методов интегрирования, используемых при синтезе дискретных моделей моделируемой цепи. С помощью графика эффективности выбран оптимальный решатель обыкновенных дифференциальных уравнений – экстраполяционный алгоритм восьмого порядка алгебраической точности на основе симметричного полувиткового опорного метода. Экспериментально показано, что метод скользящего среднего обеспечивает наиболее точное построение двухпараметрических бифуркационных диаграмм. Практическая значимость результатов работы обусловлена потребностью в высокоточных инструментах моделирования схем с перспективными нелинейными элементами. Область применения полученных результатов не ограничена моделированием электронных схем. Так, предложенные методы могут быть использованы для решения задачи поиска скрытых аттракторов в хаотических динамических системах.

Ключевые слова

хаотические системы, методы численного интегрирования, бифуркационный анализ, многовитковые аттракторы, скрытые аттракторы, мемристоры

METHODS FOR BIFURCATION AND RECURRENT ANALYSIS OF NONLINEAR DYNAMICAL SYSTEMS ON MEMRISTIVE CIRCUIT EXAMPLE

D.N. Butusov, N.P. Kobzyev, D.O. Pesterev, A.V. Tutueva, V.G. Rybin

Saint Petersburg Electrotechnical University (ETU "LETI"), Saint Petersburg, 197376, Russian Federation
Corresponding author: butusovdn@mail.ru

Article info

Received 09.10.18, accepted 27.11.18

doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-126-133

Article in Russian

For citation: Butusov D.N., Kobzyev N.P., Pesterev D.O., Tutueva A.V., Rybin V.G. Methods for bifurcation and recurrent analysis of nonlinear dynamical systems on memristive circuit example. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2019, vol. 19, no. 1, pp. 126–133 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2019-19-1-126-133

Abstract

The subject of this study is the analysis algorithms for studying the behavior of the computer models of electronic circuits with advanced nonlinear elements. The paper gives an experimental comparison of four methods of obtaining two-parametric bifurcation diagrams: histogram of maximal values method, kernel density estimation method, sliding window technique and algorithm based on clusterization of recurrence density plot. The simple memristive circuit with chaotic multi-scroll attractor was chosen as an example for experimental part of the study. The following main results were obtained. Two new algorithms of chaotic system analysis were developed, combining the methods of bifurcation and recurrent analysis with mathematical statistics. New technique for creation of two-parametric high resolution bifurcation diagrams is proposed. This technique is based on sliding average window approach. We also propose the clustering method for plotting precise dynamical maps. The comparative analysis of proposed techniques is described, including the comparison with existing approaches. The study of computational efficiency is performed for integration numerical methods applied for the synthesis of discrete models of the circuit. By comparison of efficiency plots the optimal ordinary differential equation (ODE) solver for computer experiments with discrete models was chosen. The efficiency analysis has shown that the best ODE solver for simple memristive circuit simulation is the semi-implicit extrapolation algorithm of order eight. It is experimentally shown that sliding window average method is the most precise approach for creation of two-parametric bifurcation diagrams. The practical relevance of the obtained results is as follows. New methods of nonlinear systems analysis are applicable for creation of high precision simulation tools for circuits with advanced nonlinear elements. The applications are not limited to the electronic circuits simulation only but also include the possibility to locate hidden attractors in chaotic dynamical systems.

Keywords

chaotic systems, numerical integration methods, bifurcation analysis, multi-wing attractors, hidden attractors, memristors

Введение

Даже самые простые нелинейные системы могут обладать хаотическими режимами поведения [1, 2]. Одним из ярких примеров таких систем являются цепи с мемристорами¹, находящие применение в таких областях науки и техники, как энергонезависимая память, нелинейные цепи и нейроморфные системы [3]. Этот факт делает еще более важным совершенствование алгоритмов анализа нелинейных динамических систем. Распространенными инструментами изучения хаотических систем являются бифуркационный анализ, статистический анализ поведения переменных состояния во временной области и вычисление старших показателей Ляпунова. Однако ни один из этих методов не способен выявить и классифицировать все разновидности процессов, протекающих в хаотических системах.

