# 1 ФОТОНИКА И ОПТОИНФОРМАТИКА
## PHOTONICS AND OPTOINFORMATICS

УДК 51-73

# ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК В СЛОИСТОЙ СРЕДЕ С МЕТАМАТЕРИАЛАМИ: ПОДХОД РЕКУРРЕНТНЫХ СООТНОШЕНИЙ[1]

**К.В. Правдин[a], И.Ю. Попов[a]**

[a] Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, construeman@gmail.com

Исследуются многослойные системы с метаматериалами. Рассмотрена система, состоящая из конечного числа параллельных чередующихся слоев метаматериала и вакуума. Ставится задача поиска функции Грина для рассматриваемой системы в условиях NIM-ситуации. Под NIM-ситуацией понимаются условия, при которых диэлектрическая и магнитная проницаемости равны –1 в метаматериале и +1 в вакууме. Рассмотрены классические уравнения Максвелла для точечного источника, находящегося в одном из слоев метаматериала данной системы. Получено дифференциальное уравнение для электрической $p$-поляризованной составляющей скалярной функции Грина в каждом слое. Поставлены стандартные краевые условия на границах каждого слоя. Решение находится через фундаментальную систему решений с неизвестными коэффициентами. Для вычисления неизвестных коэффициентов выбран подход рекуррентных соотношений. Он очевиден в использовании и удобен для анализа получающихся решений. С помощью метода производящих функций найдены общие формулы для решений данных соотношений в условиях NIM-ситуации. Получены формулы для искомой функции Грина в каждом слое в условиях NIM-ситуации. $s$-поляризованная составляющая может быть найдена аналогичным путем. Имея выражения для электрической скалярной функции Грина, нетрудно найти ее векторную форму с помощью стандартных преобразований. Полученные результаты могут быть использованы при моделировании систем суперлинз и многослойных NIM-покрытий.

**Ключевые слова:** метаматериалы, отрицательный коэффициент преломления, NIM, уравнения Максвелла, рекуррентные соотношения, функция Грина.

# POINT SOURCE IN THE LAYERED MEDIUM WITH METAMATERIALS: METHOD OF RECURRENT RELATIONS[1]

**K.V. Pravdin[a], I.Yu. Popov[a]**

[a] ITMO University, Saint Petersburg, Russia, construeman@gmail.com

Multilayer systems with metamaterials are studied. A system comprising parallel alternated layers filled with metamaterial and vacuum is considered. The problem of obtaining expressions for electric part of the Green's function is raised for the NIM situation. A NIM situation is a case when electric and magnetic permeabilities are equal –1 for metamaterial and +1 for vacuum. The Maxwell's equations for a point source of electromagnetic field are considered. A differential equation for electric $p$-polarized scalar part of the Green's function for every layer is obtained with standard boundary conditions. Solution is obtained with the fundamental system of solutions with unknown coefficients. For the unknown coefficients the recurrence relations method is chosen as evident in usage and easy in analysis of obtained solutions. The solutions of the recurrence relations are obtained in general form by the method of generating functions. As a result the formulae for required Green's function are obtained for every layer in the condition of NIM situation. $s$-polarized part is obtained in a similar way. It is easy to obtain a vector form of the electric Green's function with its scalar form and the standard alternations. Obtained results can be used by simulations of superlens systems and multilayer covers with metamaterials.

**Keywords:** metamaterials, negative refractive index, NIM, Maxwell's equations, recurrence relations, Green's function.

## Введение

Метаматериалы (negative index materials, NIM) – искусственно созданные материалы, главной особенностью которых является отрицательный коэффициент преломления. При помощи NIM могут быть созданы материалы, маскирующие объект или делающие его полностью невидимым [1, 2], а также сконструированы суперлинзы с разрешающей способностью, во много раз превышающей дифракционный предел [3–5]. В общем случае NIM характеризуются наличием таких частот $\omega$, при которых диэлектрическая $\varepsilon(\omega)$ и магнитная $\mu(\omega)$ проницаемости становятся отрицательными. В этом случае коэффициент преломления имеет также отрицательную величину [6, 7]. Особенным является случай, называемый NIM-ситуацией, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости равны –1 (в противоположность случаю в вакууме, когда они равны +1). Частоту $\hat{\omega}$, при которой реализуется этот случай, называют NIM-частотой.

