НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК
ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ
сентябрь–октябрь 2023 Том 23 Номер 5

doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-1050-1055
УДК 004.94

Решение задачи пространственного вращения 3D-поверхностей и их отображения на плоскости

Андрей Владимирович Шарамет[1]✉, Андрей Николаевич Лысый[2]

[1,2] ОАО «КБ Радар» — управляющая компания холдинга «Системы радиолокации», Минск, 220026, Республика Беларусь
[1] Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, 220062, Республика Беларусь

[1] a.sharamet@kbradar.by✉, https://orcid.org/0000-0003-0950-8700
[2] a.lysyj@kbradar.by, https://orcid.org/0009-0006-7430-3663

Аннотация
Введение. Рассмотрено решение математической задачи вращения объемной поверхности в пространстве с ортогональным базисом и ее отображением на плоскости с использованием простых геометрических фигур. Данная задача возникает при сопровождении подвижных объектов на фоне окружающей обстановки. Конструктивной особенностью таких систем является то, что в их составе имеются функциональные дополнительные элементы, которые обеспечивают получение информации о маневрирующем объекте наблюдения и вырабатывают сигналы управления для отработки возникшей ошибки. Подобная операция выполняется непрерывно в реальном масштабе времени. Предполагается, что данная задача решается с использованием цифровой вычислительной машины, а изменение угла визирования наблюдаемого подвижного объекта будет фиксироваться в отдельные интервалы времени, т. е. парциально (дискретно). Начальное состояние системы координат может быть представлено в матричном виде, соответственно переход в конечное состояние осуществляется в дискретные моменты времени. **Метод.** Задача решена в аналитическом виде. Сформулирован ряд ограничений по величине векторов и по их взаимному ориентированию в пространстве. Предложенный подход позволяет повысить наглядность и предсказуемость выполняемых операций за счет перехода от нелинейных тригонометрических уравнений к простейшим линейным операциям. Для демонстрации корректности выполнения и наглядности применения предложенного векторно-алгебраического подхода фон окружающей обстановки представлен в *.off формате (geomview object file format). **Основные результаты.** Получены конечные выражения для вращения системы координат твердого тела с неподвижным центром масс. **Обсуждение.** Полученные решения формализованы на основе строгих математических преобразований и относятся к классу задач, в которых аналитические соотношения точно описывают данные, т. е. когда при отсутствии ошибок измерений остаточный вектор системы всегда равен нулю. Такой подход позволяет уйти от выполнения преобразований над сложными нелинейными математическими выражениями.

Ключевые слова
система координат, ортогональный базис, проекция вектора, линейные векторно-матричные уравнения, маневрирование

Благодарности
Работа подготовлена по результатам совместных обсуждений особенностей реализации математического аппарата теории векторно-матричного анализа с К.К. Пащенко. Его памяти она посвящается.

Ссылка для цитирования: Шарамет А.В., Лысый А.Н. Решение задачи пространственного вращения 3D-поверхностей и их отображения на плоскости // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2023. Т. 23, № 5. С. 1050–1055. doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-1050-1055

Solving the problem of spatial rotation of 3D surfaces and their mapping on the plane

Andrei V. Sharamet[1]✉, Andrei N. Lysy[2]

[1,2] JSC “KB Radar” — Managing Company of “Radar Systems” Holding, Minsk, 220026, Republic of Belarus
[1] Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220062, Republic of Belarus

[1] a.sharamet@kbradar.by✉, https://orcid.org/0000-0003-0950-8700
[2] a.lysyj@kbradar.by, https://orcid.org/0009-0006-7430-3663