В последнее время у исследователей в области нелинейной динамики большой интерес вызывают вопросы поиска и локализации скрытых аттракторов [4, 5]. Такой тип аттрактора может встречаться даже в хорошо изученных системах, таких как цепь Чуа [4]. Для анализа систем, которые обладают особыми типами поведения, например, многовитковыми и многопетлевыми аттракторами, необходимы надежные численные алгоритмы, обеспечивающие быстрый поиск скрытого аттрактора. Довольно много сложных численно-аналитических методов обнаружения скрытых аттракторов. Идея одного из них [4] заключается в аналитическом поиске начальных условий для локализации периодических решений численным методом в модифицированной системе с последующей проверкой полученных результатов на исходной системе. Вычислительная сложность и точность поиска скрытых аттракторов этим методом в работе [4] не обсуждаются. Основным недостатком вышеупомянутого Этот метод применим, лишь когда точно известна математическая модель исследуемой системы, к тому же сама процедура анализа довольно сложна и не предполагает какой-либо автоматизации.

Таким образом, эффективный численный алгоритм обнаружения скрытых аттракторов востребован в ряде практических задач по исследованию реальных нелинейных систем, полная идентификация которых невозможна или затруднена. Подобный алгоритм должен правильно различать тип аттрактора по данным о поведении переменных состояния системы во временной области.

Предметом настоящей работы являются алгоритмы анализа поведения компьютерных моделей электрических цепей с перспективными нелинейными элементами. В статье проведено экспериментальное сравнение двух алгоритмов, базирующихся на методе построения двухпараметрических бифуркационных диаграмм (динамических карт) – на основе гистограммы максимальных значений временной области и на основе оценки ядерной плотности (KDE) – с предлагаемыми авторами алгоритмами построения динамических карт на основе скользящего среднего и кластеризации. В качестве репрезентативного примера хаотической системы выбрана модель простой мемристивной цепи, обладающая хаотическим поведением, с многовитковым аттрактором.

Математическая модель

В работе [5] представлена простая мемристорная цепь, динамика которой описывается следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

¹ Мемристор (от англ. *memory* – память и *resistor* – электрическое сопротивление) – пассивный элемент в микроэлектронике, способный изменять свое сопротивление в зависимости от протекающего через него заряда (интеграла тока за время работы). Наблюдающееся в мемристоре явление гистерезиса позволяет использовать его в качестве ячейки памяти.

$$\begin{cases} \dot{x} = ay; \\ \dot{y} = by - z + c \sin(2\pi dx); \\ \dot{z} = y - ez; \\ \dot{u} = -xy - (g + n\phi^2 + k); \\ \dot{\phi} = u, \end{cases} \quad (1)$$

где a, b, c, d, e, g, n и k – независимые безразмерные параметры системы, полученные после нормализации исходных уравнений цепи [5], а x, y, z – приведенные безразмерные переменные состояния цепи, ϕ – магнитный поток мемристора, u – напряжение между ними. При $k = 0,05$ система не имеет точек равновесия, и любой аттрактор в ней является скрытым по определению [5]. Система (1) имеет многовитковый аттрактор, форма и число витков которого зависят от начальных условий, значений параметра нелинейности и времени моделирования [5].

На рис. 1 приведены фазовые портреты системы (1), соответствующие различным значениям параметра нелинейности a . Можно видеть, что число витков изменяется в широком диапазоне и при достижении определенного значения становится непросто отличить один виток от другого. Указанные затруднения распространяются и на автоматизированные системы анализа.

