

УДК 534.1:539.3

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-155-161

МОДЕЛИРОВАНИЕ СОСТОЯНИЯ ПОВЕРХНОСТИ МЕМБРАНЫ ПРИ ТОЧЕЧНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

А.Г. Коробейников^{a,b}, М.Е. Калинкина^b, В.Л. Ткалич^b, О.И. Пирожникова^b,
А.Ю. Гришенцев^b

^a Санкт-Петербургский филиал учреждения Российской академии наук «Институт Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН», Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация

^b Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация

Адрес для переписки: Korobeynikov_A_G@mail.ru

Информация о статье

Поступила в редакцию 27.11.19, принята к печати 15.01.20

Язык статьи — русский

Ссылка для цитирования: Коробейников А.Г., Калинкина М.Е., Ткалич В.Л., Пирожникова О.И., Гришенцев А.Ю. Моделирование состояния поверхности мембраны при точечном воздействии // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 1. № 1. С. 155–161. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-155-161

Аннотация

Предмет исследования. Рассмотрена задача нахождения аналитического решения математической модели и компьютерного моделирования процесса влияния сосредоточенного механического воздействия в заданной точке нагружаемого упругого тела. Предложены адекватные математическая модель и метод, обеспечивающие минимальное время решения на компьютере. В качестве объекта исследования выбрана абстрагированная прямоугольная однородная пластина-полоса с закрепленными краями, нагружаемая сосредоточенным воздействием и имеющая пренебрежимо малую жесткость на изгиб. Абстракция заключается в концентрации основных свойств мембраны в одном параметре — скорости распространения упругих волн с отсутствием учета их затухания. Математическая модель объекта включает в себя однородное двумерное волновое уравнение с неоднородными начальными и однородными граничными условиями. Сосредоточенное воздействие задавалось в начальных условиях при помощи дельта-функции Дирака. **Метод.** Представленное математическое решение выполнено с применением метода Фурье и учитывает ортогональность в пространстве 12 синусоидальных функций, свойств дельта-функций Дирака и нулевые граничные условия. Решение обеспечивает минимальное время вычисления с применением компьютерных программ. **Основные результаты.** Представлен процесс вывода аналитического решения для выбранной математической модели сосредоточенного воздействия в конкретной точке прямоугольной однородной пластины-полосы с закрепленными краями. Представленное решение легко реализуется на программном уровне. Модель позволяет исследовать поведение объекта при различных входных данных. Компьютерное моделирование выполнено с применением системы компьютерной алгебры Maple. Результаты моделирования влияния заданного точечного воздействия на конкретную однородную мембрану-полосу представлены в графическом виде. Показано изменение состояний поверхности мембраны в течение времени в случае нахождения точки воздействия не в центре мембраны. **Практическая значимость.** Представленное аналитическое решение позволяет фактически в режиме реального времени исследовать динамику состояний поверхности мембраны под воздействием известной нагрузки в зависимости от входных данных. В процессе моделирования отсутствует необходимость поиска решения двумерного волнового уравнения.

Ключевые слова

волновое уравнение, дельта-функция Дирака, сила нагружения, метод Фурье, однородная мембрана, моделирование, Maple

Благодарности

Работа подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках договора № 05.605.21.0189.

MODELING OF MEMBRANE SURFACE STATE UNDER POINT IMPACT

A.G. Korobeynikov^{a,b}, M.E. Kalinkina^b, V.L. Tklich^b, O.I. Pirozhnikova^b, A.Yu. Grishentsev^b^a Saint Petersburg Branch of Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation, Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation^b ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation

Corresponding author: Korobeynikov_A_G@mail.ru

Article info

Received 27.11.19, accepted 15.01.20

Article in Russian

For citation: Korobeynikov A.G., Kalinkina M.E., Tklich V.L., Pirozhnikova O.I., Grishentsev A.Yu. Modeling of membrane surface state under point impact. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 1, pp. 155–161 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-1-155-161

