УДК 62.50, 658.3 doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-6-857-862

АДАПТИВНАЯ ЗАДАЧА О РАСШИРЕННОМ ВОСПРОИЗВОДСТВЕ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ ОБОБЩЕННЫХ ЗАТРАТ

А.А. Ведяков, В.С. Воробьев, В.Ю. Тертычный-Даури

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация
Адрес для переписки: v.s.vorobyev@yandex.ru

Информация о статье
Поступила в редакцию 27.08.20, принята к печати 05.10.20
Язык статьи — русский

Ссылка для цитирования: Ведяков А.А., Воробьев В.С., Тертычный-Даури В.Ю. Адаптивная задача о расширенном воспроизводстве при минимизации обобщенных затрат // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2020. Т. 20. № 6. С. 857–862. doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-6-857-862

Аннотация
Предмет исследования. Рассмотрена оптимальная адаптивная задача при наличии неопределенности о числовом коэффициенте исходной динамической (экономической) системы в рамках задачи налогообложения на прибыль для расширенного воспроизводства. **Метод.** Задача решена с использованием оптимизационного метода динамического программирования в линейно-квадратичной постановке и адаптивного метода настраиваемых параметров. **Основные результаты.** Предложен новый алгоритм оптимального адаптивного управления экономической системой. Выполнен анализ функционала обобщенных затрат в качестве меры расходов на воспроизводство, минимальное значение которого надо обеспечить. В предложенной трактовке исследуемая задача решается впервые. Теоретический анализ сопровождается данными численных расчетов. **Практическая значимость.** Результаты работы могут быть использованы в качестве реально действующих экономических схем обслуживания промышленных расширенных производств с учетом минимизации обобщенных затрат в процедуре налогообложения на прибыль.

Ключевые слова
расширенное воспроизводство, функционал обобщенных затрат, алгоритм адаптации, оптимальное и субоптимальное управления, уравнение и функция Беллмана

doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-6-857-862

ADAPTIVE PROBLEM OF EXTENDED REPRODUCTION WITH MINIMIZATION OF GENERALIZED COSTS

A.A. Vedyakov, V.S. Vorobev, V.Yu. Tertychny-Dauri

ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation
Corresponding author: v.s.vorobyev@yandex.ru

Article info
Received 27.08.20, accepted 05.10.20
Article in Russian

For citation: Vedyakov A.A., Vorobev V.S., Tertychny-Dauri V.Yu. Adaptive problem of extended reproduction with minimization of generalized costs. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2020, vol. 20, no. 6, pp. 857–862 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2020-20-6-857-862

Abstract
Subject of Research. The paper considers an optimal adaptive control problem of the initial dynamic (economic) system in the frame of profit taxation procedure for extended reproduction in the case of numerical coefficient uncertainty. **Method.** The problem is solved by an optimization method of dynamic programming in a linear-quadratic variant and an adaptive method of adjustable parameters. **Main Results.** A novel algorithm for optimal adaptive control of an economic system is proposed. The so-called generalized cost functional is introduced as a measure of reproduction costs with the minimum value of the functional. The problem under study is solved in the proposed interpretation for the first time. The theoretical analysis is attended with numerical calculation data. **Practical Relevance.** The results of the work are applicable as the real maintenance economic schemes for industrial extended production facilities, taking into account the minimization of generalized costs in the profit taxation procedure.

Keywords
extended reproduction, generalized cost functional, adaptation algorithm, optimal and suboptimal control, Bellman equation and function

Введение

Рассмотрена задача о расширенном воспроизводстве при налогообложении на прибыль [1, 2] в адаптивной постановке. Данная задача является актуальной и в нынешней экономической действительности, особенно в контексте ее решения с оптимизационных позиций [3–9]. Стоит особо подчеркнуть, что методы оптимизации и, в частности, методы теории оптимального управления [10–13], составляют сердцевину задач современной математической экономики.

Предполагается, что предприятие или отрасль в целом производит некоторую продукцию, причем $x(t)$ — это денежная сумма, получаемая за реализацию этой продукции за условную единицу времени в момент времени t. Обозначим через $u^*(t)$ долю этой суммы, которая идет на расширение производства, включая траты на закупку нового необходимого оборудования.