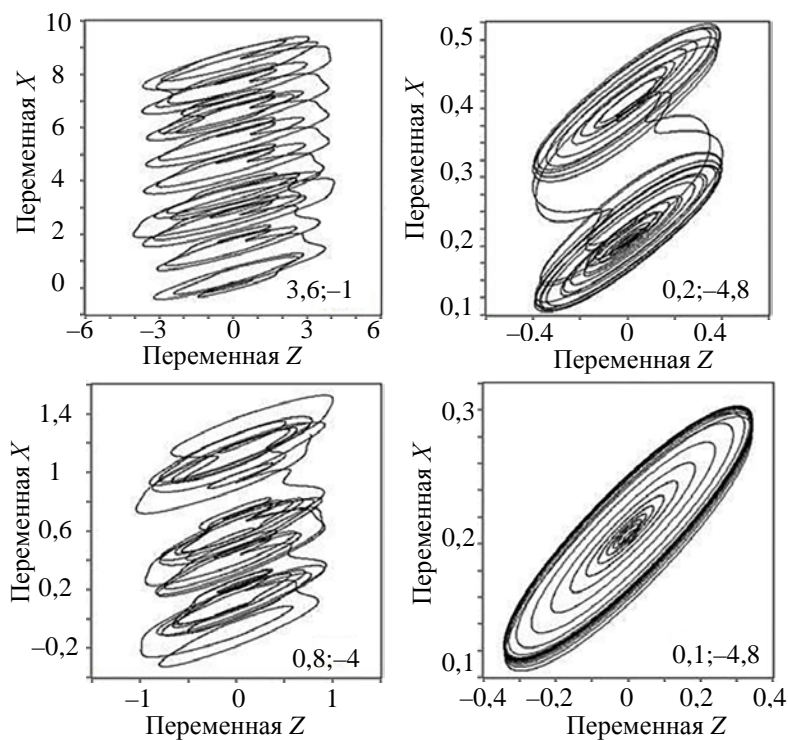


Рис. 1. Фазовые портреты системы (1) с разным числом витков аттрактора

Выбор численного метода на основе анализа производительности

Компьютерное моделирование хаотических систем предъявляет ряд дополнительных требований к методам численного интегрирования. Одним из важнейших критериев является вычислительная эффективность решателя. Чтобы ее оценить, построим зависимость времени, затраченного на решение, от достигаемой точности моделирования для некоторых методов интегрирования, применив их для решения системы (1). Сравним несколько экстраполяционных решателей ОДУ 8-го порядка алгебраической точности с переменным шагом и выберем метод с наилучшей производительностью.

Были исследованы явный алгоритм средней точки (EMP) и его модификация со сглаживающим шагом (метод Грэгга–Булирша–Штера [6], GBS). Среди неявных алгоритмов были рассмотрены неявный метод средней точки (IMP) и его линейно-неявная [7] версия (LIMP). Также исследованы композиционный полунеявный (CD) и полужявный (SED) Д-методы [8, 9], которые ранее показали хорошие результаты при моделировании нелинейных систем [9–12].

На рис. 2 показаны графики эффективности исследованных решателей ОДУ. Для всех алгоритмов использовалась двойная экстраполяционная последовательность $\{2, 4, 6, \dots\}$. Референсные значения для оценки ошибки интегрирования получены в среде Wolfram Mathematica с помощью метода переменного порядка и шага с точностью представления данных 1024 бита.

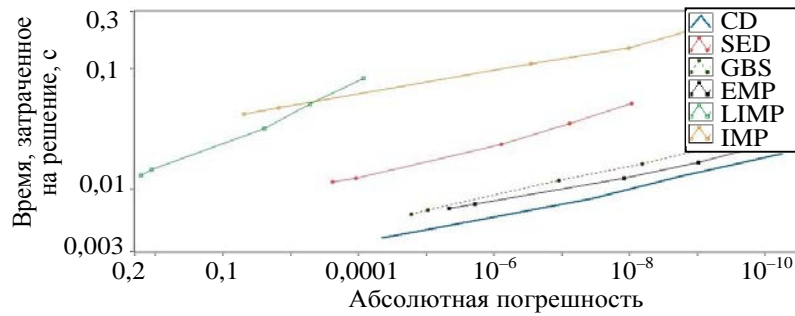


Рис. 2. Производительность методов 8-го порядка при решении задачи (1);
 $a = 0,25; b = 0,4; c = 2; d = 0,5; e = 0,5; g = 15; n = 0,01$

Из рис. 2 следует, что экстраполяционный решатель, основанный на полувязном методе CD, наиболее эффективен для конечно-разностной модели системы (1). Он используется в дальнейших экспериментах для ускорения расчетов при решении вычислительно затратной задачи построения многомерных бифуркационных диаграмм.

Исследование многовитковых аттракторов

А. Двухпараметрическая бифуркационная диаграмма, основанная на методе скользящего среднего. Бифуркационный анализ является распространенным способом качественного изучения динамических систем, в то же время он характеризуется ограничениями по количественной оценке меры хаоса. Для достоверного различения хаотических и периодических колебаний, как правило, вычисляются наибольшие показатели Ляпунова, исследуются ляпуновский спектр и фрактальная размерность. Однако ни один из перечисленных методов анализа не позволяет определить точную структуру аттрактора и отличить, к примеру, многовитковый аттрактор от многопетлевого. Также стоит отметить высокую вычислительную сложность подобных алгоритмов.

К примеру, в системе (1) из-за особенностей динамики при изменении параметров изменяется число витков в аттракторе [5]. Новые витки появляются в фазовом пространстве вдоль оси X . Это упрощает анализ, позволяя оценивать общую динамику системы только на основании оценки поведения переменной состояния x . По сути процедура эквивалентна анализу одномерного массива данных, полученных от реальной хаотической системы, что актуально в ряде практических приложений, например, диагностике заболеваний или изучении химических реакций.

