

УДК 535.551

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ В ДИСКОВЫХ ОПТИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТАХ

А.Г. Новак, В.А. Трофимов, М.Л. Шванова

Разработана математическая модель полей деформации и напряжений в дисковых оптических элементах, которая позволяет прогнозировать картины интерференции и распределений показателя преломления в плоском элементе оптического диска при механическом воздействии на диск.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, фотоупругость, действие сил, механическое напряжение, картина интерференции.

### Введение

Совершенствование оптических прецизионных измерительных приборов и систем связано с учетом особо сложных и тонких эффектов, оказывающих влияние на характер их эксплуатации и результаты измерения. В связи с этим представляет интерес исследование влияния оптической анизотропии, вызванной эффектом фотоупругости, в различных оптических средах. Такого рода проблемы могут возникать, например, в условиях большого диапазона изменения температур в условиях космоса либо в присутствии высоких давлений на больших глубинах океанов. Кроме очевидных экстремальных примеров, эффект фотоупругости может проявить себя при нормальных лабораторных условиях в биологических объектах и в оптических элементах, выполненных из полимеров. Такие разнородные объекты объединяет зависимость их оптических свойств от характера внутренних механических напряжений.

Известно, что наблюдаемый в оптических средах эффект фотоупругости может быть использован как для оценки свойств оптической среды, так и для оценки внешних факторов, влияющих на ее состояние. Зачастую оптические среды обладают значительной чувствительностью к такому эффекту, что объясняет интерес к возможности использования этого свойства для разработки методов исследования оптических сред на основе эффекта фотоупругости.

Локальное неразрушающее определение механических и оптических характеристик оптических элементов способствует качественному изготовлению и оптимальным эксплуатационным характеристикам оптико-электронных приборов различного назначения. Эффект фотоупругости традиционно применяется для нахождения полей деформаций и напряжений в детали или узле конструкции на плоских или объемных прозрачных моделях [1].

Математическое моделирование

В рамках компьютерного моделирования предоставляется возможность экспериментировать с моделями, которые обладают формой и свойствами исследуемых объектов и на которые действуют возможные механические нагрузки. Математическое моделирование особенно предпочтительно при исследовании объектов, натурные испытания которых сложны и дорогостоящи или невозможны. Численное моделирование позволяет установить соответствие между экспериментально наблюдаемым распределением интенсивности света в картине интерференции, полей изоклин и изохром, вызванным наведенной оптической анизотропией при наличии напряженно-деформированного состояния объекта, и факторами, определяющими это напряженное состояние [2].

Не изменяя физическую сущность задачи, для упрощения описания разрабатываемой методики в качестве объекта исследования выберем плоскопараллельный однородный изотропный диск. Поместим диск в декартовой системе координат (рис. 1) таким образом, чтобы его срединная плоскость совпала с плоскостью  $z = 0$ , а начало системы координат совместилось с центром кругового сечения диска срединной плоскостью. Пусть на пластинку действует  $n$  контактных нагрузок с радиальным распределением напряжений. Каждая из сил сосредоточена вдоль одной из образующих цилиндрической поверхности диска. Сила  $P_i$  приложена вдоль цилиндрической образующей, которая пересекает срединную плоскость в точке  $(x_i, y_i)$ . Для решения задачи моделирования удобно представить пространственное положение точки  $(x_i, y_i)$  как в декартовых, так и в полярных координатах. Начало полярных координат совмещено с точкой срединной плоскости  $O$ , а полярным углом является угол  $\beta_i$ , отсчитываемый от положительного направления оси  $O_x$  против часовой стрелки. В рассматриваемом примере обязательным условием является выполнение требования равенства нулю векторной суммы всех внешних сил и вращательных моментов [3].

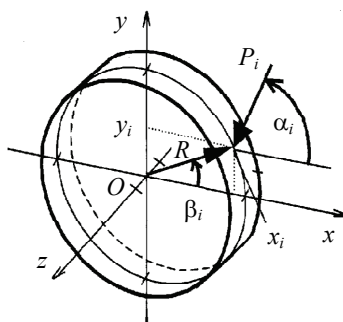


Рис. 1. Представление диска в декартовой и полярной системе координат

Для каждой точки срединной плоскости диска можно определить составляющие напряжений при действии  $n$  контактных радиальных нагрузок в результате суммирования (суперпозиции) по  $i$ .