Abstract
The solution of the mathematical problem of rotation of a three-dimensional surface in space with an orthogonal basis and its mapping on a plane using simple geometric shapes is considered. This task arises when accompanying moving objects against the background of the surrounding environment. A design feature of such systems is that they contain functional additional elements that provide information about the maneuvering object of observation and generate control signals to work out the error that has occurred. This operation is performed continuously in real time. It is assumed that this problem is solved using a digital computer, i.e., the change in the angle of sight of the observed moving object will be recorded in separate time intervals — partial (discrete) ones. The initial state of the coordinate system can be represented in matrix form, respectively; the transition to the final state is carried out at discrete points in time. The problem is solved analytically. A number of restrictions on the magnitude of vectors and their mutual orientation in space are formulated. The proposed approach made it possible to increase the visibility and predictability of the operations performed due to the transition from nonlinear trigonometric equations to the simplest linear operations. To demonstrate the correctness of the implementation and clarity of the application of the proposed vector-algebraic approach, the background of the environment is presented in *.off format (geomview object file format). Finite expressions are obtained for the rotation of the coordinate system of an elastic body with a fixed center of mass. The solutions obtained are formalized on the basis of strict mathematical transformations and belong to the class of problems in which analytical relations accurately describe the data, that is, when, in the absence of measurement errors, the residual vector of the system is always zero. This approach allows you to avoid performing transformations on complex nonlinear mathematical expressions.

Keywords
coordinate system, orthogonal basis, vector projection, linear vector-matrix equations, maneuvering

Acknowledgements
The article was prepared based on the joint discussions results on the implementation features of the mathematical apparatus of the vector-matrix analysis theory with K.K. Pashchenko. It is dedicated to his memory.

For citation: Sharamet A.V., Lysy A.N. Solving the problem of spatial rotation of 3D surfaces and their mapping on the plane. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2023, vol. 23, no. 5, pp. 1050–1055 (in Russian). doi: 10.17586/2226-1494-2023-23-5-1050-1055

Введение

Одним из источников ошибок, которые возникают при решении задачи оценивания координат подвижных объектов наблюдения, является нелинейность уравнений связи его координат и координат измерительной системы с измеряемыми параметрами. В основе алгоритмов определения координат [1, 2] и отслеживания [3] подвижных объектов в пространстве, чаще всего в цифровых вычислительных системах, реализованы простейшие модели движения объектов с постоянной скоростью [4]. Основной причиной использования таких упрощенных моделей являются большие интервалы времени между моментами обновления информации [5], задержка распространения которых превышает время жизни гипотезы о собственной траектории движения [6, С. 148]. Использование современных измерителей позволяет существенно сократить интервалы времени между интервалами обращения к текущей информации. Это позволяет повысить эффективность алгоритмов [7, 8], предполагаемых к реализации в составе цифровых вычислительных систем [7]. Эффективность используемых алгоритмов определяется не только точностью оценивания координат, разрешающей способностью по координатам и достоверностью измерений при сопровождении [9, 10] маневрирующих и не маневрирующих объектов, но и возможностями вычислительной системы делать прогнозы с учетом взаимного пространственного положения объектов с учетом окружающей обстановки. Это неизбежно приводит к усложнению алгоритмов [11] и повышению требований к их эффективности [3]. Данное проблема вызвана не только необходимостью непрерывного отслеживания собственного местоположения, но и постоянным вращением динамически изменяющейся пространственной модели окружающей обстановки в реальном масштабе времени. Одним из возможных путей повышения эффективности предполагаемых к реализации алгоритмов является векторное представление задачи определения координат [3, С. 50] по первичным измеренным параметрам и формализации полученных уравнений в классе векторно-матричных функций [12]. Предметом исследования является отказ от необходимости выполнения преобразований над сложными нелинейными математическими выражениями и переход от нескольких разрозненных методов решения задачи поворота в пространстве к единой методике, основанной на конструктивных методах прикладного характера [6, 13]. Актуальность данного подхода обусловлена необходимостью объединения информации при решении задач оценивания координат подвижных объектов в многопозиционной измерительной системе [6, 9, 14].

Поворот в трехмерном пространстве

Выполним переход от системы координат $Oxyz$ к системе $Ox_1y_1z_1$ (рис. 1) при помощи двух последовательных поворотов на углы α и β.