Предлагаемый алгоритм оценки числа витков включает следующие шаги.

1. Динамическая система моделируется с требуемыми значениями параметров на всем промежутке времени, а затем рассматриваются только данные, описывающие динамику переменной x . Моделирование может выполняться как с фиксированным, так и с переменным шагом.

2. Начальный участок данных, содержащий переходный процесс системы, исключается из массива выходных значений, поскольку начальные условия могут не находиться на аттракторе.

3. Для оставшегося массива данных вычисляется скользящее среднее, позволяющее сгладить локальные колебания (рис. 3). Число усредняемых точек (размер окна) различается для методов интегрирования с постоянным и переменным шагом. Если данные получены методом с фиксированным шагом, число точек должно быть в диапазоне [100, 500].

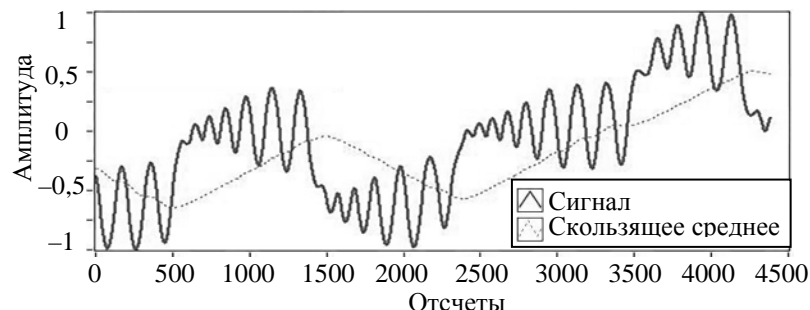


Рис. 3. Результат применения скользящего среднего с интервалом сглаживания 1000 точек к массиву, содержащему значения переменной состояния x

4. Для усредненной траектории строится сечение Пуанкаре с использованием критерия локальных максимумов.

5. Строится гистограмма сечения Пуанкаре, число столбцов гистограммы определяется пороговым значением. Полученное число режимов связано с количеством витков.

Результатом работы данного алгоритма является число, приблизительно равное числу витков в многовитковом аттракторе исследуемой хаотической системы. Значение линейно коррелировано с реальным числом витков и его можно масштабировать корректирующими коэффициентами, подбираемыми эмпирическим путем. Вычислив это значение для исследуемой системы при вариации двух параметров нелинейности, можно построить двумерную диаграмму – двухпараметрическую бифуркационную диаграмму, основанную на методе скользящего среднего.

Б. Рекуррентная диаграмма, основанная на методе кластеризации. Идея рекуррентного анализа базируется на теореме Пуанкаре о возвращении траекторий динамической системы. Она утверждает, что система окажется в состоянии, достаточно близком к начальным условиям, за конечное время [13]. В работе [14] предложен способ визуализации состояния динамической системы на двумерной рекуррентной диаграмме. Рекуррентные диаграммы многовитковых аттракторов имеют четко выраженные закономерности (рис. 4). Число витков в паттерне аттрактора коррелирует с числом витков в системе. Основываясь на этом свойстве, сформулируем алгоритм определения числа витков в многовитковом аттракторе с использованием рекуррентных диаграмм.

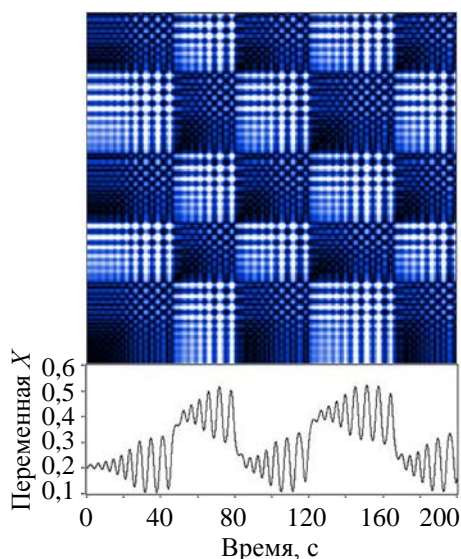


Рис. 4. Паттерны аттракторов системы с несколькими витками на рекуррентной диаграмме в сравнении с графиком переменной x во временной области

1. Решается система ОДУ в заданном интервале времени. Полученная последовательность может быть сокращена с помощью прореживания.