Abstract

Subject of Research. We consider the problem of finding an analytical solution to a mathematical model and computer-generated simulation of the concentrated mechanical stress impact at a given point of a loaded elastic body. An adequate mathematical model and a method providing minimum computer-time solution is proposed. An abstract rectangular homogeneous plate-strip is chosen as the object of study. Its edges are fixed and it is loaded by a concentrated action and has a negligible bending stiffness. Abstraction lies in the concentration of membrane basic properties in one parameter — the propagation velocity of elastic waves with no consideration for their attenuation. The object mathematical model is a homogeneous two-dimensional wave equation with inhomogeneous initial and homogeneous boundary conditions. The concentrated action is defined by the Dirac delta function in the initial conditions. **Method.** The proposed mathematical solution was performed by Fourier method taking into account the orthogonality in L_2 space of sinusoidal functions, the properties of Dirac delta functions and zero boundary conditions. The solution provides minimum calculation time applying computer programs. **Main Results.** The paper presents the process of deriving an analytical solution for the selected mathematical model of concentrated exposure at a specific point of a rectangular homogeneous plate-strip with fixed edges. The resulting solution can be easily programmed. The model gives the possibility to simulate the object behavior with different input data. Modeling is performed using Maple computer algebra system. The model estimated values of a given point effect on a specific homogeneous membrane-strip are presented in a graphical form. The graphs show how the membrane surface state changes over time if the exposure point is not in the membrane center. **Practical Relevance.** The presented results in the form of an analytical solution make it possible to study real-time dynamics of the membrane surface states under the impact of a known load depending on the input data. The modeling process is characterized by the lack of necessity to search for a solution to the two-dimensional wave equation.

Keywords

wave equation, Dirac delta function, loading force, Fourier method, homogeneous membrane, modeling, Maple

Acknowledgements

The paper was prepared with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation under the agreement No. 05.605.21.0189.

Введение

Анализ стационарных и нестационарных колебаний элементов упругих тел, таких как мембраны, формально представляет решение прямой задачи математической физики, а именно нахождение решений двумерного волнового уравнения [1–4].

Огромный вклад в исследования стационарных и нестационарных колебаний круглых и прямоугольных мембранных элементов внесен отечественными учеными: С.П. Тимошенко, И.А. Поповым, Л.Е. Андреевой и др. [5, 6]. Они исследовали решения как прямых, так и обратных задач колебаний мембран при различных режимах нагружения.

Вместе с тем наиболее распространенные решения подобных задач осуществляются с использованием численных методов. При этом затрачивается достаточно много машинного времени. Однако возникают случаи, когда требуется проводить качественную оценку изменения состояния поверхности мембраны за небольшое время. При этом можно пренебречь некоторыми эффектами в мембране (абстрагироваться). В таких случаях появляется возможность нахождения аналитического

решения. Именно такой случай рассмотрен в представляемой работе.

В данной работе в качестве объекта исследования выбрана прямоугольная однородная пластина-полоса с закрепленными границами и имеющая пренебрежимо малую жесткость на изгиб [7, 8]. В качестве внешней силы будем брать сосредоточенное воздействие в конкретной точке [9]. Инструментарием для моделирования будет служить система компьютерной алгебры Maple, при помощи которой можно решать задачи из различных предметных областей [10–13].

Построение аналитического решения

Задачу математического моделирования колебаний однородной мембраны под воздействием известной силы нагружения можно ставить и решать посредством разных методов [9, 14]. В данной работе рассматривается следующая постановка задачи.

Имеется идеализированная прямоугольная однородная пластина-полоса размером $l_x \times l_y$ (l_x — расстояние по оси Ox , l_y — расстояние по оси Oy) с закрепленными краями, нагружаемая сосредоточенным воздействием

в конкретной точке, и имеющая пренебрежимо малую жесткость на изгиб. Идеализация состоит в концентрации основных свойств мембраны в одном параметре — скорости распространения упругих волн с отсутствием учета их затухания. Требуется контролировать изменения поверхности мембраны на заданном промежутке времени. Математическая модель объекта в такой постановке представляет собой однородное двумерное волновое уравнение с неоднородными начальными и однородными граничными условиями.

Дадим формальную постановку задачи. Введем следующие обозначения:

— $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$, т. е. множество D является плоской областью с границей Γ ;

— $\Gamma = \bigcup_{i=1}^4 \Gamma_i$ — самонепересекающийся контур, где $\Gamma_1 = \{(0, y) | 0 \leq y \leq l_y\}$; $\Gamma_2 = \{(x, l_y) | 0 \leq x \leq l_x\}$; $\Gamma_3 = \{(l_x, y) | 0 \leq y \leq l_y\}$; $\Gamma_4 = \{(x, 0) | 0 \leq x \leq l_x\}$.

Рассмотрим прямоугольную мембрану, ограниченную прямыми $x = 0, x = l_x$ и $y = 0, y = l_y$ (рис. 1).