Будем считать, что увеличение суммы $x(t)$ пропорционально затратам на эту цель:

$$\dot{x}(t) = \alpha^* u^*(t)x(t),\ x(t_0) = a, \tag{1}$$

где α^*, $a > 0$ — некоторые заданные числа. Здесь a — известный начальный капитал. Расходы на текущее производство, включая расходы на материалы и пр., пропорциональны производимой продукции, т. е. в единицу времени равны $\beta x(t)$, где $\beta = \mathrm{const} > 0$.

Налог выплачивается с оставшейся суммы $x(t) - u^*(t)\ x(t) - \beta x(t)$, поэтому прибыль за время от $t = t_0$ до $t = t_1$ определяется интегралом:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [\gamma - u^*(t)]x(t)dt,\ \gamma = 1 - \beta > 0,\ 0 \le u^*(t) \le \gamma.$$

Возникает вопрос, как распорядиться долей $u^*(t)$, направляемой на расширенное воспроизводство, чтобы к заданному моменту t_1 чистая прибыль J была максимальной? Функцию $u^*(t)$ будем называть управлением.

Постановка задачи

Часто в задачах математической экономики, чтобы оптимизировать непропорциональный закон налогообложения, вводят новую управляющую функцию по формулам [1]:

$$u(t) = 1 - \frac{u^*(t)}{\gamma},\ \alpha = \alpha^*\gamma,\ u^*(t) = \gamma[1 - u(t)],$$

где $0 \le u(t) \le 1$.

Тогда дифференциальное уравнение (1) принимает вид

$$\dot{x}(t) = \alpha[1 - u(t)]x(t),\ x(t_0) = a. \tag{2}$$

Задача о расширенном воспроизводстве при налогообложении ранее рассматривалась исключительно в детерминированной постановке, т. е. в отсутствии действия каких-либо неизвестных возмущений и в предположении, что все параметры управляемой системы известны.

Адаптивная постановка задачи предполагает наличие в динамической системе неизвестных параметров либо ограниченных возмущений. Будем решать исследуемую адаптивную задачу как вспомогательную квадратичную задачу о расширенном воспроизводстве при минимизации издержек производства. С учетом того, что формируемый функционал качества является некоторым формируемым заранее выражением, экстремум, которого желательно достичь, предлагается выбрать следующий интеграл:

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_1} k[u(x, t) + \beta]^2 x(t)dt \to \min_{u\in U},\ k = \mathrm{const} > 0, \tag{3}$$

где U — множество допустимых управлений; $u(t) = u[x(t)t]$ — управление как обратная связь в классе непрерывных функций от непрерывно измеряемых состояний системы и времени; $[t_0, t_1]$ — заданный промежуток времени регулирования исходной системы; $u(t, x)x(t)$ — затраты на воспроизводство; $\beta\ x(t)$ — затраты на текущее производство; $k > 0$ — некоторое заданное число.

Для определенности функционал качества J_1 (3) будем называть функционалом обобщенных затрат 1-го рода, а функционал J_2:

$$J_2 = \int_{t_0}^{t_1} k[u(x, t) + \beta]^2 x^2(t)dt \to \min_{u\in U} \tag{4}$$

— функционалом обобщенных затрат 2-го рода. Минимизация функционалов (3), (4) приводит к максимизации прибыли J в модели расширенного воспроизводства.

Рассмотрим задачу (2), (3), полагая, что в уравнении (2) коэффициент $\alpha > 0$ — неизвестная постоянная, $x(t)$ — непрерывно измеряемая функция состояния системы. Требуется обеспечить выбор оптимального управления $u_0(x, t)$ на промежутке времени $[t_0, t_1]$.