2. Каждый пиксел рекуррентной диаграммы вычисляется по формуле:

$$V_{ij} = |x_i - x_j|,$$

где V_{ij} – значение цвета пиксела, x_i и x_j – точки полученной последовательности (рис. 4).

3. Рассчитанные значения нормализуются и группируются в 32 подмножества. Число подмножеств в результирующей рекуррентной диаграмме коррелирует с количеством витков в многовитковом аттракторе.

Найденные значения находятся в прямой (в грубом приближении – практически линейной) зависимости от числа витков аттрактора исследуемой хаотической системы. Третий шаг алгоритма можно усовершенствовать, применяя более сложные способы анализа паттерна.

Обнаружение многовитковых аттракторов

Сравним точность обнаружения скрытых аттракторов в системе (1) рассмотренными выше алгоритмами с точностью некоторых классических статистических методов исследования колебательных систем [15]. Для сравнения были выбраны двухпараметрическая бифуркационная диаграмма на основе гистограммы максимальных значений переменных состояния и бифуркационная диаграмма на основе оценки ядерной плотности (KDE). В первом эксперименте были построены четыре диаграммы с вариацией параметров системы a и b при фиксированных значениях остальных параметров $c = 2, d = 0,5, e = 0,5, g = 15, n = 0,05$ (рис. 5). Цвет точки диаграммы коррелирован с числом витков аттрактора при заданном значении параметров нелинейности. Для каждой диаграммы введена собственная шкала, однако она линейна и может быть приведена к конкретному числу витков при помощи умножения на эмпирически определяемый коэффициент. При качественном сравнении алгоритмов абсолютные значения числа витков не имеют значения.

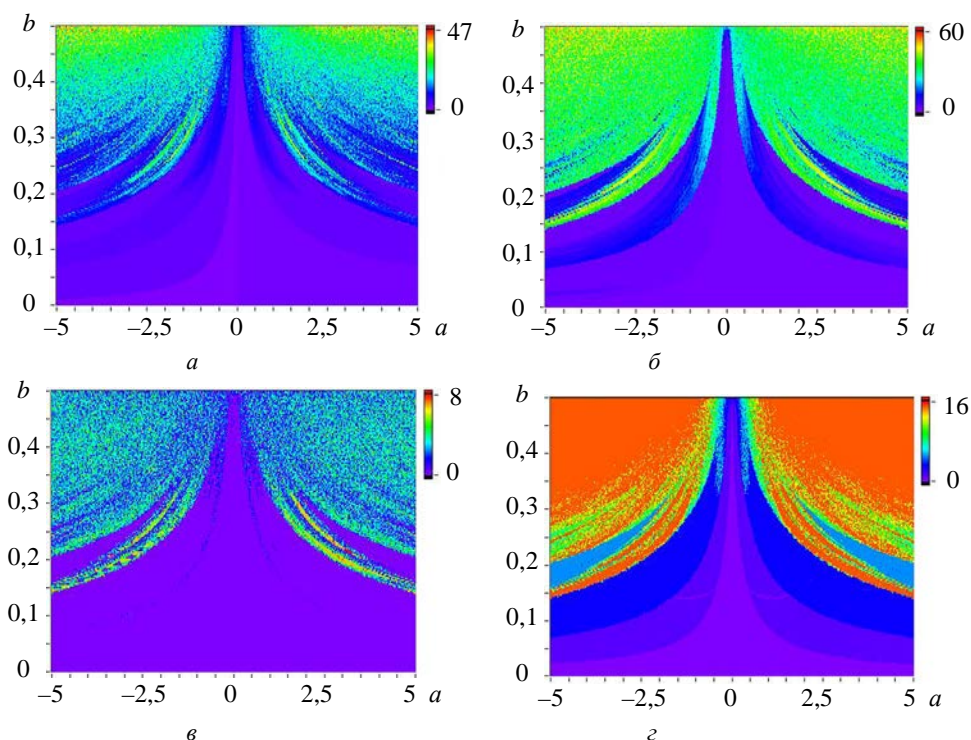


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы по параметрам a и b , полученные алгоритмом KDE (a), гистограммы ($б$), скользящего среднего ($в$), кластеризации рекуррентных диаграмм ($г$). Цвет соответствует числу витков аттрактора

Четыре исследуемых алгоритма в целом дали схожие изображения, что подтверждает их принципиальную пригодность для решения задачи. Отметим, что в диаграммах на основе методов KDE (a) и гистограмм ($б$) могут возникать артефакты, соответствующие режимам с несколькими витками, и невозможно корректно выделять одиночные витки на фоне многопетлевого аттрактора.

