

УДК 517.958:532.5

**РЕАЛИСТИЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СВОБОДНОЙ ВОДНОЙ  
ПОВЕРХНОСТИ НА АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ  
ТИПА «ВОСЬМЕРИЧНОЕ ДЕРЕВО»**

**К.Д. Никитин**

Предлагается эффективная технология моделирования течения вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. В технологии объединены проекционный метод для решения уравнений Навье–Стокса и метод функции уровня и частиц для работы со свободной поверхностью. Расчет проводится на адаптивно сгущающихся гексаэдральных сетках типа «восьмеричное дерево».

**Ключевые слова:** вычислительная технология, течения со свободной поверхностью, компьютерная графика.

**Введение**

Моделирование течений несжимаемой жидкости привлекает большой интерес в научном сообществе. Рассматриваемые задачи включают моделирование морских волн, заливание и обтекание объектов, падение капель, образование брызг и многое другое. Моделирование подобных явлений – технологически сложная задача ввиду того, что необходимо отслеживать динамику жидкости в постоянно изменяющейся области.

Одна из важных сфер, где востребовано моделирование течений со свободной поверхностью – это компьютерная графика. Задачи компьютерной анимации ставят зачастую противоречивые требования. С одной стороны, технология должна быть эффективной с вычислительной точки зрения, поскольку необходимо проводить множество запусков с разными параметрами за разумное время. С другой стороны, детализация должна быть достаточно высокой, чтобы достичь визуальной реалистичности.

Течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса. Возможным компромиссом между сложностью, реалистичным поведением и контролем над потоком является технология, разрабатываемая в последние десятилетия группами специалистов, занимающихся компьютерной графикой [1–4]. В ее основе лежит проекционный метод [5, 6], используемый для приближенного решения системы уравнений Навье–Стокса. Для работы со свободной поверхностью предлагается использовать два взаимодополняющих подхода: метод частиц и метод функции уровня [7].

Предлагаемая технология включает в себя задание начальной трехмерной сцены, моделирование и реалистичное отображение жидкости. Поскольку положение свободной поверхности оказывает большое влияние на динамику жидкости, а также является важным результатом моделирования, предлагается использовать адаптивные сетки, сгущающиеся к поверхности. Использование гексаэдральных разнесенных сеток, построенных по принципу восьмеричного дерева, позволяет динамически перестраивать сетку, сгущая ее к свободной поверхности в каждый момент времени. Кроме того, такие сетки имеют оптимальное число степеней свободы, что также влияет на численную эффективность предлагаемой технологии.

В данной работе последовательно предлагаются базовые уравнения, описывается алгоритм решения и численные методы, используемые для приближенного решения уравнений, приводятся результаты, иллюстрирующие работу алгоритма.

**Постановка задачи и базовые уравнения**

Рассматривается система уравнений Навье–Стокса, описывающая движение несжимаемой жидкости в области  $\Omega$ . Она состоит из уравнений момента и несжимаемости:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$
(1)

где  $\nu$  – кинематическая вязкость,  $t$  – время,  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  – поле скоростей,  $p$  – давление, а  $\mathbf{f}$  – объемные силы, действующие на жидкость (например, сила тяжести).

Стоит отметить, что граница  $\partial\Omega$  области  $\Omega$ , которую занимает жидкость, состоит из двух частей: неподвижная граница (стенки сосуда) и перемещающаяся по инерции свободная поверхность. На неподвижной границе поле скоростей удовлетворяет условию Дирихле. Оно может быть как однородным (условие прилипания), так и неоднородным (например, втекающий поток). Для свободной поверхности может быть задано соотношение между давлением жидкости и силами поверхностного натяжения.