Метод решения

Воспользуемся методом динамического программирования для организации процесса предельно-оптимального адаптивного управления [14–16] системой (2) с неизвестным параметром α и с функционалом качества (3). Обозначим через $V[x(t), t]$ функцию Беллмана решаемой задачи, потребовав при этом дополнительно к целевому условию (3) выполнение системой управления еще и условия параметрической сходимости:

$$\lim_{t\to t_1} |\overline{\alpha}(t) - \alpha| < \delta_1, \tag{5}$$

где $\delta_1 > 0$ — заданная точность отслеживания; $\overline{\alpha}(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция t настраиваемого параметра α, выход которой обеспечивается с помощью сходящегося алгоритма адаптивного оценивания вида

$$\dot{\overline{\alpha}}(t) + \omega[\overline{\alpha}(t) - \alpha] = 0,\ \omega = \mathrm{const} > 0. \tag{6}$$

Начальное состояние системы $x(t_0)$ считается известным, а построение соответствующей субоптимальной обратной связи осуществляется по правилу: $\overline{u}_0 = \overline{u}_0[x(t), \overline{\alpha}(t), t]$, где $\overline{u}_0(\cdot)$ — субоптимальное приближение величины оптимального управления $u_0 = u_0[x(t), \alpha, t]$.

Для общей функции Беллмана $V[x(t), t]$ оптимизационное уравнение Беллмана имеет вид

$$\min_{u\in U}\left(\frac{dV[x(t), t]}{dt} + F(x, u)\right) = 0 \qquad (7)$$

с граничным условием $V[x(t_1), t_1] = 0$ в правой части уравнения (7), где через $F(x, u)$ обозначена подынтегральная функция $F(x, u) \equiv k[u(x, t) + \beta]^2 x(t)$ критерия качества (3).

Для решения уравнения (7) воспользуемся методом настраиваемых параметров [14, 15] с заданной заранее стационарной функцией Беллмана $V[x(t)]$ в виде квадратичной функции:

$$V(x) = [x(t_1) - x(t)]^2 = (x_1 - x)^2,\ V[x(t_1)] = 0, \qquad (8)$$

при $t \in [t_0, t_1]$, откуда следует граничное условие на заданное конечное состояние системы: $x(t)|_{t=t_1} = x_1$.

Подставляя выражение (8) в уравнение Беллмана (7), получим

$$\min_{u\in U}\left[\frac{\partial V(x)}{\partial x}\dot{x} + F(x, u)\right] =$$
$$= \min_{u\in U}[2(x_1 - x)(-\dot{x}) + k(u + \beta)^2 x] = 0. \qquad (9)$$

Принимая во внимание уравнение движения (2), можем соотношение (9) преобразовать:

$$\min_{u\in U}\{2[-\alpha(x_1 - x) + k\beta](1 - u)x + k(u^2 + \beta^2)x\} = 0.$$

Отсюда легко найти формулу для выработки оптимального управления

$$u_0 = \beta - \frac{\alpha}{k}(x_1 - x), \qquad (10)$$

где $x(t) \neq 0$, $\forall t \in [t_0, t_1)$, $x(t) = x_1$.

Обратим внимание на то, что $u_0 \in [0, 1]$, т. е. должно выполняться двойное неравенство: $0 \leq \beta - (\alpha/k)(x_1 - x) \leq 1$, устанавливающее ограничение на выбор коэффициентов.

Заметим, что формулой u_0 (10) воспользоваться нельзя по причине вхождения в нее неизвестного параметра α. Потому сделаем переход [14] от оптимального управления u_0 к субоптимальному управлению $\overline{u}_0$ при одновременной замене параметра α на его непрерывную функциональную оценку $\overline{\alpha}(t)$. Имеем в этом случае

$$\overline{u}_0 = \beta - \frac{\overline{\alpha}}{k}(x_1 - x),\ x(t) \neq 0,\ x(t_1) = x_1. \qquad (11)$$

При выборе соответствующего алгоритма адаптации, обеспечивающего сходимость $\overline{\alpha}(t) \to \alpha(t \to \infty)$, в силу непрерывности величина $\overline{u}_0(t)$ будет сходиться к величине $u_0(t)$, тем самым качество системы управления с необходимым уровнем оптимальности на конечном промежутке времени будет достигнуто.