Во втором эксперименте были построены четыре диаграммы при вариации параметров системы c и d с зафиксированными значениями параметров a, b, e (рис. 6).

Можно заметить, что только диаграмма, полученная с помощью алгоритма скользящего среднего ($в$), не содержит артефакта в виде прямой $c = 0$.

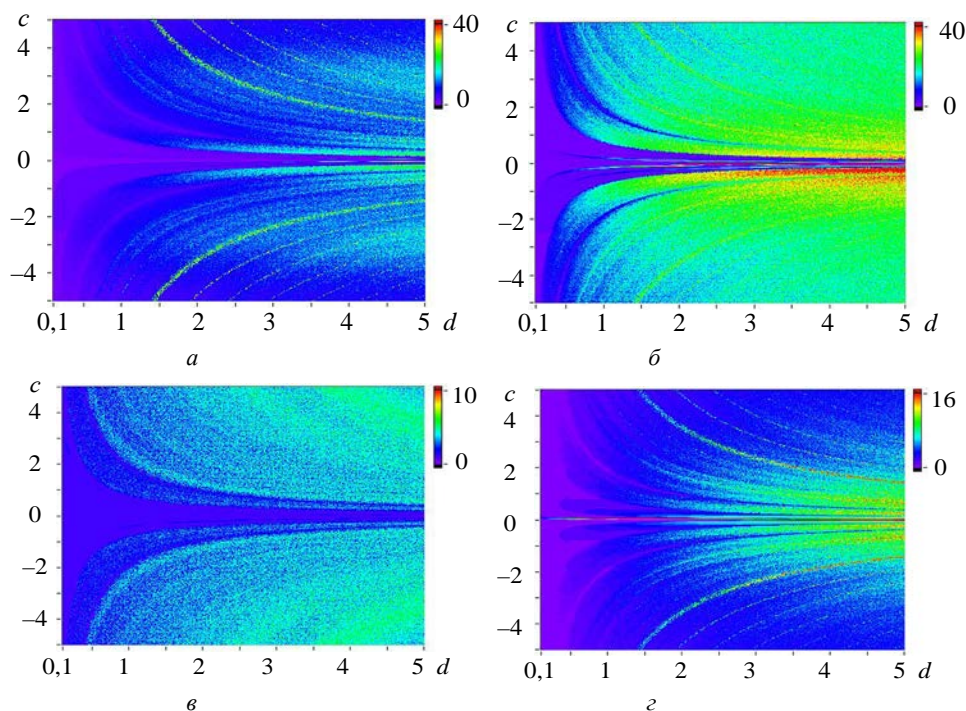


Рис. 6. Бифуркационные диаграммы по параметрам c и d , полученные алгоритмом KDE (a), гистограммы ($б$), скользящего среднего ($в$), кластеризации рекуррентных диаграмм ($г$). Цвет обозначает число обнаруженных витков аттрактора

Заключение

В ходе исследования проведен сравнительный анализ четырех алгоритмов определения числа витков аттрактора хаотической динамической системы. Использовалась простейшая цепь с мемристором [5], являющаяся показательным примером тестовой системы со скрытой динамикой. Предложены два метода определения многовитковых режимов в хаотических аттракторах. Первый метод основан на оценке числа витков путем применения скользящего среднего к массиву значений переменной состояния исследуемой системы. Второй метод основан на кластерном анализе рекуррентной диаграммы. Предложенные методы сопоставлены с известными методами построения двумерных бифуркационных диаграмм на основе гистограмм и алгоритма оценки ядерной плотности. С помощью каждого алгоритма построены двухпараметрические бифуркационные диаграммы с разрешением 1000×1000 пикселей по двум парам параметров нелинейности. Ускорить расчеты по результатам анализа вычислительной эффективности различных решателей обыкновенных дифференциальных уравнений позволит использование эффективного полуявного экстраполяционного метода CD 8-го порядка точности.

Бифуркационные диаграммы, полученные с помощью различных алгоритмов кластеризации режимов, показывают схожие результаты. В то же время алгоритм на основе скользящего среднего оказался наилучшим при обнаружении ложных многовитковых режимов, демонстрируя наименьшее число артефактов на диаграмме.

Отметим, что методы анализа на основе скользящего среднего и рекуррентных диаграмм обладают большими вычислительными затратами по сравнению с обычными статистическими методами.