Анализ действия одной силы

Пусть сила  $P_i$  приложена к диску вдоль цилиндрической образующей, пересекающей срединную плоскость в точке с координатами  $(x_i, y_i)$  (рис. 1) [1]. Если полюс (начало) полярных координат поместить в центр кругового сечения диска срединной плоскостью (точка  $O$ ), а в качестве полярной оси принять положительное направление оси  $O_x$ , то полярным радиусом точки  $(x_i, y_i)$  будет  $R=D/2$ , где  $D$  – диаметр диска, и полярный угол  $\beta_i$  можно определять следующим образом:

$$\beta_i = \arctg \frac{y_i}{x_i} \quad \text{при} \quad y_i \geq 0;$$

$$\beta_i = \arctg \frac{y_i}{x_i} + \pi \quad \text{при} \quad y_i < 0.$$

Для определения механических напряжений в точке  $(x, y)$  необходимо задаться расстоянием  $d_i$  между точкой приложения нагрузки в срединной плоскости и исследуемой точкой

$$d_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2},$$

а также углом  $\theta_i$ , который образует направление действия силы и отрезок, соединяющий точку  $(x_i, y_i)$  с точкой  $(x, y)$ . В этом случае напряжение в точке срединной плоскости диска  $(x, y)$  равно

$$\sigma_{ri} = -\frac{2p_i \cos\theta_i}{\pi d_i},$$

где  $p_i$  – интенсивность силы в расчете на единицу толщины диска. Представив угол  $\theta_i$  в качестве полярного и выполнив ряд преобразований систем координат, можно показать, что с каждой внешней силой можно связать локальную систему координат  $\eta'_i O'_i \xi'_i$  (рис. 2).

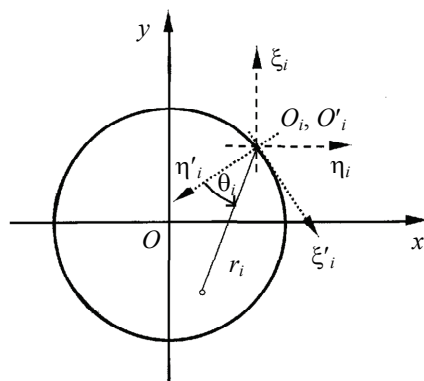


Рис. 2. Локальная система координат

Приложим к диску радиальное распределение нагрузки в виде равномерного растяжения

$$S_i = \frac{P_i}{\pi D} \sin(\psi_{i1} + \psi_{i2}) .$$

Введем в рассмотрение отрезок  $AB$ , пересекающий линию действия силы и являющийся диаметром диска, а также второй конец хорды, вдоль которой действует сила,  $(x'_i, y'_i)$ . Угол  $\psi_{i1}$  – полярный угол  $\theta_i$  для точки  $A$  на круге диска, а угол  $\psi_{i2}$  – угол с вершиной в точке  $(x'_i, y'_i)$  между линией, вдоль которой действует сила, и отрезком, соединяющим  $(x'_i, y'_i)$  с  $A$  (рис. 3). Из рис. 3 следует, что для кругового контура действует равенство

$$\psi_{i1} + \psi_{i2} = \frac{\pi}{2} \pm \gamma_i .$$

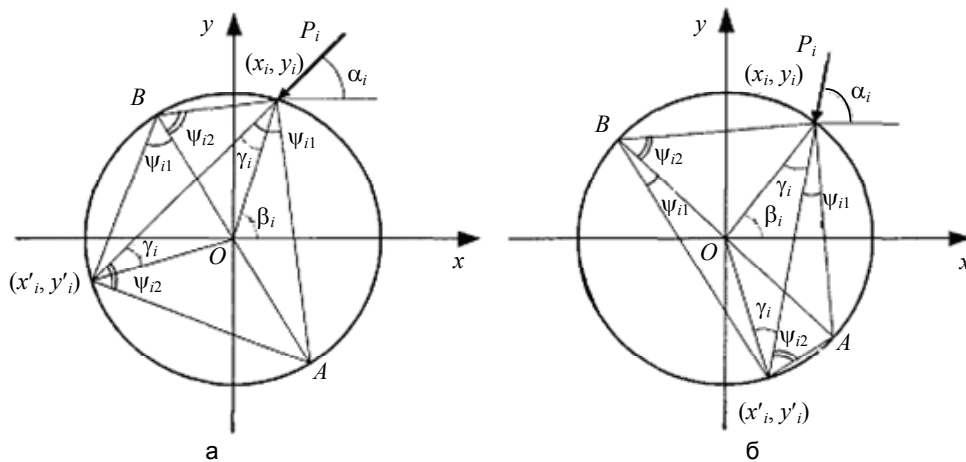


Рис. 3. Равномерное сжатие диска по контуру: а – для случая  $\beta_i \geq \alpha_i$ ; б – для случая  $\beta_i \leq \alpha_i$