При первом повороте система координат $Oxyz$ осуществляет парциальный поворот на угол α вокруг оси Oz, а переход задан матрицей $\boldsymbol{\theta}_3$. Второй поворот на угол β выполнен вокруг оси Oy_1. При этом переход определен матрицей $\boldsymbol{\theta}_2$.

Матрица перехода $\mathbf{A}_{23}$ от системы координат $Oxyz$ к системе $Ox_2y_1z_1$ равна произведению матриц $\mathbf{A}_{23} = \boldsymbol{\theta}_2(\beta)\boldsymbol{\theta}_3(\alpha)$:

$$\mathbf{A}_{23} = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\beta\cos\alpha & \cos\beta\sin\alpha & -\sin\beta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \sin\beta\cos\alpha & \sin\beta\sin\alpha & \cos\beta \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Ориентация системы $Ox_1y_1z_1$ относительно системы $Oxyz$, которая получена в результате двух последовательных поворотов, зависит от порядка выполнения поворотов [15]. В качестве примера выполним обратный порядок поворотов и в результате получим

$$\mathbf{A}_{32} = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\alpha & -\cos\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Анализ выражений (1) и (2) показал, что $\mathbf{A}_{23} \neq \mathbf{A}_{32}$, т. е. матрицы вращения не являются инвариантными.

В соответствии со свойством парциальных матриц [16] запишем, что $\mathbf{A}_{32}^T = \boldsymbol{\theta}_3^T(\alpha)\boldsymbol{\theta}_2^T(\beta) = \boldsymbol{\theta}_3(-\alpha)\boldsymbol{\theta}_2(-\beta)$, тогда матрицы поворота примут вид:

$$\boldsymbol{\theta}_3(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_2(-\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

С учетом выражений (3) матрица $\mathbf{A}_{32}^T$ примет вид:

$$\mathbf{A}_{32}^T = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & -\sin\alpha & \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta & \cos\alpha & \sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix}.$$

Получим конечное выражение, определяющее вращение в общем виде:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{32}^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Недостатком данного подхода является систематическое накопление ошибок, что неприемлемо для решения большинства задач. Это связано с тем, что на каждом текущем шаге значение местоположения содержит погрешности всех предыдущих шагов.

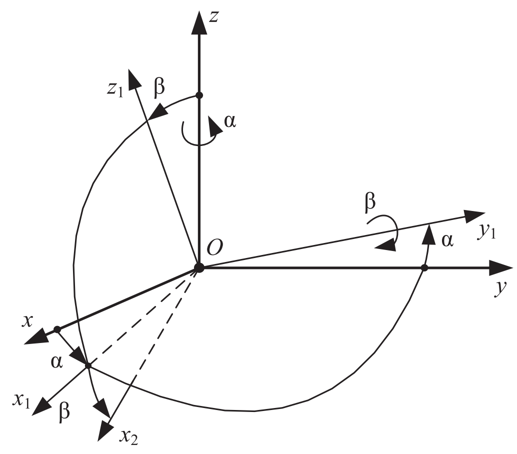

Рис. 1. Преобразование координат при «электродинамическом» вращении

Fig. 1. Coordinate transformation with "electrodynamic" rotation

Проекция и базис вектора в трехмерном пространстве

При выполнении поворота вектора $\mathbf{a} = \{x, y, z\}$ на некоторый угол и дальнейшего представления в новом базисе введем ряд ограничений:

1) все вектора перпендикулярны, т. е. ортогональны;
2) длина всех векторов базиса равна единице, т. е. они нормированы;
3) ни один из векторов не лежит в плоскости, образованной двумя другими векторами.