[1] Работа выполнена при государственной финансовой поддержке ведущих университетов Российской Федерации (субсидия 074-U01), Министерства образования и науки Российской федерации (государственный контракт 14.124.13.2045-МК) и гранта Президента Российской федерации (МК-1493.2013.1).

[1] The work was partially financially supported by the Government of the Russian Federation (Grant 074-U01), by State contract of the Russian Ministry of Education and Science and grants of the President of Russia (state contract 14.124.13.2045-MK and grant MK-1493.2013.1).

Системы, среди элементов которых есть NIM, называют NIM-системами. Среди NIM-систем широко известны слоистые NIM-системы. Простейший случай слоистой системы (двухслойная NIM-система) был рассмотрен в работах [8, 9]. Трехслойная NIM-система, являющаяся моделью для суперлинзы, изучалась в работах [3–5, 10, 11]. Исследования многослойных NIM-систем (т.е. систем с числом слоев, большим трех) можно найти в работах [12–15].

Ряд исследований NIM посвящен нахождению функции Грина, т.е. формулы для описания электромагнитного поля, создаваемого точечным источником. Имея формулу для функции Грина, легко вычислить значение электромагнитного поля в любой точке системы, а также получить его формулу аналитически. Например, в [8] подобным образом рассмотрена двухслойная NIM-система, состоящая из однородных изотропных полупространств, заполненных NIM и вакуумом. В условиях NIM-ситуации были получены формулы для электрических *s*- и *p*-поляризованных составляющих скалярной функции Грина. В работе [11] изучена трехслойная изотропная NIM-система. Однако нам на сегодняшний момент не известны работы для многослойных NIM-систем. Кроме того, результаты, полученные для NIM-систем с двумя и тремя слоями, в общем случае не могут быть перенесены на многослойные системы, так как при добавлении каждого нового слоя приходится учитывать краевые условия на новых границах, что приводит к изменению системы уравнений и, следовательно, решений.

Целью данной работы является исследование многослойной NIM-системы, состоящей, в принципе, из неограниченного числа слоев. Слои заполнены NIM и вакуумом и расположены в порядке чередования. Нас интересует функция Грина в условиях NIM-ситуации. Мы ищем электрическую *p*-поляризованную составляющую скалярной функции Грина. *s*-поляризованная составляющая может быть найдена аналогичным путем. Следуя формулам, представленным в [8], легко получить величину электрического поля в каждой точке системы. Далее для лаконичности вместо «электрическая *p*-поляризованная составляющая скалярной функции Грина» мы будем говорить просто «функция Грина».

Для учета краевых условий на границах слоев при построении функции Грина используется подход рекуррентных соотношений. Он легок в использовании благодаря зависимости решений в соседних слоях друг от друга, а также удобен для анализа и сравнения получающихся решений.

**Постановка задачи**

Рассмотрим систему, состоящую из $(n+m+1)$ параллельных слоев, где $n, m \geq 3$ – натуральные нечетные числа. Ось $X$ направлена по нормали к границам слоев. Координата левой границы $k$-го слоя находится в точке $x_k$ ($x_0 = 0$). Справа от $x_0$ (при $x > 0$) располагается $(n+1)$ слоев, слева от $x_0$ (при $x < 0$) лежат $m$ слоев. Таким образом, $k = -m, \ldots 0, \ldots n$ . Все четные слои, включая нулевой слой (однородный изотропный NIM), имеют ширину $\Delta_1$, все нечетные слои (вакуум) имеют ширину $\Delta_2$. Крайний левый слой (номер $-m$) и крайний правый слой (номер $n$) не ограничены вдоль оси $X$ и представляют собой полупространства вакуума ( $x_{-m} = -\infty$ , $x_{n+1} = +\infty$ ). Точечный источник поля находится в координате $y$ в нулевом слое $(x_0 < y < x_1$ или $0 < y < \Delta_1)$ .