Для описания положения свободной границы вводятся функция уровня и частицы. Поверхность определяется множеством точек  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , где функция уровня  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ . Для области, заполненной жидкостью, верно  $\varphi(\mathbf{x}) < 0$ , в то время как для воздушной части выполняется  $\varphi(\mathbf{x}) > 0$ . Продвижение свободной поверхности описывается уравнением переноса функции уровня:

$$\varphi_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \varphi = 0.$$
(2)

В ряде приложений требуется инициализировать функцию уровня как расстояние до поверхности со знаком и поддерживать это свойство на протяжении расчета. Помимо определения положения поверхности, функция уровня также несет в себе информацию о ее геометрии: единичная нормаль к поверхности определяется по формуле  $\mathbf{n} = \nabla \varphi / |\nabla \varphi|$ , а локальная кривизна есть  $k = \nabla \cdot \mathbf{n}$ .

Чтобы отслеживать мелкие элементы, которые не могут быть описаны функцией уровня, используются специальные невесомые частицы, переносимые полем скоростей. Частицы перемещаются с потоком жидкости по закону  $d\mathbf{x}_p / dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}_p)$  и несут с собой небольшой объем воздуха или жидкости, благодаря чему могут корректировать функцию уровня в случаях, когда это необходимо.

### Описание алгоритма

Прежде чем начать расчет, необходимо задать первоначальное состояние задачи: границы расчетной области, начальное положение свободной поверхности, поле скоростей в объеме жидкости и на границе. Задание начального состояния и границ возможно как с помощью аналитических функций, так и с помощью поверхностных триангуляций для объектов и начального объема жидкости.

Для приближенного решения уравнений Навье–Стокса (1) с подвижной границей (2) существует несколько подходов разной степени сложности: от метода дробных шагов [3] до полностью неявных схем [8]. В данной работе используется метод дробных шагов как наименее сложный с вычислительной точки зрения. Подробное описание шагов алгоритма можно найти в [9, 10]. Временной шаг метода состоит из следующих подшагов:

1. обновление поля скоростей:
  - решение уравнения моментов (конвективный перенос, действие диффузии и объемных сил);
  - проекция на подпространство бездивергентных скоростей;
2. обновление положения свободной поверхности:
  - продвижение функции уровня;
  - продвижение частиц;
  - взаимная корректировка частиц и функции уровня;
  - реинициализация (восстановление функции уровня как расстояния до поверхности со знаком);
3. продвижение области;
4. перестроение сетки.

Отметим, что первый подшаг представляет собой вариант проекционного метода для задачи Навье–Стокса с фиксированной границей. В качестве таковой выступает свободная поверхность, взятая с предыдущего момента времени. Проекционный метод применяется в два этапа. На шаге-предикторе решается уравнение моментов. Конвективный перенос осуществляется с помощью полу-Лагранжева метода, диффузия и объемные силы накладываются явным образом. Для того чтобы сделать полученное поле скоростей  $\mathbf{u}^\circ$  бездивергентным, вводится коррекция давления, получаемая при решении сеточного уравнения Пуассона, и с ее помощью корректируется поле скоростей:

$$-\nabla \cdot (\nabla \delta p) = -\frac{1}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^\circ), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ - \Delta t \cdot \nabla \delta p.$$

На втором подшаге алгоритма меняется положение свободной границы. Используя новое положение поверхности, определяется часть расчетной области, заполненная жидкостью, а также зоны, в которых должна сгущаться сетка.

Одной из самых важных частей алгоритма является шаг реинициализации. Напомним, что функция уровня отрицательна внутри жидкости и положительна вне нее. Многие приложения требуют, чтобы, помимо этого, функция уровня являлась расстоянием до свободной поверхности со знаком, поэтому имеет смысл стартовать с такой функции и периодически восстанавливать это свойство. Чтобы восстановить функцию уровня как расстояние до поверхности со знаком, сохранив при этом положение свободной границы, необходимо решить уравнение эйконала:

$$\begin{cases} |\nabla\varphi(\mathbf{x})| = 1, & \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega_{air}, \\ \varphi(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \delta\Omega, \end{cases}$$

где  $\Omega_{air}$  – область, заполненная воздухом.

Сначала получается начальное приближение в поверхностных ячейках, для чего строится триангуляция свободной поверхности по методу марширующих кубов (Marching Cubes) [11]. После этого решается уравнение эйконала во всей остальной области при помощи быстро идущего метода (Fast Marching Method) [5].

