

УДК 681.51.015

## АЛГОРИТМ УПРАВЛЕНИЯ ПО ВЫХОДУ С КОМПЕНСАЦИЕЙ СИНУСОИДАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМИ И СТРУКТУРНЫМИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯМИ<sup>2</sup>

А.А. Бобцов, С.А. Колубин, А.А. Пыркин

Рассматривается задача стабилизации по выходу линейного объекта, подверженного влиянию внешнего неизвестного синусоидального возмущения. Решение задачи получено для класса линейных систем, функционирующих в условиях параметрической и структурной неопределенностей.

**Ключевые слова:** управление по выходу, компенсация возмущений, параметрическая и структурная неопределенность.

### Введение

Компенсация синусоидальных возмущающих воздействий является актуальной и популярной задачей современной теории управления (например, [1–15]). Большинство исследований, связанных с разработкой методов компенсации гармонических возмущений, изучают случай, когда амплитуды, фазы и частоты являются неизвестными постоянными параметрами (например, [1–14]). В частности, работы [3, 4] являются одними из первых работ отечественных ученых, где была поставлена и решена задача адаптивной компенсации неизвестных гармонических возмущений. В настоящее время при различных допущениях относительно модели объекта рассматриваются различные случаи задач управления, а именно: линейность или нелинейность динамики, параметрическая определенность или ее отсутствие, доступность измерений всех переменных состояния или только их части и пр. Несмотря на то, что в фундаментальной монографии [2], посвященной методам компенсации возмущений, большинство подходов было изложено, кратко рассмотрим некоторые новые результаты.

В [5] предлагается алгоритм управления линейным устойчивым объектом с известными параметрами и единичной относительной степенью, подверженным влиянию смещенного гармонического возмущения. В отличие от [5], в [8] рассмотрен алгоритм компенсации возмущающего воздействия для случая неминимально фазового линейного объекта с известными параметрами, но любой относительной степени. Работы [9, 10, 14] посвящены парированию синусоидального возмущения в условиях полной параметрической неопределенности объекта управления. Выстроен адаптивный регулятор, базирующийся только на измерениях выходной переменной. В [9, 10] рассмотрен линейный объект, а в [14] – нелинейный. Однако в [9, 10, 14] допускается, что относительная степень известна и равна единице. В [12, 13] данная задача распространена на линейные объекты с известными параметрами, но с запаздыванием в канале управления.

В настоящей работе предлагается новый алгоритм управления по выходу параметрически неопределенным линейным объектом, подверженным влиянию гармонического возмущения  $\delta(t) = \mu \sin(\omega t + \varphi)$  с неизвестными амплитудой и фазой. Данный подход основан на методе операторного синтеза компенсации возмущения, который был опубликован в [15]. По мнению авторов, несмотря на то, что частота  $\omega$  известна, решаемая в этой работе задача развивает подходы, опубликованные в [1–15], поскольку допускается, что относительная степень объекта, как и его параметры, может быть неизвестна.

### Постановка задачи

Рассмотрим линейный объект управления вида

$$a(p)y(t) = b(p)u(t) + c(p)\delta(t), \quad (1)$$

где  $p = d/dt$  – оператор дифференцирования; параметры полиномов  $a(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + a_{n-2}p^{n-2} + \dots + a_0$ ,  $b(p) = b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + b_{m-2}p^{m-2} + \dots + b_0$  и  $c(p) = c_l p^l + c_{l-1}p^{l-1} + c_{l-2}p^{l-2} + \dots + c_0$  неизвестные числа, а  $\delta(t) = \mu \sin(\omega t + \varphi)$  – возмущающее воздействие с неизвестными амплитудой  $\mu$  и фазой  $\varphi$ .

Цель управления – найти такой сигнал  $u = u(y)$ , чтобы было выполнено целевое условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (2)$$

Данную задачу будем решать при следующих допущениях.

*Допущение 1.* Полином  $b(p)$  гурвицев, и коэффициент  $b_0 > 0$ .

*Допущение 2.* Известно максимальное значение относительной степени  $r^*$ , но не размерности полиномов  $a(p)$  и  $b(p)$ , и сама относительная степень  $r = n - m$ .

<sup>2</sup> Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт № 16.740.11.0553).

Допущение 3. Известна частота  $\omega$  возмущения  $\delta(t) = \mu \sin(\omega t + \varphi)$ .