Выражение $\overline{u}_0$ (10) подставим обратно в уравнение Беллмана (9):

$$2(x_1 - x)\alpha\left[\beta - 1 - \frac{\overline{\alpha}}{k}(x_1 - x)\right] +$$
$$+ \frac{\overline{\alpha}^2}{k}(x_1 - x)^2 - 4\beta\overline{\alpha}(x_1 - x) + 4k\beta^2 = 0 \qquad (12)$$

Равенство нулю в соотношении (12) обеспечивается за счет надлежащего выбора адаптивного алгоритма оценивания (6). Выделяя в уравнении (12) параметр α, получим:

$$A(t)\alpha = B(t),\ A(t) \equiv 2(x_1 - x)\left[1 - \beta + \frac{\overline{\alpha}}{k}(x_1 - x)\right],$$
$$B(t) \equiv \frac{\overline{\alpha}^2}{k}(x_1 - x)^2 - 4\overline{\alpha}\beta(x_1 - x) + 4k\beta^2, \qquad (13)$$

где $A(t)$, $B(t)$ — известные функции времени.

Домножая на $A(t)$ алгоритм (6), и пользуясь зависимостью (13), сформируем сходящийся алгоритм адаптации вида

$$A(t)\dot{\overline{\alpha}}(t) + \omega[A(t)\overline{\alpha}(t) - B(t)] = 0. \qquad (14)$$

Заметим, что в алгоритм (14) входят лишь измеряемые и формируемые величины $x(t)$, $\overline{\alpha}(t)$. Решением этого алгоритма будет служить зависимость

$$A(t)\overline{\alpha}(t) - B(t) = [A(t_0)\overline{\alpha}(t_0) - B(t_0)]e^{-\omega(t-t_0)},$$

откуда получим выражение для $\overline{\alpha}(t)$ с последующей подстановкой в формулу $\overline{u}_0$ (11). Итак, синтезированные алгоритмы субоптимального управления (11) и адаптации (14) обеспечивают выполнение уравнения Беллмана (12) и сходимость алгоритма настройки параметров (14). Приходим, в итоге, к следующей теореме.

Теорема. Пусть задана управляемая экономическая система расширенного воспроизводства с помощью уравнения (2) с неизвестным постоянным параметром α, и поставлена задача о минимизации функционала обобщенных затрат 1-го рода при налогообложении на прибыль. Тогда при выборе субоптимального управления $\overline{u}_0[x(t),t]$ (11) и алгоритма адаптации (14) целевые условия (3), (5) будут выполнены с некоторым уровнем оптимальности.

Замечание. При $t \to \infty$ имеем: $\overline{u}_0 \to u_0$, $\overline{\alpha} \to \alpha$ и тем самым — выход на оптимальный режим функционирования системы управления.

Предельно-оптимальная стабилизация движения

Обеспечение граничного условия функции Беллмана $V[x(t_1)] = 0$ на правом конце траектории $x(t_1)$ будет гарантированно выполняться лишь при условии, что $x(t_1) = x_1$, где $x_1 > 0$ — заданное значение. Выполнение этого требования может осуществиться в режиме предельно-оптимальной стабилизации без увязывания значения x_1 с какими-либо другими постоянными.

После подстановки зависимости $\overline{u}_0$ (11) в уравнение Беллмана (7) получим

$$\frac{dV[x(t), t]}{dt} + F(x, \overline{u}_0) = 0,$$

откуда следует для $V = (x_1 - x)^2$: $\dot{V} = -k(\overline{u}_0 + \beta)^2 x$, либо

$$\dot{V} = -k\left[2\beta - \frac{\overline{\alpha}}{k}(x_1 - x)\right]^2 x \leq -k\left[-\frac{\overline{\alpha}}{k}(x_1 - x)\right]^2 x = -\lambda(t)V,$$

где $\lambda(t)$ — соответствующая заданная функция: $\lambda(t) \equiv \dfrac{\overline{\alpha}^2(t)x(t)}{k} > 0.$

Решая последнее уравнение, получим:

$$V(t) = V(t_0)e^{-\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0,$$

если несобственный интеграл $\int_{t_0}^{t}\lambda(t)dt$ расходится.

В дополнение покажем, что требование на выполнение граничного условия $x(t)|_{t=t_1} = x_1$ может быть выполнено с помощью построенной системы адаптивного субоптимального управления (13) точно с учетом связи значения x_1 с другими заданными величинами регулируемого процесса.