Данные ограничения могут быть формализованы в математическом виде:

$$k_x = \{1, 0, 0\}, \quad k_y = \{0, 1, 0\}, \quad k_z = \{0, 0, 1\}. \quad (4)$$

Для определения нового положения вектора $\mathbf{a}_1 = \{x_1, y_1, z_1\}$ необходимо знать не только его длину, но и величину в направлении $\mathbf{b}$. Данные параметры могут быть найдены как геометрическая проекция на соответствующий вектор (рис. 2, *b*) в соответствии с выражением:

$$\mathbf{a}_1 = proj_b a_1 = a_1\hat{\mathbf{b}} = (|\mathbf{a}|\cos\varphi)\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}\mathbf{b}, \quad (5)$$

где a_1 — скалярная проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{b}$; $(\cdot)$ — оператор скалярного произведения; $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}/\|\mathbf{b}\|$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{b}$; $\|\mathbf{b}\|$ — норма вектора $\mathbf{b}$; $|a|$ — длина a; φ — угол между a и b.

Отметим, что угол φ в выражении (5) не является углом поворота вектора $\mathbf{a}_1$. Данный угол зависит от проекции вектора $\mathbf{a}_1$ на соответствующую ось. При этом его поворот в пространстве может быть представлен в виде суммы векторов в базисе (4) с учетом соответствующих координатных орт (k_x, k_y, k_z) в новом базисе:

$$\mathbf{a}_1(x_1, y_1, z_1) = k_x x_1 + k_y y_1 + k_z z_1. \quad (6)$$

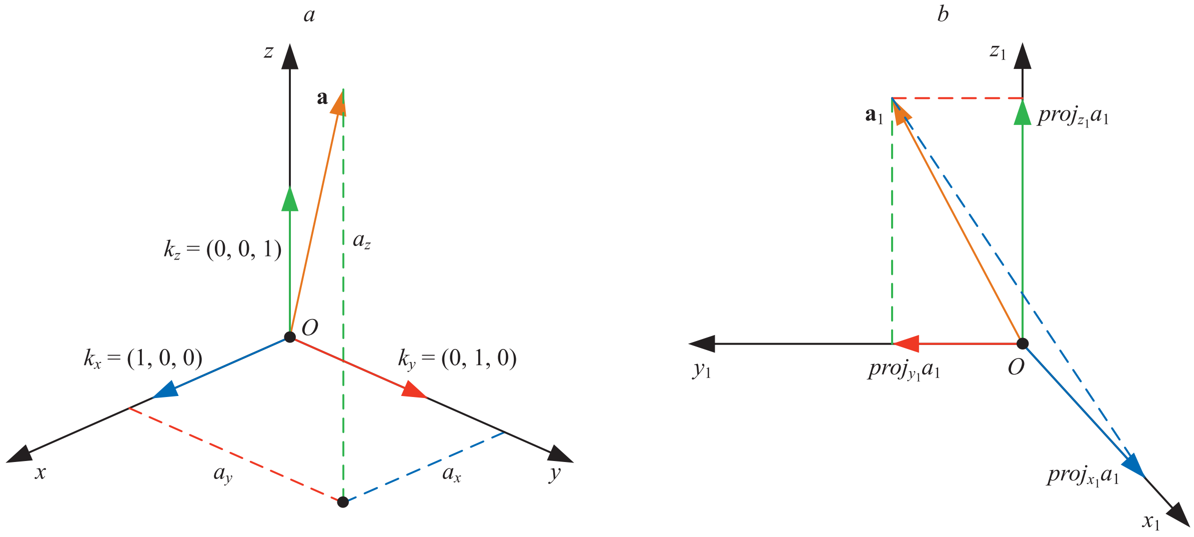

Рис. 2. Преобразования координат при вращении: исходное положение вектора **a** (*a*); вектор $\mathbf{a}_1$ в новом базисе (*b*)

Fig. 2. Coordinate transformation during rotation: the initial position of the vector **a** (*a*); the vector $\mathbf{a}_1$ in the new basis (*b*)