Задача о нестационарных колебаниях мембранного элемента полосы под воздействием силы нагружения F на точку с координатами (x_0, y_0) сводится к решению двумерного волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} - v_{wave}^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

при ненулевых начальных и нулевых граничных условиях:

$$\begin{cases} u(x, y, t)|_{t=0} = 0, & u_t(x, y, t)|_{t=0} = F(x, y) \\ u(0, y, t) = u(l_x, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, l_y, t) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где $(x, y) \in D, t \in [0, \infty)$; $u(x, y, t)$ — вертикальное перемещение точек в мембранном элементе-полосе; v_{wave} — скорость деформационной волны; $F(x, y)$ — сила нагружения, действующая на точку с координатами (x_0, y_0) . Для рассматриваемой задачи это можно записать следующим образом:

$$F(x, y) = F_0 \delta(x - x_0, y - y_0),$$

где F_0 — постоянное во времени воздействие; $\delta(x, y)$ — дельта-функция Дирака [2].

Сначала найдем общее решение, удовлетворяющее нулевым граничным условиям. Для этого, в соответствии с методом Фурье, представим искомое решение в виде:

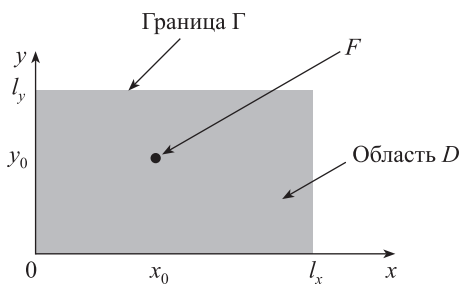


Рис. 1. Схематический исходный вид прямоугольной мембраны под воздействием силы нагружения F на точку с координатами (x_0, y_0)

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t), \quad (3)$$

где $X(x)$ — искомая функция, зависящая только от переменной x ; $Y(y)$ — искомая функция, зависящая только от переменной y ; $T(t)$ — искомая функция, зависящая только от переменной t .

В этом случае, с учетом (2), имеем

$$X(0) = X(l_x) = Y(0) = Y(l_y) = 0.$$

Продифференцируем (3) по каждой переменной:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial X(x)}{\partial x} Y(y) T(t);$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial y} = X(x) \frac{\partial Y(y)}{\partial y} T(t);$$

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = X(x) Y(y) \frac{\partial T(t)}{\partial t}.$$

Еще раз продифференцируем эти выражения по каждой переменной:

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) T(t);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} = X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} T(t);$$

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2} = X(x) Y(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}.$$

Подставив эти выражения в (1), получим:

$$X(x) Y(y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} - v_{wave}^2 \left(\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y) T(t) + X(x) \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} T(t) \right) = 0.$$

Разделим это выражение на $X(x)Y(y)T(t)$. Получим:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v_{wave}^2 \left(\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \right).$$

В этом выражении левая часть не зависит от переменных x и y , а правая — не зависит от t , поэтому равенство может соблюдаться тогда и только тогда, когда левая и правая части являются константами. Таким образом:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = v_{wave}^2 \left(\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} \right) = \text{const.}$$

Рассмотрим сумму:

$$\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}.$$

Ввиду того, что первое слагаемое зависит только от x , а второе — только от y , то сумма является постоянной только в случае постоянства каждого из слагаемых. Введем обозначения: $\lambda^2 = -\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2}$;

$$\eta^2 = -\frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2}.$$

Знак минус выбран для выполнения (2).

В результате для определения $X(x)$, $Y(y)$ и $T(t)$, получили три обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} + \lambda^2 X(x) = 0; X(0) = X(l_x) = 0; \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} + \eta^2 Y(y) = 0; Y(0) = Y(l_y) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + v_{wave}^2 (\lambda^2 + \eta^2) T(t) = 0. \quad (6)$$

Решения (4) и (5) имеют вид:

$$X(x) = C_1 \sin(\lambda x) \text{ и } Y(y) = C_2 \sin(\eta y), \quad (7)$$

где C_1 и C_2 — неизвестные константы.

Для удовлетворения граничных условий (4) и (5) необходимо выполнение следующих условий:

$$\lambda l_x = \pi k_x; \eta l_y = \pi k_y,$$

где $k_x, k_y \in Z^+, Z^+$ — множество целых положительных чисел.

Таким образом $\lambda = \frac{\pi k_x}{l_x}$, $\eta = \frac{\pi k_y}{l_y}$. Для того, чтобы явно показать зависимость λ от k_x и η от k_y , введем обозначения: $\lambda_{k_x} = \lambda$ и $\eta_{k_y} = \eta$.