Литература

1. Wang G., Cui M., Cai B., Wang X., Hu T. A chaotic oscillator based on HP memristor model // *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. Art. 561901. doi: 10.1155/2015/561901
2. Muthuswamy B., Chua L.O. Simplest chaotic circuit // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2010. V. 20. N 5. P. 1567–1580. doi: 10.1142/s0218127410027076
3. Homouz D., Abid Z., Mohammad B., Halawani Y., Jacobson M. Memristors for digital, memory and neuromorphic circuits // *Proc. 25th IEEE Int. Conf. on Microelectronics (ICM)*. Beirut, Lebanon, 2013. doi: 10.1109/icm.2013.6734970
4. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2013. V. 23. N 1. doi: 10.1142/s0218127413300024
5. Hu X., Liu Ch., Liu L., Yao Y. Multi-scroll hidden attractors and multiwing hidden attractors in a 5-dimensional memristive system // *Chinese Physics B*. 2017. V. 26. N 11. Art. 110502. doi: 10.1088/1674-1056/26/11/110502
6. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Berlin: Springer, 1993. 539 p. doi: 10.1007/978-3-540-78862-1
7. Schneider C. Analysis of the linearly implicit mid-point rule for differential-algebraic equations // *Electronic Transactions on Numerical Analysis*. 1993. N 1. P. 1–10.
8. Бутусов Д.Н., Каримов А.И., Андреев В.С. Компьютерное моделирование хаотических систем симметричными экстраполяционными методами // *Сборник докладов XVIII Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2015)*. Санкт-Петербург, 2015. Т. 1. С. 225–229.
9. Бутусов Д.Н., Андреев В.С., Пестерев Д.О. Композиционные полунявные методы моделирования хаотических систем // *Сборник докладов XIX Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2016)*. Санкт-Петербург, 2016. Т. 1. С. 339–342.
10. Бутусов Д.Н., Тутуева А.В., Пестерев Д.О., Островский В.Ю. Исследование хаотических генераторов псевдослучайных последовательностей на основе решателей ОДУ // *Программные системы и вычислительные методы*. 2017. № 4. С. 61–76. doi: 10.7256/2454-0714.2017.4.24786
11. Бутусов Д.Н., Федоров М.О., Чернышов А.А., Тутуева А.В., Рыбин В.Г. Исследование системы Декуана Ли с использованием полуявных методов интегрирования // *Сборник докладов XXI Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2018)*. Санкт-Петербург, 2018. Т. 1. С. 607–610.

References

1. Wang G., Cui M., Cai B., Wang X., Hu T. A chaotic oscillator based on HP memristor model. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, art. 561901. doi: 10.1155/2015/561901
2. Muthuswamy B., Chua L.O. Simplest chaotic circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2010, vol. 20, no. 5, pp. 1567–1580. doi: 10.1142/s0218127410027076
3. Homouz D., Abid Z., Mohammad B., Halawani Y., Jacobson M. Memristors for digital, memory and neuromorphic circuits. *Proc. 25th IEEE Int. Conf. on Microelectronics, ICM*. Beirut, Lebanon, 2013. doi: 10.1109/icm.2013.6734970
4. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert–Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractor in Chua circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2013, vol. 23, no. 1. doi: 10.1142/s0218127413300024
5. Hu X., Liu Ch., Liu L., Yao Y. Multi-scroll hidden attractors and multiwing hidden attractors in a 5-dimensional memristive system. *Chinese Physics B*, 2017, vol. 26, no. 11, art. 110502. doi: 10.1088/1674-1056/26/11/110502
6. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations I*. Berlin, Springer, 1993, 539 p. doi: 10.1007/978-3-540-78862-1
7. Schneider C. Analysis of the linearly implicit mid-point rule for differential-algebraic equations. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 1993, no. 1, pp. 1–10.
8. Butusov D.N., Karimov A.I., Andreev V.S. Computer simulation of chaotic systems with symmetric extrapolation methods. *Proc. XVIII Int. Conf. on Soft Computing and Measurement, SCM*. St. Petersburg, 2015, vol. 1, pp. 225–229. (in Russian)
9. Butusov D.N., Andreev V.S., Pesterev D.O. Semi-implicit composition methods of chaotic systems simulation. *Proc. XIX Int. Conf. on Soft Computing and Measurement, SCM*. St. Petersburg, 2016, vol. 1, pp. 339–342. (in Russian)
10. Butusov D.N., Tutueva A.V., Pesterev D.O., Ostrovskii V.Y. The study of chaotic pseudo-random sequence generator on the basis of the ODE solvers. *Software Systems and Computational Methods*, 2017, no. 4, pp. 61–76. (in Russian) doi: 10.7256/2454-0714.2017.4.24786
11. Butusov D.N., Fedorov M.O., Chernyshov A.A., Tutueva A.V., Rybin V.G. Semi-implicit integration of Dequan Li chaotic system. *Proc. XXI Int. Conf. on Soft Computing and Measurement, SCM*. St. Petersburg, 2018, vol. 1, pp. 607–610. (in Russian)
12. Butusov D.N., Ostrovskii V.Y., Tutueva A.V., Savel'ev A.O. Comparing the algorithms of multiparametric bifurcation analysis. *Proc. XX Int. Conf. on Soft Computing and Measurement, SCM*. St. Petersburg, 2017, vol. 1, pp. 396–399. (in Russian)