Из уравнений Максвелла путем стандартных преобразований может быть получено следующее дифференциальное уравнение для искомой функции Грина $G(x, y, z)$ (подробнее в [8]):

$$\left( z^2\varepsilon(x,z) + \partial_x \frac{z^2\varepsilon(x,z)}{\zeta^2(x,z)} \partial_x \right) G(x,y,z) = \delta(x-y) , \tag{1}$$

где $z = \omega + i\alpha$ , $\alpha \to 0$ , $\delta(x-y)$ – дельта-функция,

$$\zeta^2\left(x,z,\kappa\right) = z^2\varepsilon\left(x,z\right)\mu\left(x,z\right) - \kappa^2 , \tag{2}$$

где $\kappa$ – координата вектора $\mathbf{\kappa}$ ( $\mathbf{\kappa} = \kappa\mathbf{e}_\kappa$ – двумерный волновой вектор, лежащий в плоскости слоев).

Заметим, что в каждом слое рассматриваемой системы общее решение уравнений (1) известно. В связи с этим построение функции Грина сводится к поиску коэффициентов $G_1$ , $G_2$ в представлении общего решения уравнения (1) через фундаментальную систему решений:

$$G(x,y,z) = G_1 e^{i\zeta x} + G_2 e^{-i\zeta x} .$$

Эти коэффициенты удовлетворяют системе уравнений, получаемых из краевых условий на всех границах раздела слоев. Формально решение такой системы выписывается в общем виде (хотя бы по формулам Крамера). Однако такое представление решения не позволяет его эффективно анализировать. В этом отношении гораздо более удобен другой подход, связанный с построением рекуррентных соотношений между коэффициентами при переходе от слоя к слою (физически это означает учет последовательных переотражений). Он очевиден в использовании благодаря зависимости решений в соседних слоях друг от друга, а также удобен при сравнении получающихся решений. Именно этот подход и используется в данной работе. Учет краевых условий приводит к расщеплению коэффициентов в функции Грина:

$$G(x,y,z)=\begin{cases} & +D_{-m}e^{-i\zeta_{-m}x} & x\in(-\infty,x_{-(m-1)}) \\ B_{-(m-1)}e^{i\zeta_{-(m-1)}x} & +\left(C_{-(m-1)}+D_{-(m-1)}\right)e^{-i\zeta_{-(m-1)}x} & x\in(x_{-(m-1)},x_{-(m-2)}) \\ \left(A_{-(m-2)}+B_{-(m-2)}\right)e^{i\zeta_{-(m-2)}x} & +\left(C_{-(m-2)}+D_{-(m-2)}\right)e^{-i\zeta_{-(m-2)}x} & x\in(x_{-(m-2)},x_{-(m-3)}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(A_{-1}+B_{-1}\right)e^{i\zeta_{-1}x} & +\left(C_{-1}+D_{-1}\right)e^{-i\zeta_{-1}x} & x\in(x_{-1},0) \\ \left(A_0+B_0\right)e^{i\zeta_0x} & +\left(C_0+D_0+E_-\right)e^{-i\zeta_0x} & x\in(0,y) \\ \left(A_0+B_0+E_+\right)e^{i\zeta_0x} & +\left(C_0+D_0\right)e^{-i\zeta_0x} & x\in(y,x_1) \\ \left(A_1+B_1\right)e^{i\zeta_1x} & +\left(C_1+D_1\right)e^{-i\zeta_1x} & x\in(x_1,x_2) \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(A_{n-2}+B_{n-2}\right)e^{i\zeta_{n-2}x} & +\left(C_{n-2}+D_{n-2}\right)e^{-i\zeta_{n-2}x} & x\in(x_{n-2},x_{n-1}) \\ \left(A_{n-1}+B_{n-1}\right)e^{i\zeta_{n-1}x} & +C_{n-1}e^{-i\zeta_{n-1}x} & x\in(x_{n-1},x_n) \\ A_ne^{i\zeta_nx} & & x\in(x_n,+\infty) \end{cases},$$