Подставим зависимость $\overline{u}_0$ (11) в исходное уравнение управляемого объекта (2). Имеем

$$\dot{x}(t) = \alpha\left[\frac{\overline{\alpha}(t)}{k}(x_1 - x(t) + \gamma)\right]x(t), \qquad (15)$$

где $\alpha > 0$, $\gamma = 1 - \beta > 0$, $\beta > 0$, $k > 0$.

В новых обозначениях уравнение (15) примет вид

$$\dot{x} = \sigma_1(t)x - \sigma_2(t)x^2, \qquad (16)$$

где $\sigma_1(t) \equiv \alpha\left(\frac{\overline{\alpha}(t)x_1}{k} + \gamma\right)$, $\sigma_2(t) \equiv \frac{\alpha\overline{\alpha}(t)}{k}$.

Уравнение (16) — это дифференциальное уравнение Бернулли 1-го порядка, которое может быть разрешено в квадратурах. Для этого будем искать его решение в виде $x = vw$, где $v(t)$ и $w(t)$ — некоторые функции, которые необходимо найти. Подставляя это произведение обратно в уравнение (16), получим

$$v\left(\frac{dw}{dt} - \sigma_1 w\right) + \left(w\frac{dv}{dt} - \sigma_2 v^2 w^2\right) = 0. \qquad (17)$$

Положим для первой скобки:

$$\frac{dw}{dt} - \sigma_1 w = 0 \Rightarrow w = Ke^{\int\sigma_1(t)dt}.$$

При $K = 1$ найдем частное решение $w_1 = \exp(\int\sigma_1(t)dt)$, которое затем подставим во вторую скобку уравнения (17):

$$\frac{dv}{dt} = -\sigma_2(t)e^{\int\sigma_1(t)dt}v^2.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$v(t) = \left(\int\sigma_2(t)e^{\int\sigma_1(t)dt}dt + C\right)^{-1},$$

а тем самым получим

$$x(t) = v(t)w_1(t) = \frac{e^{\int\sigma_1(t)dt}}{\int\sigma_2(t)e^{\int\sigma_1(t)dt}dt + C},$$

где C — постоянная интегрирования.

Легко обнаружить, что $C = 1/a$ из условия $x(t) = a > 0$. Значит,

$$x_1 = x(t_1) = \frac{e^{\int_{t_0}^{t_1}\sigma_1(t)dt}}{\int_{t_0}^{t_1}\sigma_2(t)e^{\int_{t_0}^{t}\sigma_1(t)dt}dt + \frac{1}{a}}. \qquad (18)$$

Обозначим

$$y(t_0, t_1) \equiv e^{\int_{t_0}^{t_1}\sigma_1(t)dt}.$$

Тогда соотношение (18) можно записать в виде уравнения, которое представляет собой функциональную связь между постоянными t_1 и x_1:

$$\int_{t_0}^{t}\sigma_2(t)y(t_0, t)dt = L,\ L \equiv \frac{y(t_0, t_1)}{x_1} - \frac{1}{a}.$$

При применении известных адаптивных схем [14, 15] аналогичные результаты по оптимальной стабилизации искомой системы будут иметь место и в отношении функционала обобщенных затрат 2-го рода J_2 (4).

Пример. Рассмотрим более простую версию исходной задачи и ее численную реализацию для случая, когда параметр α известен и $\overline{\alpha}(t) \equiv \alpha$, $\overline{u}_0(t) \equiv u_0(t)$. Тогда в уравнении Бернулли (16) имеем

$$\sigma_1 \equiv \frac{\alpha^2 x_1}{k} + \alpha\gamma,\ \sigma_2 \equiv \frac{\alpha^2}{k}.$$

Решение $x(t)$ уравнения (16): $\dot{x} = \sigma_1 x - \sigma_2 x^2$ в функции времени t представляет собой монотонно возрастающую функцию времени на промежутке изменения $x(t)$: $x(t) \in [0, \sigma_1/\sigma_2]$. Здесь: $\dot{x}(t) = f(x)$, $y = f(x) = \sigma_1 x - \sigma_2 x^2 > 0$, $x_{\max} = \sigma_1/(2\sigma_2)$, $y_{\max} = \sigma_1^2/(4\sigma_2)$. На рис. 1 заштрихована область, при которой $y = f(x) > 0$ и $\dot{x} > 0$, т. е. $x(t)$ является монотонно возрастающей функцией t.