Равномерное растяжение в каждой точке контура можно привести к виду

$$S_i = \frac{P_i}{\pi D} \cos \gamma_i .$$

Напряженное состояние в точках срединной плоскости диска для случая  $x^2 + y^2 < R^2$  будет определяться компонентами напряжений в декартовой системе координат  $xOy$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_n \cos^2 \theta_i + s_i \\ \sigma_{yy} &= \sigma_n \sin^2 \theta_i + s_i \\ \sigma_{xy} &= \sigma_n \cos \theta_i \sin \theta_i \end{aligned} \right\} . \tag{1}$$

#### Анализ действия $n$ сил

Если на контур диска действует  $n$  сосредоточенных сил с радиальным распределением напряжений у каждой, то напряжения в любой точке срединной плоскости диска для случая  $x^2 + y^2 < R^2$  определяются наложением (суперпозицией) напряжений, которые создала бы каждая из сил:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xi} &= -\frac{2p_i}{\pi d_i} \cos^3 \theta_i + \frac{p_i}{\pi D} \cos \gamma_i; \\ \sigma_{yi} &= -\frac{2p_i}{\pi d_i} \cos \theta_i \sin^2 \theta_i + \frac{p_i}{\pi D} \cos \gamma_i; \\ \tau_{xyi} &= -\frac{2p_i}{\pi d_i} \cos^2 \theta_i \sin \theta_i. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Уравнение (1) может быть преобразовано к виду (2). Таким образом, к сумме радиальных напряжений

$$-\sum_{i=1}^n \frac{2p_i \cos \theta_i}{\pi d_i}$$

необходимо прибавить равномерное растяжение на контуре

$$\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\pi D} \cos \gamma_i.$$

Для сохранения положения диска необходимо соблюдение условий:

- равенство нулю момента всех внешних сил

$$\sum_{i=1}^n p_i R \sin(\beta_i - \alpha_i) = \sum_{i=1}^n p_i \frac{D}{2} \sin \gamma_i = 0,$$

что равносильно условиям

$$\sum_{i=1}^n M_x = 0; \quad \sum_{i=1}^n M_y = 0,$$

где  $M_x$  и  $M_y$  – моменты относительно осей  $O_x$  и  $O_y$  соответственно;

- равенство нулю сумм проекций всех сил

$$\sum_{i=1}^n p_x = 0; \quad \sum_{i=1}^n p_y = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^n p_i \cos \alpha_i = 0; \quad \sum_{i=1}^n p_i \sin \alpha_i = 0.$$

Напряженное состояние в точках срединной плоскости диска будет определяться компонентами напряжений

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\sum_{i=1}^n \frac{2p_i}{\pi d_i} \cos^3 \theta_i + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\pi D_i} \cos^3 \gamma_i, \\ \sigma_y &= -\sum_{i=1}^n \frac{2p_i}{\pi d_i} \cos \theta_i \sin^2 \theta_i + \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\pi d_i} \cos^3 \gamma_i, \\ \sigma_y &= -\sum_{i=1}^n \frac{2p_i}{\pi d_i} \cos \theta_i \sin^2 \theta_i, \end{aligned} \right\}.$$

### Картина интерференции

Уравнение полосы в картине интерференции может быть определено на основании закона Вертгейма, в котором используются значения главных напряжений напряженного состояния. Для случая плоского напряженного состояния геометрическая разность хода определяется в зависимости от главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$

$$\delta = Ct(\sigma_1 - \sigma_2) = Ct\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \quad (3)$$

Здесь  $C$  – относительный оптический коэффициент напряжений (коэффициент фотоупругости материала диска);  $t$  – толщина пластинки.