где $A_k$, $B_k$, $C_k$, $D_k$, $E_\pm$, – коэффициенты функции Грина, величина (2) в $k$-ом слое определена как

$$\zeta_k^2(x,\kappa,z)=z^2\varepsilon_k(x,z)\mu_k(x,z)-\kappa^2, \tag{3}$$

диэлектрическая и магнитная проницаемости представлены в виде одного терма Лоренца:

$$\varepsilon_k(x,z)=\mu_k(x,z)=1-\frac{\Omega^2}{z^2-\omega_0^2},$$

где для NIM-частоты $\hat{\omega}=\sqrt{\omega_0^2+\Omega^2/2}$ справедливо $\varepsilon_k(x,\pm\hat{\omega})=\mu_k(x,\pm\hat{\omega})=1$, если $k$ нечетно, и $\varepsilon_k(x,\pm\hat{\omega})=\mu_k(x,\pm\hat{\omega})=-1$, если $k$ четно или равно 0.

В работе [11] была рассмотрена слоистая NIM-система общего вида и получены рекуррентные соотношения для коэффициентов функции Грина. При $k=1,\dots(n-1)$

$$A_k=\beta_kA_n,\ B_k=\frac{d_k}{c_k}\gamma_kA_n,\ C_k=\frac{h_k}{g_k}\beta_{k+1}A_n,\ D_k=\gamma_{k+1}A_n,\ C_{n-1}=\frac{h_{n-1}}{g_{n-1}}A_n,\ D_{n-1}=0. \tag{4}$$

Для $k=-(m-1),\dots 0$

$$A_k=\beta_kA_n+\xi_k,\ B_k=\frac{d_k}{c_k}\left(\gamma_kA_n+\eta_k\right),\ C_k=\frac{h_k}{g_k}\left(\beta_{k+1}A_n+\xi_{k+1}\right),\ D_k=\gamma_{k+1}A_n+\eta_{k+1}, \tag{5}$$

$$C_0=\frac{h_0}{g_0}\beta_1A_n,\ D_0=\gamma_1A_n,\ A_{-(m-1)}=0,\ D_{-m}=\gamma_{-(m-1)}A_n+\eta_{-(m-1)}. \tag{6}$$

Коэффициенты $E_\pm$ получены из условий непрерывности функции Грина и скачка ее производной в точке $y$:

$$E_+=I_0e^{-i\zeta_0y},\ E_-=I_0e^{i\zeta_0y}. \tag{7}$$

Величины $\beta_k$, $\gamma_k$, $\xi_k$, $\eta_k$ являются решениями рекуррентных соотношений [11]

$$\beta_k=J_k\beta_{k+1}-\left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_k\gamma_{k+1},\ \beta_{n-1}=J_{n-1},\ J_k=\frac{f_k}{e_k}\left(1-\left(\frac{a\,d\,e\,h}{b\,c\,f\,g}\right)_k\right), \tag{8}$$

$$\gamma_k=\frac{a_k}{b_k}\left(\frac{h_k}{g_k}\beta_{k+1}+\gamma_{k+1}\right),\ \gamma_{n-1}=\left(\frac{a\,h}{b\,g}\right)_{n-1}, \tag{9}$$

$$\xi_k=J_k\xi_{k+1}-\left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_k\eta_{k+1},\ \xi_0=I_0\left(-e^{-i\zeta_0y}-\left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_0e^{i\zeta_0y}\right), \tag{10}$$

$$\eta_k=\frac{a_k}{b_k}\left(\frac{h_k}{g_k}\xi_{k+1}+\eta_{k+1}\right),\ \eta_0=I_0\frac{a_0}{b_0}e^{i\zeta_0y}, \tag{11}$$