Для решения уравнения (16) имеем:

$$x(t) = \frac{1}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(1 - e^{-\sigma_1(t-t_0)}) + \frac{e^{-\sigma_1(t-t_0)}}{a}} \xrightarrow[(t\to\infty)]{} c > 0,$$

где $c = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$.

Примем $x(t_0) = a$. Пусть $t_0 = 0$, $t_1 > t_0$, где t_1 — конечный момент времени процесса оптимального регулирования. Величины $x_1 > a$ и t_1 связаны между собой соотношениями ($t_0 = 0$):

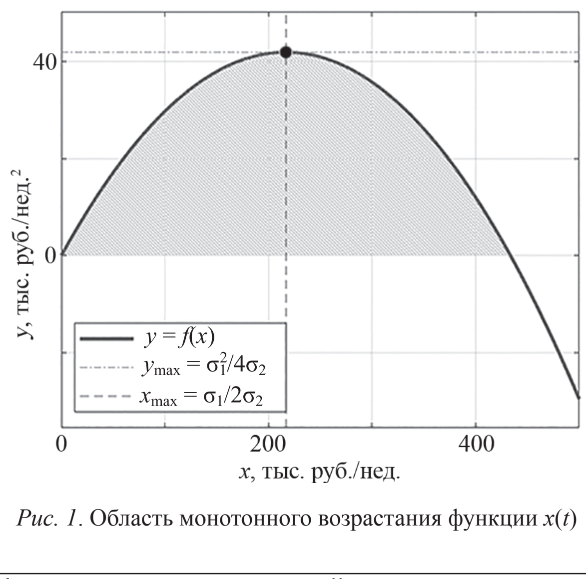

Рис. 1. Область монотонного возрастания функции $x(t)$

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(1 - e^{-\sigma_1 t_1}) + \frac{e^{-\sigma_1 t_1}}{a}},$$

$$t_1 = \ln\left[\frac{a}{x_1}\left(\frac{1 - x_1/c}{1 - a/c}\right)\right]^{-\frac{1}{\sigma_1}}.$$

Отметим, что долей $u(t)$ текущей прибыли предприятие до уплаты налогов может распоряжаться по своему усмотрению. На промежутке времени $[0, t_1]$ все ресурсы предприятия необходимо направить на расширение производства, а затем при $t > t_1$ закупки на расширение производства следует прекратить, заботясь лишь о чистой прибыли. Другими словами, до момента t_1 надо максимально «воспроизводиться», а затем при $t > t_1$ уже «воспроизводиться» вовсе не следует, а нужно лишь извлекать прибыль.

Проведем численное моделирование работы алгоритма. В качестве исходных данных возьмем следующий набор параметров системы: a = 100 тыс. руб.; α = 0,3; β = 0,9; k = 101; x_1 = 400 тыс. руб./нед. Результаты моделирования представлены на рис. 2 и рис. 3.

На рис. 2 приведен полученный закон управления $u(t)$.