Для определения пространственной ориентации вектора $\mathbf{a}_1$ в соответствии с выражением (5) найдем величину координатных орт, которые являются неизвестными величинами. Введенные ограничения позволяют отказаться от необходимости составления и решения сложной системы линейных уравнений. Это дает возможность осуществить переход от системы координат $Oxyz$ к системе $Ox_1y_1z_1$ путем нахождения проекций вектора $\mathbf{a}_1$ на соответствующие оси системы $Ox_1y_1z_1$ и с учетом выражения (5). При этом выражения перехода из базиса (4) в новый базис могут быть преобразованы к виду:

$$x_1 = \frac{proj_{x_1}a}{|x_1|},\quad y_1 = \frac{proj_{y_1}a}{|y_1|},\quad z_1 = \frac{proj_{z_1}a}{|z_1|}. \tag{7}$$

С учетом выражения (4), из выражения (7), при условии наложенного ограничения 2, значение x_1 (для значений y_1 и z_1 аналогично) примет вид:

$$x_1 = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1\cdot\mathbf{x}_1}\mathbf{x}. \tag{8}$$

Обобщая полученные выражения (6) и (8), с учетом того, что вектор $\mathbf{x}_1$ и его скалярное произведение, выражение (7) представим в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= proj_x a\cdot proj_x x_1 + proj_y a\cdot proj_y x_1 + proj_z a\cdot proj_z x_1,\\ y_1 &= proj_x a\cdot proj_x y_1 + proj_y a\cdot proj_y y_1 + proj_z a\cdot proj_z y_1,\\ z_1 &= proj_x a\cdot proj_x z_1 + proj_y a\cdot proj_y z_1 + proj_z a\cdot proj_z z_1. \end{aligned} \tag{9}$$

Анализ выражений (9) показал, что пересчет координаты в новый базис представляют собой сумму скалярных произведений проекций на соответствующие оси координат.

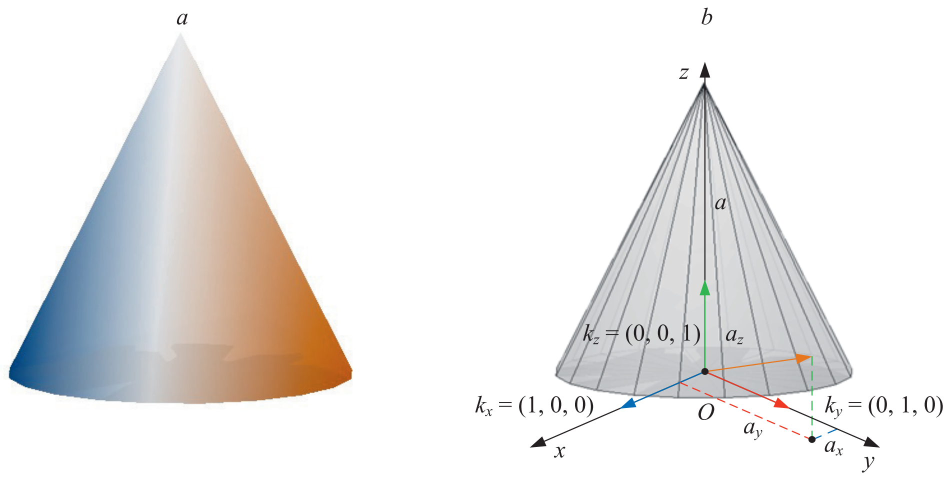

Рис. 3. Исходные изображения поверхностей: на плоскости (*a*) и с использованием простых фигур (*b*)

Fig. 3. The original image: a surface on a plane (*a*); a surface using simple shapes (*b*)