Таким образом, каждой паре собственных чисел $(\lambda_{k_x}, \eta_{k_y})$ сопоставлена пара собственных функций

$$X(x) = \sin(\lambda_{k_x} x) = \sin\left(\frac{\pi k_x}{l_x} x\right)$$

и

$$Y(y) = \sin(\eta_{k_y} y) = \sin\left(\frac{\pi k_y}{l_y} y\right).$$

Рассмотрим уравнение (6). Для любой пары собственных чисел $(\lambda_{k_x}, \eta_{k_y})$ оно будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \pi^2 v_{wave}^2 \left(\frac{k_x^2}{l_x^2} + \frac{k_y^2}{l_y^2} \right) T(t) = 0. \quad (8)$$

Решение уравнения (8) удобно обозначить через $T_{k_x, k_y}(t)$. Произвольные постоянные, которые входят в это общее решение, обозначим через a_{k_x, k_y} и b_{k_x, k_y} .

Таким образом, общее решение (8) имеет вид:

$$T_{k_x, k_y}(t) = a_{k_x, k_y} \cos(\omega_{k_x, k_y} t) + b_{k_x, k_y} \sin(\omega_{k_x, k_y} t), \quad (9)$$

где $\omega_{k_x, k_y} t = \pi v_{wave} \sqrt{\frac{k_x^2}{l_x^2} + \frac{k_y^2}{l_y^2}}$ — собственная частота колебаний мембраны.

Образум из (7) и (9) частное решение (1) следующим образом:

$$u_{k_x, k_y}(x, y, t) = (a_{k_x, k_y} \cos(\omega_{k_x, k_y} t) + b_{k_x, k_y} \sin(\omega_{k_x, k_y} t)) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y). \quad (10)$$

А теперь конкретизируем общее решение (3) с целью удовлетворения (1) начальным условиям (2). Решение будем искать в виде бесконечного двойного ряда, составленного из частных решений (10):

$$u(x, y, t) = \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} (a_{k_x, k_y} \cos(\omega_{k_x, k_y} t) + b_{k_x, k_y} \sin(\omega_{k_x, k_y} t)) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y). \quad (11)$$

Учитывая начальные условия (2), получим:

$$\begin{aligned} u(x, y, 0) &= \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} (a_{k_x, k_y} \cos(\omega_{k_x, k_y} 0) + b_{k_x, k_y} \sin(\omega_{k_x, k_y} 0)) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y) = \\ &= \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} a_{k_x, k_y} \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $a_{k_x, k_y} = 0$ при любых значениях индексов и (11) равно:

$$u(x, y, t) = \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} (b_{k_x, k_y} \sin(\omega_{k_x, k_y} t)) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y). \quad (12)$$

Найдем производную (12) по t и учтем начальные условия (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} &= \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} (b_{k_x, k_y} \cos(\omega_{k_x, k_y} t)) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y); \\ \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} &= \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} b_{k_x, k_y} \omega_{k_x, k_y} \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y) = \\ &= F(x, y) = F_0 \delta(x - x_0, y - y_0). \end{aligned}$$

Теперь, воспользовавшись свойством дельта-функции Дирака [2], найдем b_{k_x, k_y} :

$$\begin{aligned} b_{k_x, k_y} &= \frac{4}{l_x l_y \omega_{k_x, k_y}} \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} F_0 \delta(x - x_0, y - y_0) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y) dx dy = \\ &= \frac{4 F_0 \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y)}{l_x l_y \omega_{k_x, k_y}}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем следующий общий вид решения для (1):

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{4 F_0}{l_x l_y} \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_{k_x, k_y} t)}{\omega_{k_x, k_y}} \times \\ &\times \sin(\lambda_{k_x} x_0) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y_0) \sin(\eta_{k_y} y). \end{aligned} \quad (13)$$

Для проверки полученного решения проверим выполнение (1) и (2). Для этого подставим (13) в (1). Имеем:

$$\begin{aligned} & - \frac{4 F_0}{l_x l_y} \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_{k_x, k_y}} \times \\ & \times \sin(\omega_{k_x, k_y} t) \sin(\lambda_{k_y} x_0) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y_0) \sin(\eta_{k_y} y) - \\ & - v_{wave} \frac{4 \pi^2 F_0}{l_x l_y} \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \omega_{k_x, k_y} \times \\ & \times \sin(\omega_{k_x, k_y} t) \sin(\lambda_{k_y} x_0) \sin(\lambda_{k_x} x) \sin(\eta_{k_y} y_0) \sin(\eta_{k_y} y) \times \\ & \times \left(\frac{k_x^2}{l_x^2} + \frac{k_y^2}{l_y^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Во втором слагаемом учтено определение ω_{k_x, k_y} . Далее:

$$\begin{aligned}
 u(x, y, 0) &= \frac{4F_0}{l_x l_y} \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \frac{\sin(\omega_{k_x, k_y} 0)}{\omega_{k_x, k_y}} \times \\
 &\times \sin(\lambda_{k_y} x_0) \sin(\lambda_{k_y} x) \sin(\eta_{k_x} y_0) \sin(\eta_{k_x} y) = 0. \\
 \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} &= \frac{4F_0}{l_x l_y} \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \frac{\omega_{k_x, k_y} \cos(\omega_{k_x, k_y} t)}{\omega_{k_x, k_y}} \times \\
 &\times \sin(\lambda_{k_y} x_0) \sin(\lambda_{k_y} x) \sin(\eta_{k_x} y_0) \sin(\eta_{k_x} y) = \\
 &= \frac{4F_0}{l_x l_y} \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \cos(\omega_{k_x, k_y} t) \sin(\lambda_{k_y} x_0) \sin(\lambda_{k_y} x) \sin(\eta_{k_x} y_0) \sin(\eta_{k_x} y); \\
 \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} \Big|_{t=0} &= \\
 &= \frac{4F_0}{l_x l_y} \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \sin(\lambda_{k_y} x_0) \sin(\lambda_{k_y} x) \sin(\eta_{k_x} y_0) \sin(\eta_{k_x} y).
 \end{aligned}$$

Учитывая ортогональность системы функций $\sin(\lambda_{k_x} x_0) \sin(\lambda_{k_x} x)$ и $\sin(\eta_{k_y} y_0) \sin(\eta_{k_y} y)$ в пространстве l_2 [10], имеем:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k_x=1}^{\infty} \sum_{k_y=1}^{\infty} \sin(\lambda_{k_y} x_0) \sin(\lambda_{k_y} x) \sin(\eta_{k_x} y_0) \sin(\eta_{k_x} y) &= \\
 &= \begin{cases} 0, & (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ \frac{4}{l_x l_y} & (x, y) = (x_0, y_0) \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0, & (x, y) \neq (x_0, y_0) \\ F_0 & (x, y) = (x_0, y_0) \end{cases}.$$

Таким образом (13) является решением (1) с (2).

Результаты моделирования

Моделирование происходило при помощи Maple в мультикластерной системе [11, 12, 15, 16]. При моделировании прогиба мембраны были взяты следующие исходные данные: скорость распространения деформационной волны $v_{wave} = 2800$ м/с; длина мембраны по оси $x: l_x = 0,6$ мм; по оси $y: l_y = 0,8$ мм; $F_0 = 5$ н; $(x_0, y_0) = (0,25, 0,48)$ мм.

На рис. 2 представлены состояния поверхности мембраны в момент времени t , равном: 0; 0,00001; 0,00002; 0,00004; 1,1; 10 с. По оси z представлены отклонения точек поверхности мембраны от нулевого положения.

На рис. 2, б, е видна динамика поведения поверхности мембраны. Видно, что в первоначальный период флуктуации на поверхности распространяются от точки приложения воздействия, а затем процесс становится похож на хаотический. Это связано с яв-