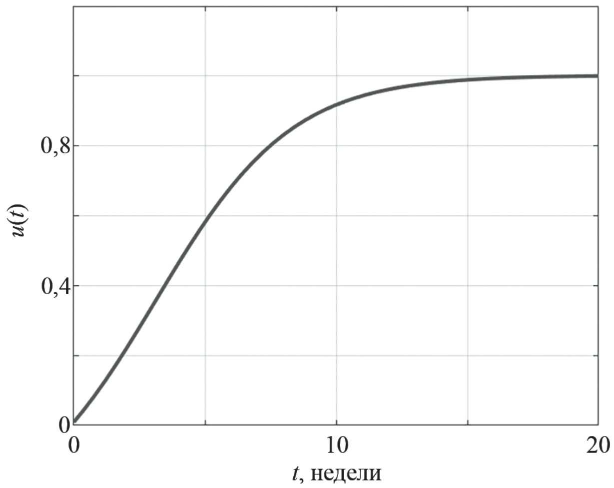

Рис. 2. Закон управления

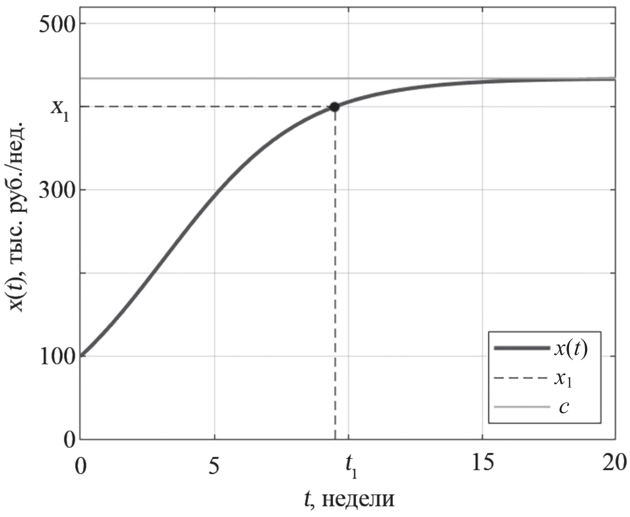

Рис. 3. Кривая изменения получаемой прибыли

Кривая $x(t)$ на рис. 3 означает, что при расширении производства идет увеличение денежной массы от реализации производимой продукции, $x(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} c > 0$, где $c \equiv \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$. Величина x_1 определяет ту сумму, которую предприятие может себе «позволить» при затратах на расширение производства.

Заключение

В работе представлен алгоритм оптимального адаптивного синтеза в задаче о расширенном воспроизводстве при налогообложении на прибыль с учетом минимизации обобщенных затрат. Задача решена с помощью использования аппарата динамического программирования, метода настраиваемых параметров в рамках применения общей схемы субоптимального управления. Проведено сравнение результатов оптимизационного эксперимента в детерминированном и адаптивном вариантах. Показано их сближение по мере сходимости оценок с течением времени. Представлен численный пример поведения рассматриваемой экономической системы в детерминированном случае, служащий наглядной иллюстрацией предложенного алгоритма оптимального синтеза.

Литература

1. Матвеев А.С., Якубович В.А. Оптимальные системы управления: обыкновенные дифференциальные уравнения. Специальные задачи. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2003. 540 с.
2. Арутюнов А.В., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Принцип максимума Понтрягина. Доказательство и приложения. М.: Факториал Пресс, 2006. 144 с.
3. Тер-Крикоров А.М. Оптимальное управление и математическая экономика. М.: Наука, 1977. 216 с.
4. Волошин Г.Я. Методы оптимизации в экономике. М.: Дело и сервис, 2004. 320 с.
5. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: Юнити-Дана, 2005. 400 с.
6. Данилов Н.Н. Курс математической экономики. СПб.: Лань, 2016. 400 с.

References

1. Matveev A.S., Iakubovich V.A. *Optimal Control Systems: Ordinary Differential Equations. Special Issues*. St. Petersburg, St. Petersburg University Publ., 2003, 540 p. (in Russian)
2. Arutiunov A.V., Magaril-Iliaev G.G., Tikhomirov V.M. *Maximum Principle of Pontryagin. Proof and Applications*. Moscow, Faktorial Press, 2006, 144 p. (in Russian)
3. Ter-Krikorov A.M. *Optimal Control and Mathematical Economics*. Moscow, Nauka Publ., 1977, 216 p. (in Russian)
4. Voloshin G.Ia. *Optimization Methods in Economics*. Moscow, Delo i Servis Publ., 2004, 320 p. (in Russian)
5. Kolemaev V.A. *Mathematical Economic Theory*. Moscow, Unity-Dana Publ., 2005, 400 p. (in Russian)
6. Danilov N.N. *The Course of Mathematical Economic Theory*. St. Petersburg, Lan' Publ., 2016, 400 p. (in Russian)