Для расчета картины интерференции используем  $\Lambda$  – постоянную, параметр полосы [3]

$$\Lambda = \frac{\delta}{Ct} = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Согласно приведенным выше выкладкам получаем выражение

$$\left( \frac{\delta^2}{C^2 t^2} \right) = \left[ \sum_{i=1}^n \frac{2p_i}{\pi d_i} \cos \theta_i (-\cos 2\theta_i) \right]^2 + 4 \left[ \sum_{i=1}^n \frac{2p_i}{\pi d_i} \sin \theta_i \cos^2 \theta_i \right]^2.$$

Разность фаз равна

$$\Delta = \frac{2\pi}{\lambda} \delta = \frac{2\pi}{\lambda} Ct(\sigma_1 - \sigma_2) = \frac{2\pi}{\lambda} Ct \sqrt{\left(\frac{\delta^2}{C^2 t^2}\right)}, \quad (4)$$

где  $\lambda$  – длина волны света. Интенсивность света на выходе полярископа  $I$  в каждой точке экрана будет равна для скрещенного кругового полярископа

$$I_{++} = I_0 \sin^2 \frac{\Delta}{2} = I_0 \sin^2 \frac{\pi Ct}{\lambda} \sqrt{\left(\frac{\delta^2}{C^2 t^2}\right)}, \quad (5)$$

а для плоского скрещенного полярископа

$$I_{+} = I_0 \sin^2 \frac{\Delta}{2} \sin^2 2B. \quad (6)$$

В уравнениях (5), (6)  $I_0$  – интенсивность света на входе полярископа (поглощение элементов полярископа не учитываем), а  $B$  – угол наклона главных площадок (параметр изоклины).

Изменение показателя преломления по сечению диска на основании формул (3), (4) определяется зависимостью

$$\Delta n = C(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Углы наклона главных площадок могут быть определены из равенства

$$\operatorname{tg} 2B = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = 2 \frac{\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\pi d_i} \sin \theta_i \cos^2 \theta_i}{\sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\pi d_i} \sin \theta_i \cos 2\theta_i}.$$

Выкладки, аналогичные выводу биполярного уравнения полос (изохром) для диска, сжатого по диаметру двумя сосредоточенными силами, приводят к полному совпадению.

Пространственное распределение анизотропии пластины может быть представлено в виде пространственного распределения разности фаз ортогональных компонент поляризации света, в виде пространственного распределения интенсивности света, компонент напряжений, главных напряжений, изменения показателя преломления.

### Результаты математического моделирования

Математическое моделирование осуществлено в системе компьютерной математики Mathcad 2000 PRO. В качестве объекта исследования рассматривается диск, выполненный из полиметилметакрилата ( $\sigma_0^{(1,0)} = 20$  МПа), радиусом  $R = 20$  мм, высотой  $t = 5$  мм. Длина волны зондирующего излучения  $\lambda = 546,1$  нм. Шаг расчетных точек – 0,01 диаметра диска.

Математическое моделирование картины интерференции излучения, прошедшего исследуемый образец, выполнено для случаев приложения внешнего механического воздействия, представленных на рис. 4.

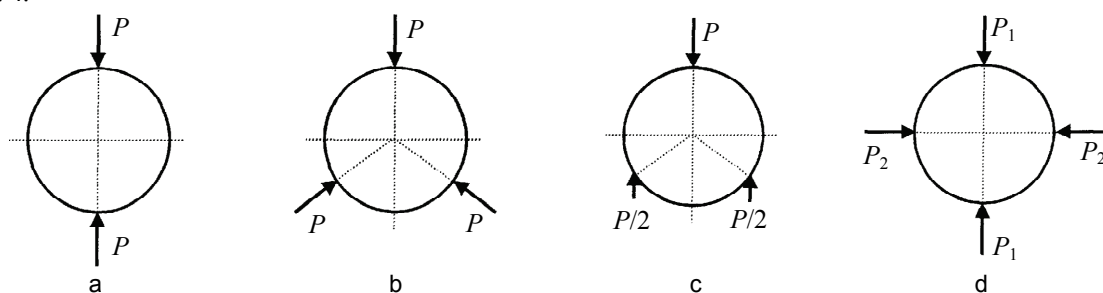


Рис. 4. Схемы приложения к диску внешних нагрузок

На рис. 5 представлен пример расчета для случая приложения двух нагрузок по варианту рис. 3, а, по  $P = 100$  МПа каждая. Распределение относительной интенсивности прошедшего образец излучения на выходе скрещенного полярископа (рис. 5, а, б), показывает, что при таком варианте распределения нагрузки в картине интерференции присутствуют четкие полосы до второго порядка включительно. Увеличение нагрузки до  $P = 700$  МПа показывает, что в картине интерференции присутствуют четкие полосы до четвертого порядка включительно и наглядно могут быть проанализированы изоклины с параметрами от  $0^\circ$  до  $50^\circ$  с шагом  $10^\circ$ . Количественной оценкой наблюдаемых процессов наведенного двулучепреломления может служить зависимость распределения относительной интенсивности излучения в интерференционной картине вдоль горизонтальной  $O_x$  или вертикальной  $O_y$  осей, как это показано на рис. 5, в, г, вычисленных для случая рис. 5, а.