### Предварительный результат

Следуя [15], представим уравнение (1) в виде

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)}U(s) + \frac{c(s)}{a(s)}\Psi(s) + \frac{D(s)}{a(s)}, \quad (3)$$

где  $s$  – комплексная переменная Лапласа;  $Y(s) = L\{y(t)\}$ ,  $U(s) = L\{u(t)\}$  и  $\Psi(s) = L\{\delta(t)\} = \frac{\mu_1 s + \mu_2}{s^2 + \omega^2}$  – изображения по Лапласу соответствующих сигналов,  $\mu_1 = \mu \sin \varphi$  и  $\mu_2 = \mu \cos \varphi$ ; полином  $D(s)$  обозначает сумму всех членов, содержащих начальные условия.

Временно предположим, что измеряются все необходимые производные выходного сигнала  $y(t)$ , а коэффициенты полиномов  $a(p)$  и  $b(p)$  известны. Предполагая, что относительная степень  $r$  известна, выберем закон управления  $u(t)$  следующим образом:

$$u(t) = -k \frac{\alpha(p)(p+1)^2}{p^2 + \omega^2} y(t), \quad (4)$$

где гурвицев полином  $\alpha(p)$  степени  $r^*-1$  и постоянный коэффициент  $k > 0$  выбираются из соображений строгой вещественной положительности передаточной функции (например, [16, 17]):

$$H(s) = \frac{b(s)\alpha(s)(s+1)^2}{a(s)(s^2 + \omega^2) + kb(s)\alpha(s)(s+1)^2}.$$

**Замечание 1.** В [16, 17] было показано, что для любого гурвицева полинома  $\alpha(p)$  существует в общем случае достаточно большой постоянный коэффициент  $k > 0$  такой, что передаточная функция  $H(s)$  удовлетворяет условиям строгой вещественной положительности. Для известных коэффициентов полиномов  $a(p)$  и  $b(p)$  поиск коэффициента  $k > 0$  является несложной задачей.

Тогда, подставляя изображение по Лапласу для (4) в уравнение (3), получаем

$$Y(s) = -k \frac{b(s)\alpha(s)(s+1)^2}{a(s)(s^2 + \omega^2)} Y(s) + \frac{c(s)}{a(s)} \frac{\mu_1 s + \mu_2}{s^2 + \omega^2} + \frac{D(s)}{a(s)}$$

и

$$Y(s) = (\mu_1 s + \mu_2) \frac{c(s)}{\gamma(s)} + \frac{D(s)(s^2 + \omega^2)}{\gamma(s)},$$

где полином  $\gamma(s) = a(s)(s^2 + \omega^2) + kb(s)\alpha(s)(s+1)^2$  – гурвицев в силу строгой вещественной положительности передаточной функции  $H(s)$ .

Осуществляя обратное преобразование Лапласа для  $Y(s)$ , имеем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0.$$

### Основной результат

Однако производные выходного сигнала  $y(t)$  не измеряются, а коэффициенты полиномов  $a(p)$  и  $b(p)$  неизвестны. В этом случае воспользуемся результатами, опубликованными в [14, 15] и выберем закон управления следующим образом:

$$u(t) = -k \frac{\alpha(p)(p+1)^2 (T_2 p + 1)^{\vartheta}}{(p^2 + \omega^2)(T_1 p + 1)^{\vartheta}} \xi_1(t), \quad (5)$$

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \sigma \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \sigma \xi_3, \\ \dots \\ \dot{\xi}_{r-1} = \sigma(-k_1 \xi_1 - k_2 \xi_2 - \dots - k_{r-1} \xi_{r-1} + k_1 y), \end{cases} \quad (6)$$

где число  $k > 0$  и полином  $\alpha(p)$  выбираются аналогично (4), число  $\sigma > k$ , а коэффициенты  $k_i$  рассчитываются из требований асимптотической устойчивости системы (6) при нулевом входе  $y(t)$ ,  $\vartheta = r^* - r_0$ , параметр  $T_1^{-1}$  должен быть больше коэффициента  $k$  и много меньше  $\sigma$ , параметр  $T_2$  такой, что

$0 < T_2^{-1} \ll T_1^{-1}$ , число  $r_0$  соответствует известному минимальному значению относительной степени:  $0 < r_0 \leq r \leq r^*$ .