7. Суровцов Л.К. Математическая экономика. СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2008. 314 с.
8. Охорзин В.А. Математическая экономика. М.: Абрис, 2012. 264 с.
9. Ашманов С.А. Математические модели и методы в экономике. М.: Изд-во МГУ, 1980. 200 с.
10. Дубовицкий А.Я., Милютин А.А. Теория принципа максимума // Методы теории экстремальных задач в экономике. М.: Наука, 1981. С. 6–47.
11. Anderson B., Moore J. Optimal Control: Linear Quadratic Methods. N.Y.: Prentice-Hall Inc., 1990. 350 p.
12. Clarke F.H., Winter R.B. The relationship between the maximum principle and dynamic programming // SIAM Journal on Control and Optimization. 1987. V. 25. N 5. P. 1291–1311. doi: 10.1137/0325071
13. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. М.: Наука, 1975. 616 с.
14. Тертычный-Даури В.Ю. Галамех. В 6 томах. Т. 1. Адаптивная механика. М.: Физматлит, 2019. 544 с.
15. Тертычный-Даури В.Ю. Галамех. В 6 томах. Т. 4. Оптимальная механика. М.: Физматлит, 2019. 608 с.
16. Ведяков А.А., Тертычный-Даури В.Ю. Робастные алгоритмы параметрического оценивания в некоторых задачах обеспечения устойчивости // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2016. Т. 16. № 4. С. 620–626. doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-620-626

7. Surovtcov L.K. *Mathematical Economic Theory*. St. Petersburg, St. Petersburg University Publ., 2008, 314 p. (in Russian)
8. Okhorzin V.A. *Mathematical Economic Theory*. Moscow, Abris Publ., 2012, 264 p. (in Russian)
9. Ashmanov S.A. *Mathematical Models and Methods in Economics*. Moscow, Moscow State University, 1980, 200 p. (in Russian)
10. Dubovitckii A.Ia., Miliutin A.A. *Maximum principle theory*. *Methods of extreme problems theory in economics*, Moscow, Nauka Publ., 1981, pp. 6–47. (in Russian)
11. Anderson B., Moore J. *Optimal Control: Linear Quadratic Methods*. N.Y., Prentice-Hall Inc., 1990, 350 p.
12. Clarke F.H., Winter R.B. The relationship between the maximum principle and dynamic programming. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 1987, vol. 25, no. 5, pp. 1291–1311. doi: 10.1137/0325071
13. Pervozvanskii A.A. *Mathematical Models in Production Management*. Moscow, Nauka Publ., 1975, 616 p. (in Russian)
14. Tertychny-Dauri V.Yu. *Galamech. Vol. 1. Adaptive Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019, 544 p. (in Russian)
15. Tertychny-Dauri V.Yu. *Galamech. Vol. 4. Optimum Mechanics*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2019, 608 p. (in Russian)
16. Vedyakov A.A., Tertychny-Dauri V.Yu. Robust algorithms of parametric estimation in some stabilization problems. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, vol. 16, no. 4, pp. 620–626. (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2016-16-4-620-626

Авторы

Ведяков Алексей Алексеевич — кандидат технических наук, доцент, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 49664023200, ORCID: 0000-0003-4336-1220, vedyakov@corp.ifmo.ru

Воробьев Владимир Сергеевич — аспирант, инженер-исследователь, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, ORCID: 0000-0002-2957-7909, v.s.vorobyev@yandex.ru

Тертычный-Даури Владимир Юрьевич — доктор физико-математических наук, профессор, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, 197101, Российская Федерация, Scopus ID: 8980267000, ORCID: 0000-0003-4671-7659, tertychny-dauri@mail.ru

Authors

Alexey A. Vedyakov — PhD, Associate Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 49664023200, ORCID: 0000-0003-4336-1220, vedyakov@corp.ifmo.ru

Vladimir S. Vorobev — Postgraduate, Research Engineer, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, ORCID: 0000-0002-2957-7909, v.s.vorobyev@yandex.ru

Vladimir Yu. Tertychny-Dauri — D.Sc., Full Professor, ITMO University, Saint Petersburg, 197101, Russian Federation, Scopus ID: 8980267000, ORCID: 0000-0003-4671-7659, tertychny-dauri@mail.ru