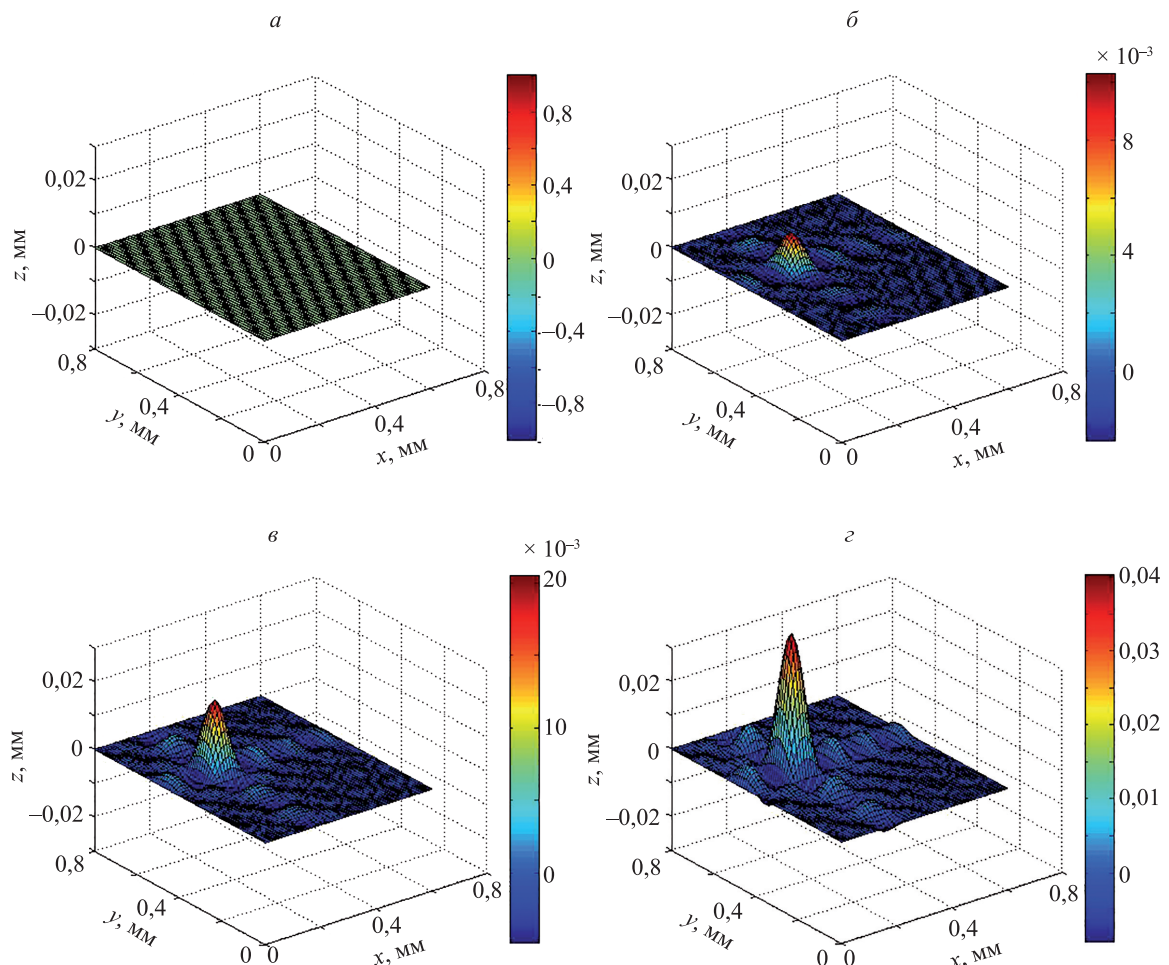


Рис. 2. Состояние поверхности мембраны в момент времени t , равном: 0 с (а); 0,00001 с (б); 0,00002 с (в); 0,00004 с (г)

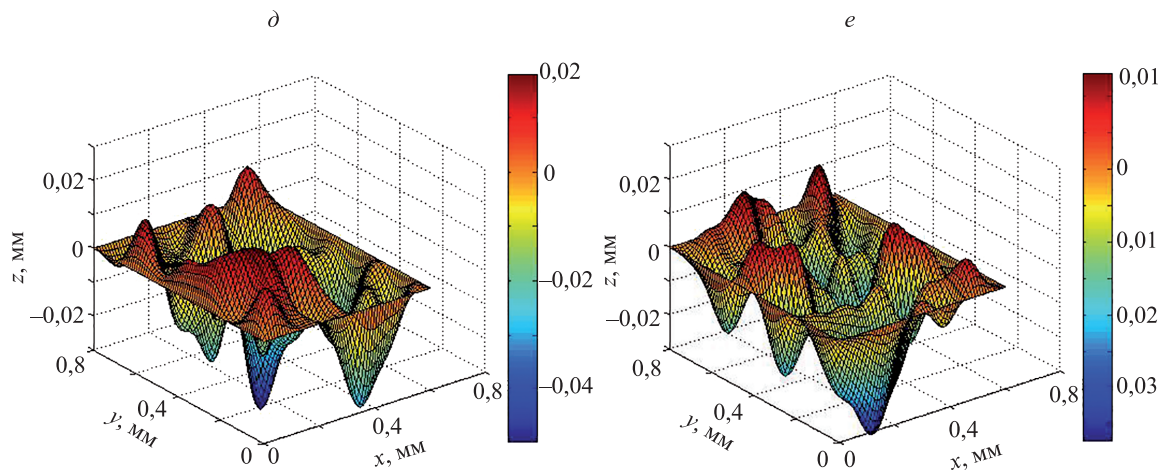


Рис. 2. Продолжение. Состояние поверхности мембраны в момент времени t , равном: 1,1 с (д); 10 с (е)

лением суперпозиции волн. На рис. 2, б, г видно, что несимметричность точки приложения воздействия, приводит к несимметричной картине динамических состояний мембраны. На рис. 2, д, е видно, что с течением времени амплитуда волн уменьшается до некоторой величины.