**Замечание 2.** Очевидно, что в условиях полной параметрической неопределенности выбор  $T_1^{-1}$ ,  $k$  и  $\sigma$  может вызывать некоторые сложности, поэтому рассмотрим более конструктивное правило расчета этих коэффициентов. Как показано в [17], можно настраивать коэффициент  $k$  по линейному закону до тех пор, пока переменная  $y(t)$  не попадет в некоторую малую область, заданную разработчиком системы. Параметры  $T_1^{-1}$  и  $\sigma$  можно рассчитывать следующим образом:  $T_1^{-1} = k^2$  и  $\sigma = \sigma_0(T_1^{-1})^{2\theta}$ . Очевидно, что при таком расчете коэффициентов регулятора система может быть неустойчивой, но данная схема обеспечивает сходимость выходной переменной  $y(t)$  в некоторую малую область, заданную разработчиком системы.

Подставляя (5) в (1), получаем

$$y(t) = \frac{kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9}{a(p)(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9 + kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9} \varepsilon(t) + \frac{b(p)(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9}{a(p)(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9 + kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9} \delta(t), \quad (7)$$

где  $\varepsilon(t) = y(t) - \xi_1(t)$ .

Запишем (7) следующим образом:

$$y(t) = \frac{kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9}{a(p)(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9 + kb(p)\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9} [\varepsilon(t) + w(t)], \quad (8)$$

где сигнал  $w(t) = \frac{(p^2+\omega^2)(T_1p+1)^9}{k\alpha(p)(p+1)^2(T_2p+1)^9} \delta(t)$ .

Модель близкая к (8), рассматривалась в [18, 19], поэтому воспользуемся результатами [18, 19] и перейдем к форме вход–состояние–выход вида

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{k}\mathbf{b}(\varepsilon + w), \quad (9)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (10)$$

где  $\mathbf{x} \in R^n$  – вектор переменных состояния модели (9), (10);  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{b}$  и  $\mathbf{c}$  – матрицы перехода от модели вход–выход к модели вход–состояние–выход, причем в силу известной леммы Якубовича-Калмана (например, [16]) можно указать симметрическую положительно определенную матрицу  $\mathbf{P}$ , удовлетворяющую двум следующим матричным уравнениям:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}_1, \quad \mathbf{P} \mathbf{b} = \mathbf{c},$$

где  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^T$  – некоторая положительно определенная матрица.

Перепишем (6) в векторно-матричной форме:

$$\dot{\xi} = \sigma(\Gamma \xi + \mathbf{d}y), \quad (11)$$

$$\xi_1 = \mathbf{h}^T \xi,$$

где  $\xi \in R^{r-1}$  – вектор переменных состояния модели (11),  $\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 & \dots & -k_{r-1} \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ k_1 \end{bmatrix}$ ,

$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ , причем матрица  $\Gamma$  – гурвицева в силу расчета коэффициентов  $k_i$  модели (6).

Введем в рассмотрение вектор отклонений

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{h}y - \xi. \quad (12)$$

Дифференцируя уравнение (12), получаем:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{h}\dot{y} - \sigma(\Gamma(\mathbf{h}y - \boldsymbol{\eta}) + \mathbf{d}y) = \mathbf{h}\dot{y} + \sigma\Gamma\boldsymbol{\eta} - \sigma(\mathbf{d} + \Gamma\mathbf{h})y = \mathbf{h}\dot{y} + \sigma\Gamma\boldsymbol{\eta},$$

$$\varepsilon = y - \xi_1 = \mathbf{h}^T \boldsymbol{\eta},$$

где  $\mathbf{d} = -\mathbf{G}\mathbf{h}$ .

Таким образом, имеем систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + k\mathbf{b}(\varepsilon + w), y = c^T x, \quad (13)$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \mathbf{h}\dot{y} + \sigma\mathbf{G}\boldsymbol{\eta}, \varepsilon = \mathbf{h}^T \boldsymbol{\eta}. \quad (14)$$

В силу гурвицевости  $\mathbf{G}$  существует матрица  $\mathbf{N} = \mathbf{N}^T$ , удовлетворяющая уравнению Ляпунова

$$\mathbf{G}^T \mathbf{N} + \mathbf{N}\mathbf{G} = -\mathbf{Q}_2,$$

где  $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{Q}_2^T$  – положительно определенная матрица.