Для некоторых шагов алгоритма, таких как перенос скоростей, функции уровня и частиц, а также перестроения сетки, написана параллельная версия с использованием технологии OpenMP. Для решения системы, которую дает сеточное уравнение Пуассона на шаге проекции, используется пакет PETSc.

### Результаты

Описанная технология моделирования использовалась при создании всех графических примеров, приведенных в этой работе. На рис. 1 можно видеть процесс заливания стаканом воды. На рис. 1 изображена модель Армадильо (Броненосца). Модель задана при помощи триангуляции (рис. 1, а), состоящей из 346 тыс. треугольников. В качестве начального значения функции уровня (рис. 1, б) задается расстояние до поверхности модели со знаком. После этого в полученный объем жидкости ударяет струя воды (рис. 1, в, г).

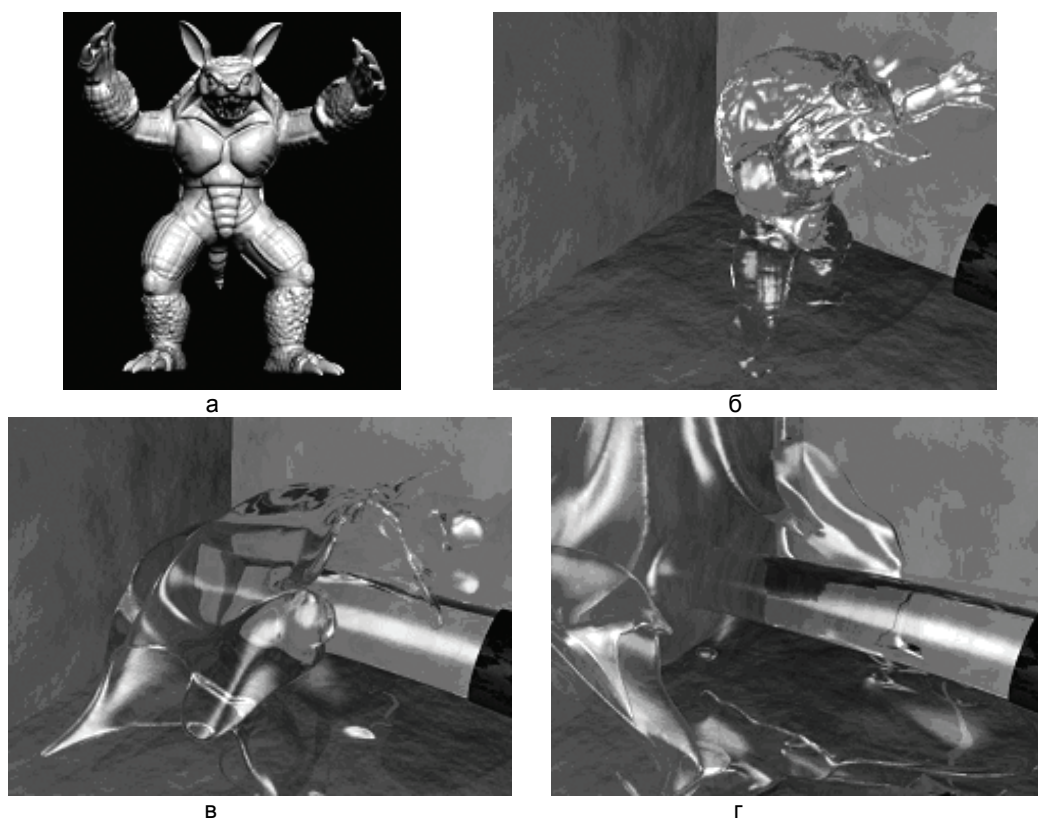


Рис. 1. Модель Армадильо (а), преобразованная в жидкость (б), в которую ударяет струя воды (в, г)