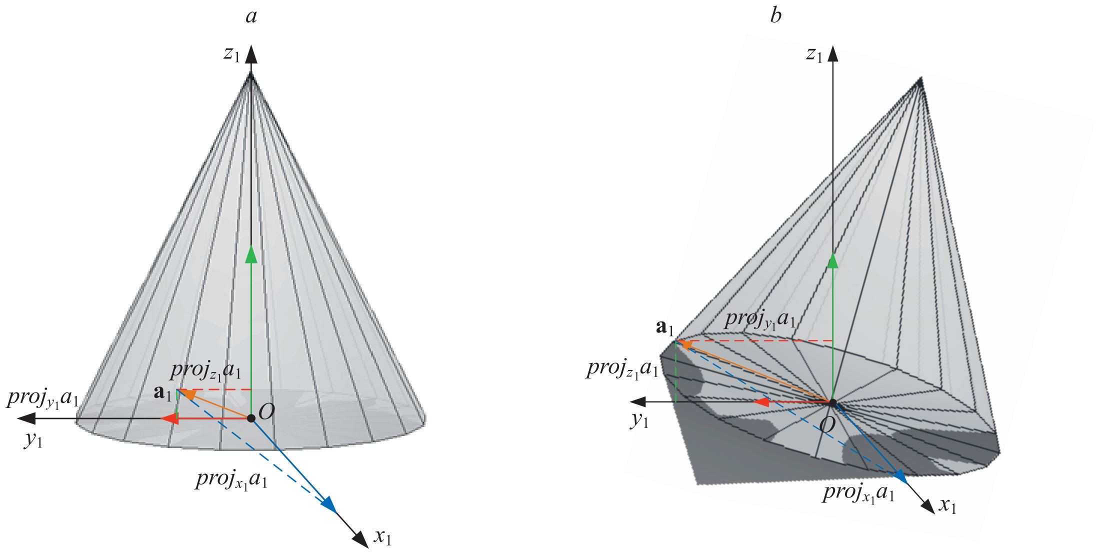

Рис. 4. Примеры вращения в нескольких плоскостях: *yz* (*a*) и *xyz* (*b*)

Fig. 4. Example of rotation in several planes: *yz* rotation (*a*); *xyz* rotation (*b*)

Результаты численного эксперимента

Для проверки корректности полученных выражений выполним численный эксперимент. В качестве исходного объекта для вращения выберем модель конуса в формате *.off (geomview object file format). Особенность данного формата — интуитивная простота и удобство отображения пространственных поверхностей на плоскости (рис. 3, *a*), а также наличие их в свободном доступе [17]. Выбор модели обусловлен тем, что для ее построения одновременно использовано несколько простых плоских фигур (рис. 3, *b*), что позволяет более полно оценить полученные результаты.

Применение полученных выражений (9) позволило осуществить вращение пространственной поверхности в пространстве и отобразить на плоскости. Проведем сравнение примеров полученных изображений (рис. 4) и представления координат при вращении поверхности (рис. 2).

Представленные результаты показали, что полученные выражения корректно осуществляют пересчет геометрии простых фигур в процессе вращения поверхности.

Заключение

Получены математические выражения, позволяющие решить задачу вращения объемного изображения. Выражения представляют собой формализованные в классе линейных векторно-матричных уравнений соотношения, которые математически строго и однозначно описывают поворот вектора в пространстве. Предложенные математические записи сферического вращения твердого тела с неподвижным центром массы являются лаконичными. В их основе лежит операция скалярного умножения.

Литература

1. Ковалев Ф.Н. Определение координат движущихся целей по измерениям доплеровской частоты в радиолокационных системах с обнаружением на «просвет» // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 3. С. 331–339.
2. Biyakhman A.B., Burov V.N., Myakinkov A.V., Ryndyk A.G. Detection of unmanned aerial vehicles via multi-static forward scattering radar with airborne transmit positions // Proc. of the 2014 International Radar Conference. 2014. P. 1–5. https://doi.org/10.1109/radar.2014.7060334
3. Кузьмин С.З. Цифровая радиолокация. Введение в теорию. Киев: КВИЦ, 2000. 428 с.
4. Калитин С.Б., Шарамет А.В., Морозов Д.В. Кинематическое определение координат радиоизлучающей воздушной цели по угловым измерениям // Вестник Военной академии Республики Беларусь. 2016. № 3(52). С. 50–56.
5. Gashinova M., Daniel L., Cherniakov M., Lombardo P., Pastina D., De Luca A. Multistatic Forward Scatter Radar for accurate motion parameters estimation of low-observable targets // Proc. of the 2014 International Radar Conference. 2014. P. 1–4. https://doi.org/10.1109/radar.2014.7060336