Заключение

В работе на конкретном примере рассмотрена задача нахождения аналитического решения математической модели и компьютерное моделирование процесса влияния сосредоточенного механического воздействия в заданной точке нагружаемого упругого тела. В качестве упругого тела выбрана идеализированная прямоугольная однородная пластина-полоса с закрепленными краями и имеющая пренебрежимо

малую жесткость на изгиб. Математическая модель объекта представляет собой однородное двумерное волновое уравнение с неоднородными начальными и однородными граничными условиями. Показан вывод аналитического решения данной математической модели, представляющую прямую задачу математической физики о расчете влияния сосредоточенного воздействия в заданной точке нагружаемого упругого тела. На базе этого решения представлены в графическом виде результаты моделирования, и проанализировано динамическое поведение поверхности мембраны. Необходимо отметить, что отсутствие в процессе моделирования необходимости поиска решения двумерного волнового уравнения позволяет очень быстро получать результаты. Вследствие этого анализ динамического состояния поверхности мембраны можно проводить за небольшое время.

Литература

1. Боговский М.Е. Уравнения математической физики: учебное пособие. М.: МФТИ, 2019. 106 с.
2. Биджиев Р.Х., Шумилова Е.Ю. Дельта-функция Дирака: элементы теории обобщенных функций // Университетская наука. 2019. № 2(8). С. 124–127.
3. Özçağ E. On powers of the compositions involving Dirac-delta and infinitely differentiable functions // Results in Mathematics. 2018. V. 73. N 1. P. 6. doi: 10.1007/s00025-018-0766-0
4. Троенко С.Ю., Поваляев П.П. Разработка методов демпфирования колебаний с помощью точечных стационарных демпферов. Часть 2. Колебания плоской мембраны // Системный администратор. 2018. № 7-8(188-189). С. 110–115.
5. Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле / пер. с англ. Л.Г. Корнейчука; под ред. Э.И. Григолоука. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
6. Андреева Л.Е. Упругие элементы приборов. М.: Машиностроение, 1981. 391 с.
7. Лукин А.В., Попов И.А., Скубов Д.Ю. Нелинейная динамика и устойчивость элементов микросистемной техники // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2017. Т. 17. № 6. С. 1107–1115. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115
8. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Jaber N., Younis M.I. Mass and position determination in MEMS mass sensors: a theoretical and an experimental investigation // Journal of Micromechanics and Microengineering. 2016. V. 26. N 10. P. 105009. doi: 10.1088/0960-1317/26/10/105009

References

1. Bogovskii M.E. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, MIPT, 2019, 106 p. (in Russian)
2. Bidjiev R.H., Shumilova E.Y. Dirac delta function: elements of the theory of generalized functions. *University Science*, 2019, no. 2(8), pp. 124–127. (in Russian)
3. Özçağ E. On powers of the compositions involving Dirac-delta and infinitely differentiable functions. *Results in Mathematics*, 2018, vol. 73, no. 1, pp. 6. doi: 10.1007/s00025-018-0766-0
4. Troenko S.Yu., Povalyayev P.P. Development of vibration damping methods using point stationary dampers. Part 2. Fluctuations of a flat membrane. *Sistemnyy administrator*, 2018, no. 7-8(188-189), pp. 110–115. (in Russian)
5. Timoshenko S., Young D.H., Weaver W., jr. *Vibration problems in engineering*. Wiley, 1974, 521 p.
6. Andreeva L.E. *Instrument Elastic Elements*. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1981, 391 p. (in Russian)
7. Lukin A.V., Popov I.A., Skubov D.Yu. Nonlinear dynamics and stability of microsystems engineering elements. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 6, pp. 1107–1115. (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-6-1107-1115
8. Bouchaala A., Nayfeh A.H., Jaber N., Younis M.I. Mass and position determination in MEMS mass sensors: a theoretical and an experimental investigation. *Journal of Micromechanics and Microengineering*, 2016, vol. 26, no. 10, pp. 105009. doi: 10.1088/0960-1317/26/10/105009

9. Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V. Active damping of nonstationary vibrations of a rectangular plate under impulse loading // *Journal of Vibration and Control*. 2013. V. 19. N 10. P. 1514–1523. doi: 10.1177/1077546312446625
10. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Декомпозиция n-мерных цифровых сигналов по базису прямоугольных всплесков // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2012. № 4(80). С. 75–79.
11. Коробейников А.Г., Гришенцев А.Ю. Разработка и исследование многомерных математических моделей с использованием систем компьютерной алгебры. СПб: НИУ ИТМО, 2014. 100 с.
12. Коробейников А.Г. Проектирование и исследование математических моделей в средах MATLAB и Maple. СПб: СПбГУ ИТМО, 2012. 160 с.
13. Коробейников А.Г., Кутузов И.М. Алгоритм обфускации // *NB: Кибернетика и программирование*. 2013. № 3. С. 1–8. doi: 10.7256/2306-4196.2013.3.935
14. Лабковская Р.Я., Козлов А.С., Пирожникова О.И., Коробейников А.Г. Моделирование динамики чувствительных элементов герконов систем управления // *NB: Кибернетика и программирование*. 2014. № 5. С. 70–77. doi: 10.7256/2306-4196.2014.5.13309
15. Богатырев В.А., Богатырев С.В. Своевременность обслуживания в многоуровневых кластерных системах с поэтапным уничтожением просроченных запросов // *Вестник компьютерных и информационных технологий*. 2018. № 2(164). С. 28–35. doi: 10.14489/vkit.2018.02.pp.028-035
16. Богатырев В.А., Богатырев С.В. Многоэтапное обслуживание запросов, критичных к задержкам ожидания, в многоуровневых системах // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2017. Т. 17. № 5(111). С. 872–878. doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-872-878
9. Kubenko V.D., Yanchevskiy I.V. Active damping of nonstationary vibrations of a rectangular plate under impulse loading. *Journal of Vibration and Control*, 2013, vol. 19, no. 10, pp. 1514–1523. doi: 10.1177/1077546312446625
10. Grishentsev A., Korobeynikov A. Decomposition of n-dimensional digital signals on rectangular wavelet basis. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 4(80), pp. 75–79. (in Russian)
11. Korobeinikov A.G., Grishentsev A.Yu. *Development and Research of Multidimensional Mathematical Models by Applying Computer Algebra Systems*. St. Petersburg, ITMO University, 2014, 100 p. (in Russian)
12. Korobeinikov A.G. *Development and Research of Mathematical Models in MATLAB and Maple*. St. Petersburg, ITMO University, 2012, 160 p. (in Russian)
13. Korobeinikov A.G. Obfuscation algorithm NB: *Cybernetics and programming*, 2013, no. 3, pp. 1–8. (in Russian). doi: 10.7256/2306-4196.2013.3.935
14. Labkovskaya R.Y., Kozlov A.S., Pirozhnikova O.I., Korobeinikov A.G. Modeling the dynamics of reed sensors of control systems. NB: *Cybernetics and programming*, 2014, no. 5, pp. 70–77. (in Russian). doi: 10.7256/2306-4196.2014.5.13309
15. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V. Timeliness of service in a multi-tier clustered systems with the phased destruction overdue requests. *Herald of computer and information technologies*, 2018, no. 2(164), pp. 28–35. (in Russian). doi: 10.14489/vkit.2018.02.pp.028-035
16. Bogatyrev V.A., Bogatyrev S.V. Multi-step service of requests critical to queuing delays in multi-tier systems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2017, vol. 17, no. 5(111), pp. 872–878. (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2017-17-5-872-878

Авторы

Коробейников Анатолий Григорьевич — доктор технических наук, профессор, заместитель директора по науке, Санкт-Петербургский филиал учреждения Российской академии наук «Институт Земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В.Пушкова РАН», Санкт-Петербург, 199034, Российская Федерация; профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 56128063300, ORCID ID: 0000-0002-9968-0207, Korobeynikov_A_G@mail.ru

Калинкина Мария Евгеньевна — аспирант, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID ID: 0000-0002-2344-7257, mariia_kalinkina@mail.ru

Ткалич Вера Леонидовна — доктор технических наук, профессор, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 57210312931, ORCID ID: 0000-0003-0834-9613, Vera_Leonidovna_Tkalich@mail.ru

Пирожникова Ольга Игоревна — кандидат технических наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 57202281277, ORCID ID: 0000-0001-6597-2079, cheezecake@mail.ru

Гришенцев Алексей Юрьевич — доктор технических наук, доцент, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 56321138400, ORCID ID: 0000-0003-1373-0670, Grishentsev@yandex.ru

Authors

Anatoly G. Korobeynikov — D.Sc., Professor, Deputy Director for Science, Saint Petersburg Branch of Pushkov Institute of Terrestrial Magnetism, Ionosphere and Radio Wave Propagation, Russian Academy of Sciences, Saint Petersburg, 199034, Russian Federation; Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 56128063300, ORCID ID: 0000-0002-9968-0207, Korobeynikov_A_G@mail.ru

Maria E. Kalinkina — Postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID ID: 0000-0002-2344-7257, mariia_kalinkina@mail.ru

Vera L. Tkalich — D.Sc., Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 57210312931, ORCID ID: 0000-0003-0834-9613, Vera_Leonidovna_Tkalich@mail.ru

Olga I. Pirozhnikova — PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 57202281277, ORCID ID: 0000-0001-6597-2079, cheezecake@mail.ru

Alexey Yu. Grishentsev — D.Sc., Associate Professor, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 56321138400, ORCID ID: 0000-0003-1373-0670, Grishentsev@yandex.ru