В таблице приведена зависимость числа элементов ( $N$  – общее число расчетных ячеек;  $N_w$  – число ячеек, заполненных водой) и времени работы подшагов алгоритма от шага сетки ( $t_{init}$  – время построения начального положения и инициализации данных;  $t_{total}$  – время одного шага алгоритма;  $t_{adv}$  – перенос скоростей;  $t_{proj}$  – проекция на бездивергентное подпространство скоростей;  $t_{fillair}$  – экстрапо-

ляция скоростей с поверхности в воздух;  $t_{ls}$  – перенос функции уровня;  $t_{part}$  – перенос частиц и коррекция функции уровня;  $t_{mesh}$  – перестроение сетки;  $t_{reinit}$  – реинициализация). Видно, что время выполнения одного шага алгоритма пропорционально числу ячеек, заполненных водой, и обратно пропорционально квадрату шага сетки вблизи поверхности. Расчеты проводились на рабочей станции с двумя 4-ядерными процессорами Intel Xeon X5355@2.66ГГц.

$h_{min}$	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512
$N(N_w)$ , число элементов	37 409 (1768)	54 377 (7842)	121 101 (36 022)	381 305 (159 211)	1 404 439 (684 521)
$t_{init}$ , с	10,5	13,2	24,2	66,9	237,2
$t_{adv}$ , с	0,18	0,77	3,53	15,74	66,1
$t_{proj}$ , с	0,20	0,60	2,10	8,66	35,9
$t_{fillair}$ , с	0,11	0,35	1,32	5,12	19,9
$t_{ls}$ , с	0,03	0,06	0,23	0,98	3,9
$t_{part}$ , с	0,07	0,24	1,03	4,37	18,4
$t_{reinit}$ , с	0,12	0,26	1,00	4,43	19,9
$t_{mesh}$ , с	0,10	0,21	0,68	2,42	9,6
$t_{total}$ , с	0,81	2,49	9,89	41,72	173,7

Таблица. Зависимость числа элементов и времени работы подшагов алгоритма от шага сетки  $h_{min}$