В работах [18, 19] была построена функция Ляпунова вида

$$V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{N}\boldsymbol{\eta} \quad (15)$$

и показано, что для системы (13), (14) существует число  $\sigma \gg k$  такое, что

$$\dot{V} \leq -\lambda V + k^{-1}w^2, \quad (16)$$

где число  $\lambda > 0$ .

Следуя результатам раздела «Предварительный результат», легко показать, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} w(t) = 0$ . Поскольку доказательство аналогично приведенным в [18, 19], не будем повторять его здесь. Так как  $w(t)$  экспоненциально сходится к нулю, то из неравенства (16) следует, что функция (15) стремится к нулю, что означает выполнение целевого условия (2).

### Пример

Рассмотрим числовой пример моделирования предлагаемого алгоритма управления (5), (6) для линейного объекта вида (1) вида

$$[p^3 - 2p - 3]y(t) = [p + 2]u(t) + [-4p + 1]\delta(t), y(0) = -2, \dot{y}(0) = -2, \ddot{y}(0) = 2.$$

Будем полагать, что относительная степень  $r^*$  не превосходит 3, но известно, что относительная степень не меньше 2. Выберем закон управления в соответствии с (5), (6), где  $\alpha(p) = p + 1$ ,  $T_2 = 1$ ,  $\vartheta = 1$ , коэффициент  $k$  настраивается по линейному закону до тех пор, пока переменная  $y(t)$  не попадет в малую область 0,1, параметры  $T_1^{-1}$  и  $\sigma$  рассчитываются в соответствии с замечанием 2, т.е.  $T_1^{-1} = k^2$  и  $\sigma = \sigma_0(T_1^{-1})^2$ , где  $\sigma_0 = 0,8$ . На рисунке представлены переходные процессы в замкнутой системе с возмущением  $\delta(t) = b \sin(3t - 2)$ . На рисунке (а) представлен результат моделирования для выходной переменной  $y(t)$ , а на рисунке (б) – для адаптивно настраивающихся параметров  $k$ ,  $T_1^{-1}$  и  $\sigma$ .

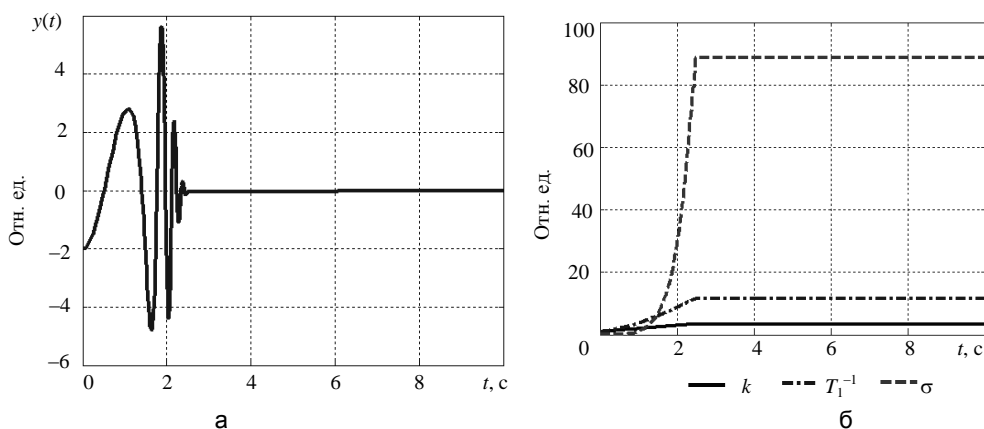


Рисунок. Графики переходных процессов в замкнутой системе: (а) – график функции  $y(t)$ ; (б) – графики функций  $k$ ,  $T_1^{-1}$  и  $\sigma$

### Заключение

Для класса линейных стационарных параметрически и структурно неопределенных объектов вида (1) получаем алгоритм адаптивного управления (5), (6), полностью парирующий влияние синусоидального возмущающего воздействия  $\delta(t) = \mu \sin(\omega t + \varphi)$  с неизвестными амплитудой  $\mu$  и фазой  $\varphi$ . В качестве недостатка отметим, что в представленной работе задача была решена для случая известной частоты  $\omega$  возмущающего воздействия  $\delta(t) = \mu \sin(\omega t + \varphi)$ . Расширение полученного результата на случай неиз-

вестной частоты возможно посредством введения дополнительного канала ее идентификации. При этом подстановка получаемых оценок частоты в контур регулирования может происходить итеративно с использованием схемы с переключениями.