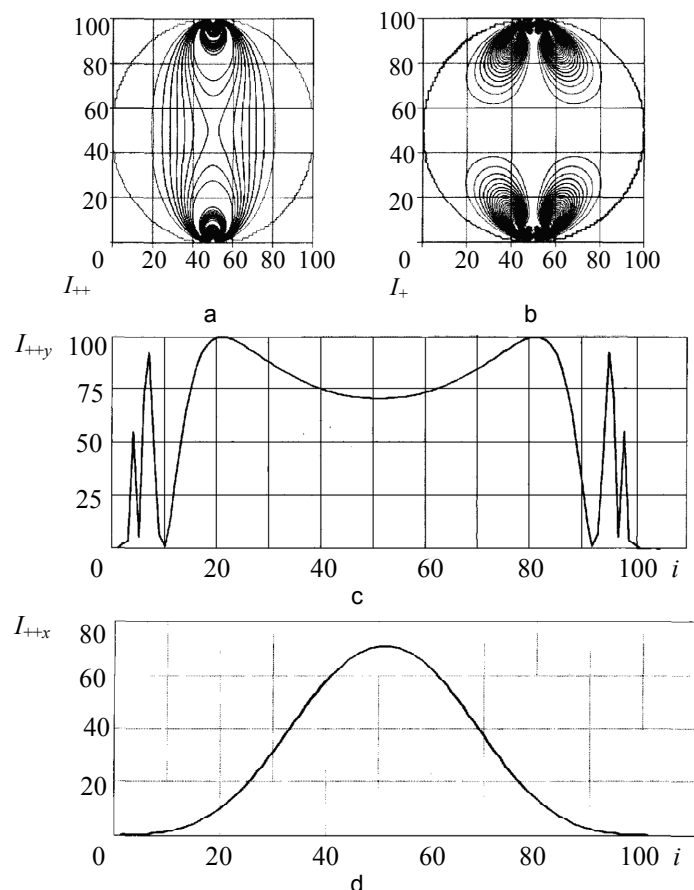


Рис. 5. Распределение относительной интенсивности излучения на выходе поляризатора: кругового (а); плоского (б). Распределение относительной интенсивности в наблюдаемой интерференционной картине вдоль горизонтального диаметра (с), вдоль вертикального диаметра (д)

### Заключение

На основе сравнения результатов математического моделирования и регистрации интерференционных картин, полученных экспериментально, можно утверждать, что рассматриваемая математическая модель может быть успешно использована для прогнозирования картин интерференции и распределений показателя преломления в плоском элементе оптического диска.

От классических описаний действия радиальных контактных напряжений на торцы диска приведенная выше методика отличается тем, что она позволяет рассмотреть действие любого количества сил, приложенных вдоль любых образующих цилиндрической поверхности диска и действующих вдоль всех возможных направлений.

Авторы выражают благодарность О.А. Шеломовой за участие в рассматриваемых исследованиях.

### Литература

1. Бауэр С.М., Смирнов А.Л., Товстик П.Е., Филиппов С.Б. Асимптотические методы в механике твердого тела: Учебное пособие. – СПбГУ, 2005. – 350 с.
2. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: Практическое руководство. – М., 2004. – 272 с.
3. Мостовой Е.Н., Шмырева В.Ф., Никитин А.К. Математическое моделирование изменения величины прогиба решетчатой пластинки после декомпрессионных операций на зрительном нерве // Биомеханика глаза. Сб. трудов конф. – М., 2007. – С. 143–147.

**Новак Алексей Григорьевич** – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, аспирант, alexsnovak1987@mail.ru  
**Трофимов Владимир Анатольевич** – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кандидат технических наук, доцент, troftu@mail.ru  
**Шванова Мария Леонидовна** – Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, студентка, shvanova@bk.ru