References

1. Kovalev F.N. Determining the coordinates of moving targets using Doppler frequency measurements in radar systems with forward-scattering detection. *Journal of Radio Electronics*, 2007, vol. 52, no. 3, pp. 331–339. (in Russian)
2. Biyakhman A.B., Burov V.N., Myakinkov A.V., Ryndyk A.G. Detection of unmanned aerial vehicles via multi-static forward scattering radar with airborne transmit positions. *Proc. of the 2014 International Radar Conference*, 2014, pp. 1–5. https://doi.org/10.1109/radar.2014.7060334
3. Kuzmin S.Z. *Digital radiolocation. Introduction to Theory*. Kiev, Yzdatel'stvo Kvyts, 2000, 248 p. (in Russian)
4. Kalitin S.B., Sharamet A.V., Morozov D.V. Kinematic determination of the coordinates of a radio-emitting aerial target using angular measurements. *Vestnik Voennoj akademii Respubliki Belarus'*, 2016, no. 3(52), pp. 50–56. (in Russian)
5. Gashinova M., Daniel L., Cherniakov M., Lombardo P., Pastina D., De Luca A. Multistatic Forward Scatter Radar for accurate motion parameters estimation of low-observable targets. *Proc. of the 2014 International Radar Conference*, 2014, pp. 1–4. https://doi.org/10.1109/radar.2014.7060336

6. Верба В.С. Авиационные комплексы радиолокационного дозора и наведения. Состояние и тенденции развития. М.: Радиотехника, 2008. 432 с.
7. Калитин С.Б., Пащенко К.К. Конструктивные методы определения координат объектов в многопозиционных измерительных системах. Минск: ВА РБ, 2018. 198 с.
8. Ковалев Ф.Н. Потенциальная точность определения координат цели при локации «на просвет» с учетом нелинейного характера движения цели // Труды Нижегородского государственного технического университета. 2007. Т. 65. № 14. С. 75–79.
9. Шарамет А.В. Информационное обеспечение систем защиты летательных аппаратов от управляемых средств поражения. М: Горячая линия – Телеком, 2023. 167 с.
10. Abashin A.E., Bol'shakov O.S., Vdovin V.F., Kovalev F.N., Kuz'min L.S., Lesnov I.V., Morugin S.L., Mukhin A.S., Shiryaev M.V. Cold electron bolometers: high-precision sensors of extremely weak signals in terahertz wave band // Automation and Remote Control. 2013. V. 74. N 1. P. 123–127. https://doi.org/10.1134/s0005117913010116
11. Ryndyk A.G., Myakinkov A.V., Smirnova D.M., Burakov S.V. Algorithm of space-time processing in multi-static forward scattering radar // Proc. of the 14th International Radar Symposium (IRS). 2013. P. 614–619.
12. Лапука О.Г., Пащенко К.К. Анализ и синтез в классе дискретных конечномерных систем. Минск: ВА РБ, 2010. 372 с.
13. Бондарь И.М., Бондарь А.И. Построение приближенных моделей сферического движения твердого тела // Вычислительные технологии. 2007. Т. 12. № 4. С. 27–41.
14. Зайцев Д.В. Многопозиционные радиолокационные системы. Методы и алгоритмы обработки информации в условиях помех. М.: Радиотехника, 2007. 96 с.
15. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. М.: ЧеРо, 1999. 572 с.
16. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1974. 832 с.
17. Burkardt J. OFF Files Geomview Object File Format [Электронный ресурс]. URL: https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/data/off/off.html (дата обращения: 22.06.2023).