### Литература

1. Bodson M., Douglas S.C. Adaptive algorithms for the rejection of periodic disturbances with unknown frequencies // *Automatica*. – 1997. – V. 33. – P. 2213–2221.
2. Никифоров В.О. Адаптивное и робастное управление с компенсацией возмущений. – СПб: Наука, 2003. – 282 с.
3. Никифоров В.О. Адаптивная стабилизация линейного объекта, подверженного внешним детерминированным возмущениям // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 1997. – № 2. – С. 103–106.
4. Nikiforov V.O. Adaptive non-linear tracking with complete compensation of unknown disturbances // *European Journal of Control*. – 1998. – V. 4. – № 2. – P. 132–139.
5. Marino R., Santosuosso G.L., Tomei P. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency. – *Automatica*. – 2003. – V. 39. – P. 1755–1761.
6. Marino R. and P. Tomei. Output Regulation for Linear Minimum Phase Systems with Unknown Order Exosystem // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2007. – V. 52. – P. 2000–2005.
7. Арановский С.В., Бобцов А.А., Никифоров В.О. Синтез наблюдателя для нелинейного объекта в условиях гармонического возмущения, приложенного к выходной переменной // *Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО*. – 2010. – № 3 (67). – С. 32–38.
8. Бобцов А.А., Кремлев А.С. Алгоритм компенсации неизвестного синусоидального возмущения для линейного не минимально фазового объекта // *Мехатроника, автоматизация, управление*. – 2008. – № 10. – С. 14–17.
9. Бобцов А.А. Алгоритм управления по выходу с компенсацией гармонического возмущения со смещением // *Автоматика и телемеханика*. – 2008. – № 8. – С. 25–32.
10. Бобцов А.А. Адаптивное управление по выходу с компенсацией гармонического смещенного возмущения // *Известия РАН. Теория и системы управления*. – 2009. – № 1. – С. 45–48.
11. Бобцов А.А., Пыркин А.А. Компенсация неизвестного синусоидального возмущения для линейного объекта любой относительной степени // *Автоматика и телемеханика*. – 2009. – № 3. – С. 114–122.
12. Бобцов А.А., Колюбин С.А., Пыркин А.А. Компенсация неизвестного мультигармонического возмущения для нелинейного объекта с запаздыванием по управлению // *Автоматика и телемеханика*. – 2010. – № 11. – С. 115–122.
13. Anton Pyrkin, Andrey Smyshlyaev, Nikolaos Bekiaris-Liberis, Miroslav Krstic. Rejection of Sinusoidal Disturbance of Unknown Frequency for Linear System with Input Delay // *American Control Conference*. – Baltimore, 2010. – P. 5688–5693.
14. Бобцов А.А., Кремлев А.С., Пыркин А.А. Компенсация гармонического возмущения для параметрически и функционально неопределенного нелинейного объекта // *Автоматика и телемеханика*. – 2011. – № 1. – С. 121–129.
15. Лукьянова Г.В., Никифоров В.О. Алгоритм компенсации внешних детерминированных возмущений: операторный метод синтеза // *Научно-технический вестник СПб ГИТМО (ГУ)*. – 2003. – Вып. 10. – С. 5–9.
16. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. – СПб: Наука, 2000. – 549 с.
17. Бобцов А.А., Николаев Н.А. Синтез управления нелинейными системами с функциональными и параметрическими неопределенностями на основе теоремы Фрадкова // *Автоматика и телемеханика*. – 2005. – № 1. – С. 118–129.
18. Бобцов А.А., Шаветов С.В. Управление по выходу линейным параметрически неопределенным объектом в условиях возмущающих воздействий и неучтенной динамики // *Научно-технический вестник СПбГУ ИТМО*. – 2011. – № 1 (71). – С. 32–38.
19. Бобцов А.А., Николаев Н.А. Управление по выходу линейными системами с неучтенной паразитной динамикой // *Автоматика и телемеханика*. – 2009. – № 6. – С. 115–122.

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| <b>Бобцов Алексей Алексеевич</b> | – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, доктор технических наук, профессор, декан, bobtsov@mail.ifmo.ru |
| <b>Колюбин Сергей Алексеевич</b> | – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, s.kolyubin@gmail.com                                  |
| <b>Пыркин Антон Алексеевич</b>   | – Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, ассистент, a.pyrkin@gmail.com        |