12. Бутусов Д.Н., Островский В.Ю., Тутуева А.В., Савельев А.О. Сравнение алгоритмов мультипараметрического бифуркационного анализа // Сборник докладов XX Международной конференции по мягким вычислениям и измерениям (SCM-2017). Санкт-Петербург, 2017. Т. 1. С. 396–399.
13. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique // Acta Mathematica. 1890. V. 13. N 1-2.
14. Eckmann J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems // Europhysics Letters. 1987. V. 4. N 9. P. 973–977. doi: 10.1209/0295-5075/4/9/004
15. Marwan N., Romano M.C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems // Physics Reports. 2007. V. 438. N 5-6. P. 237–329. doi: 10.1016/j.physrep.2006.11.001
13. Poincaré H. Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. *Acta Mathematica*, 1890, vol. 13, no. 1-2.
14. Eckmann J.P., Kamphorst S.O., Ruelle D. Recurrence plots of dynamical systems. *Europhysics Letters*, 1987, vol. 4, no. 9, pp. 973–977. doi: 10.1209/0295-5075/4/9/004
15. Marwan N., Romano M.C., Thiel M., Kurths J. Recurrence plots for the analysis of complex systems. *Physics Reports*, 2007, vol. 438, no. 5-6, pp. 237–329. doi: 10.1016/j.physrep.2006.11.001

Авторы

Бутусов Денис Николаевич – кандидат технических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация, Scopus ID: 54388644800, ORCID ID: 0000-0002-8941-4220, butusovdn@mail.ru

Кобызов Николай Павлович – студент, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0003-4300-3386, kobyzev.n@gmail.com

Пестерев Дмитрий Олегович – техник, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация, Scopus ID: 57191625667, ORCID ID: 0000-0001-5119-2274, dopesterev@etu.ru

Тутуева Александра Вадимовна – ассистент, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация, Scopus ID: 56703454900, ORCID ID: 0000-0002-9747-1962, avtutueva@etu.ru

Рыбин Вячеслав Геннадьевич – программист, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ», Санкт-Петербург, 197376, Российская Федерация, Scopus ID: 57195325268, ORCID ID: 0000-0002-6515-0224, vgrybin@etu.ru

Authors

Denis N. Butusov – PhD, Associate Professor, Saint Petersburg Electrotechnical University (ETU "LETI"), Saint Petersburg, 197376, Russian Federation, Scopus ID: 54388644800, ORCID ID: 0000-0002-8941-4220, butusovdn@mail.ru

Nikolay P. Kobyzev – student, Saint Petersburg Electrotechnical University (ETU "LETI"), Saint Petersburg, 197376, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0003-4300-3386, kobyzev.n@gmail.com

Dmitriy O. Pesterev – Saint Petersburg Electrotechnical University (ETU "LETI"), Saint Petersburg, 197376, Russian Federation, Scopus ID: 57191625667, ORCID ID: 0000-0001-5119-2274, dopesterev@etu.ru

Aleksandra V. Tutueva – assistant, Saint Petersburg Electrotechnical University (ETU "LETI"), Saint Petersburg, 197376, Russian Federation, Scopus ID: 56703454900, ORCID ID: 0000-0002-9747-1962, avtutueva@etu.ru

Vyacheslav G. Rybin – software engineer, Saint Petersburg Electrotechnical University (ETU "LETI"), Saint Petersburg, 197376, Russian Federation, Scopus ID: 57195325268, ORCID ID: 0000-0002-6515-0224, vgrybin@etu.ru