6. Verba V.S. *Aviation Radar Surveillance and Guidance Systems. Status and Development Trends*. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2008, 432 p. (in Russian)
7. Kalitin S.B., Pashchenko K.K. *Constructive Methods for Determining Object Coordinates in Multi-Position Measurement Systems*. Minsk, Voennaja akademija Respubliki Belarus', 2018, 198 p. (in Russian)
8. Kovalev F.N. Potential accuracy of determining target coordinates at forward-scattering locating, taking into account the nonlinear nature of the target's movement. *Trudy Nizhegorodskogo gosudarstvennogo tehnicheskogo universiteta*, 2007, vol. 65, no. 14, pp. 75–79. (in Russian)
9. Sharamet A.V. *Information Support for Aircraft Protection Systems Against Guided Weapons*. Moscow, Gorjachaja linija — Telekom Publ., 2023, 167 p. (in Russian)
10. Abashin A.E., Bol'shakov O.S., Vdovin V.F., Kovalev F.N., Kuz'min L.S., Lesnov I.V., Morugin S.L., Mukhin A.S., Shiryaev M.V. Cold electron bolometers: high-precision sensors of extremely weak signals in terahertz wave band. *Automation and Remote Control*, 2013, vol. 74, no. 1, pp. 123–127. https://doi.org/10.1134/s0005117913010116
11. Ryndyk A.G., Myakinkov A.V., Smirnova D.M., Burakov S.V. Algorithm of space-time processing in multi-static forward scattering radar. *Proc. of the 14th International Radar Symposium (IRS)*, 2013, pp. 614–619.
12. Lapuka O.G., Pashchenko K.K. *Analysis and Synthesis in the Class of Discrete Finite-Dimensional Systems*. Minsk, Voennaja akademija Respubliki Belarus', 2010, 372 p. (in Russian)
13. Bondar I.M., Bondar A.I. On the first approximation models for the movements of the spherical solid body. *Computational Technologies*, 2007, vol. 12, no. 4, pp. 27–41. (in Russian)
14. Zaitcev D.V. *Multi-Position Radar Systems. METHODS and Algorithms for Processing Information under Noise Conditions*. Moscow, Radiotekhnika Publ., 2007, 96 p. (in Russian)
15. Markeev A.P. *Theoretical Mechanics*. Moscow, CheRo Publ., 1999, 572 p. (in Russian)
16. Korn G.A., Korn T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*. McGraw-Hill, 1961, 943 p.
17. Burkardt J. *OFF Files Geomview Object File Format*. Available at: https://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/data/off/off.html (accessed: 22.06.2023).

Авторы

Шарамет Андрей Владимирович — кандидат технических наук, доцент, начальник тематического отдела, ОАО «КБ Радар» — управляющая компания холдинга «Системы радиолокации», Минск, 220026, Республика Беларусь; докторант, Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники, Минск, 220062, Республика Беларусь, https://orcid.org/0000-0003-0950-8700, a.sharamet@kbradar.by

Лысый Андрей Николаевич — старший научный сотрудник, ОАО «КБ Радар» — управляющая компания холдинга «Системы радиолокации», Минск, 220026, Республика Беларусь, https://orcid.org/0009-0006-7430-3663, a.lysyj@kbradar.by

Authors

Andrei V. Sharamet — PhD, Associate Professor, Head of Department, JSC "KB Radar" — Managing Company of "Radar Systems" Holding, Minsk, 220026, Republic of Belarus; Doctoral Student, Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, 220062, Republic of Belarus, https://orcid.org/0000-0003-0950-8700, a.sharamet@kbradar.by

Andrei N. Lysy — Senior Researcher, JSC "KB Radar" – Managing Company of "Radar Systems" Holding, Minsk, 220026, Republic of Belarus, https://orcid.org/0009-0006-7430-3663, a.lysyj@kbradar.by

Статья поступила в редакцию 01.06.2023
Одобрена после рецензирования 12.08.2023
Принята к печати 17.09.2023

Received 01.06.2023
Approved after reviewing 12.08.2023
Accepted 17.09.2023