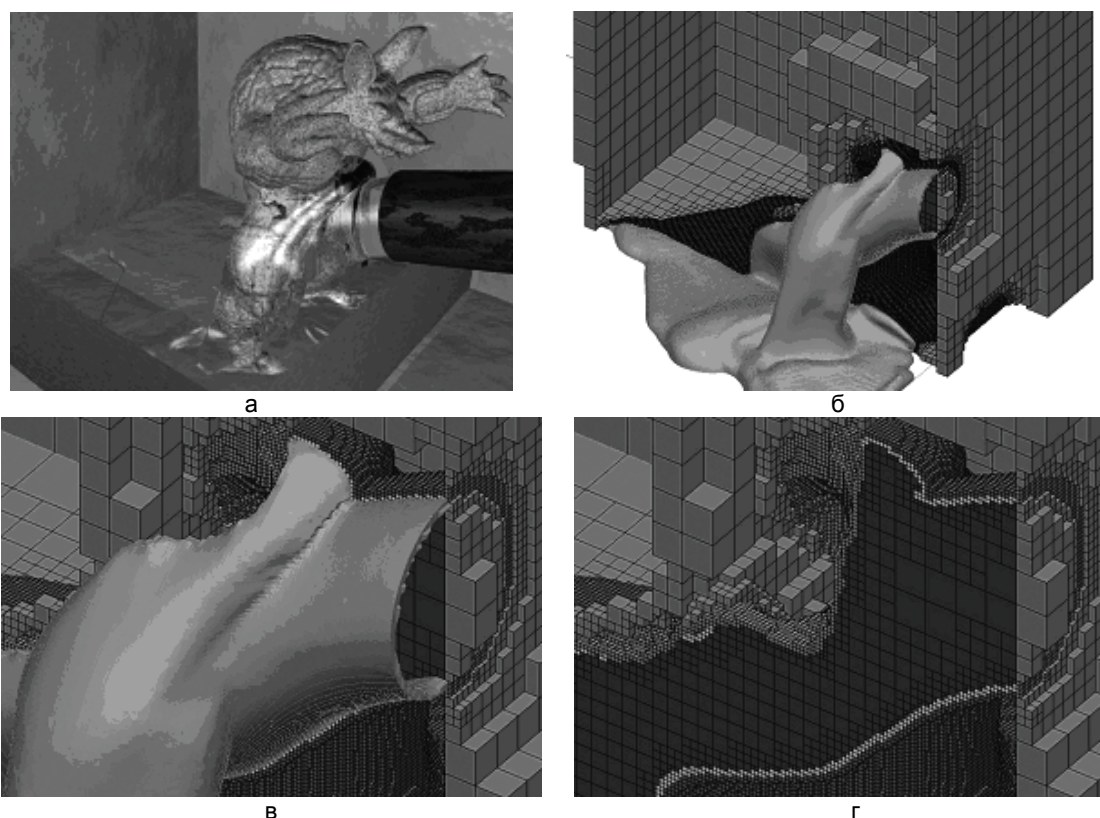


Рис. 2. Модель Армадильо, заданная в качестве неподвижного препятствия и обтекаемая потоком жидкости: итоговое изображение (а) и срезы расчетной сетки с поверхностью (б, в) и без (г)

В примере на рис. 2 используется модель Армадильо из предыдущего примера для задания неподвижных границ расчетной области. Кубическая область с заданным препятствием заполняется потоком воды. Показано итоговое изображение (рис. 2, а) и разрезы расчетной сетки с поверхностью (рис. 2, б, в) и без (рис. 2, г).

### **Заключение**

В работе предложена эффективная вычислительная технология моделирования трехмерных течений со свободной поверхностью. Благодаря использованию метода дробных шагов и динамически сгущающихся и разгружающихся расчетных сеток удается проводить симуляции за приемлемое время (от нескольких часов до суток). Разработанная технология предлагает удобный инструментарий, который может быть полезен в различных приложениях, начиная от компьютерной графики и заканчивая медициной, например, моделирование течений в кровеносных сосудах.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 08-01-00159-а, 09-01-00115-а, программы Президиума РАН 21П «Фундаментальные науки – медицине» и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» 2009–2013 годы.

Автор выражает благодарность К.М. Терехову за помощь в доработке программного кода, а также Ю.В. Василевскому, А.А. Данилову, М.А. Ольшанскому и В.А. Лещинскому за ценные советы и участие в обсуждении спорных моментов и постановки задачи.

### **Литература**

1. Carlson M. Rigid, Melting, and Flowing Fluid, PhD thesis, Georgia Institute of Technology, 2004.
2. Osher S., Fedkiw R. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces. – Springer-Verlag, 2002.
3. Osher S. and J.Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton-Jacobi equations // Jour. Comp. Phys. – 1988. – V. 79. – P. 12–49.
4. Sethian J.A. Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
5. Chorin A. Numerical solution of the Navier-Stokes equations // Math. Comp. – 1968. – V. 22. – P. 745–762.
6. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. – Новосибирск: Наука, 1967.
7. Enright D., Fedkiw R., Ferziger J., Mitchell I. A hybrid particle level set method for improved interface capturing // J. Comp. Phys. – 2002. – V.183. – P. 83–116.
8. Gross S., Reichelt V., Reusken A. A Finite Element Based Level Set Method for Two-Phase Incompressible Flows. Computing and Visualization in Science, 2006.
9. Никитин К.Д. Технология расчета течений со свободной границей с использованием динамических гексаэдральных сеток. Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии // Сборник научных трудов / Под ред. Вл.В. Воеводина и Е.Е. Тыртышников. – М.: Изд-во МГУ, 2008. – С. 183–198.
10. Nikitin K., Vassilevski Yu. Free surface flow modelling on dynamically refined hexahedral meshes // RJNAMM. – 2008. – V. 23. – P. 469–485.
11. Lachaud J.-O. Topologically defined iso-surfaces // DGCI. – 1996. – P. 245–256.

*Никитин Кирилл Дмитриевич* – Институт вычислительной математики РАН, аспирант, [nikitink@dubki.ru](mailto:nikitink@dubki.ru)