где

$$a_k=2e^{-i\zeta_kx_k},\ b_k=\sigma_{k,k-1}^{+}e^{-i\zeta_{k-1}x_k},\ c_k=2e^{i\zeta_kx_k},\ d_k=\sigma_{k,k-1}^{-}e^{-i\zeta_{k-1}x_k},$$

$$e_k=2e^{i\zeta_kx_{k+1}},\ f_k=\sigma_{k,k+1}^{+}e^{i\zeta_{k+1}x_{k+1}},\ g_k=2e^{-i\zeta_kx_{k+1}},\ h_k=\sigma_{k,k+1}^{-}e^{i\zeta_{k+1}x_{k+1}},$$

$$I_0 = \frac{\zeta_0}{2iz^2\varepsilon_0},$$

$$\sigma^{\pm}_{k,l} = \frac{\varepsilon_k\zeta_l \pm \varepsilon_l\zeta_k}{\varepsilon_k\zeta_l} \qquad (12)$$

и введено обозначение $\left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_k = \frac{a_k d_k}{b_k c_k}$. Все коэффициенты (4)–(6) выражаются через коэффициент $A_n$. Для него была получена следующая зависимость [11]:

$$A_n = -\frac{\xi_{-(m-1)}}{\beta_{-(m-1)}}. \qquad (13)$$

Таким образом, задача поиска функции Грина для рассматриваемой системы в условиях NIM-ситуации сводится к задаче решения рекуррентных соотношений (8)–(11) и вычислению коэффициента $A_n$ (13).

**Рекуррентные соотношения**

Заметим, что уравнения (8) и (10) имеют одинаковую структуру, но разные начальные условия; аналогично – для уравнений (9) и (11). Исходя из этого, достаточно найти общее решение для уравнений (8), (9) и далее использовать соответствующие начальные условия. Из уравнений (8), (9) выразим $\beta_k$:

$$\beta_k = K_k\beta_{k+2} - L_k\beta_{k+4}, \qquad (14)$$

где

$$\beta_{n-4} = P_{n-4}\beta_{n-2} - Q_{n-4}\gamma_{n-2},\ \beta_{n-3} = P_{n-3}\beta_{n-1} - Q_{n-3}\gamma_{n-1},$$

$$\beta_{n-2} = J_{n-2}\beta_{n-1} - \left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_{n-2}\gamma_{n-1},\ \beta_{n-1} = J_{n-1}.$$

Также из (8), (9) выразим величину $\gamma_k$:

$$\gamma_k = M_k\gamma_{k+2} - N_k\gamma_{k+4}, \qquad (15)$$

где

$$\gamma_{n-4} = R_{n-4}\beta_{n-2} + S_{n-4}\gamma_{n-2},\ \gamma_{n-3} = R_{n-3}\beta_{n-1} + S_{n-3}\gamma_{n-1},$$

$$\gamma_{n-2} = \frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}\left(\frac{h_{n-2}}{g_{n-2}}\beta_{n-1} + \gamma_{n-1}\right),\ \gamma_{n-1} = \left(\frac{a\,h}{b\,g}\right)_{n-1}.$$

Мы ввели следующие обозначения:

$$P_k = J_k J_{k+1} - \left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_k\left(\frac{a\,h}{b\,g}\right)_{k+1},\ Q_k = J_k\left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_{k+1} + \left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_k\left(\frac{a}{b}\right)_{k+1}, \qquad (16)$$

$$R_k = \left(\frac{a\,h}{b\,g}\right)_k J_{k+1} + \left(\frac{a}{b}\right)_k\left(\frac{a\,h}{b\,g}\right)_{k+1},\ S_k = \left(\frac{a}{b}\right)_k\left(\frac{a}{b}\right)_{k+1} - \left(\frac{a\,h}{bg}\right)_k\left(\frac{a\,d}{b\,c}\right)_{k+1}, \qquad (17)$$

$$K_k = P_k + \frac{Q_k S_{k+2}}{Q_{k+2}},\ L_k = Q_k R_{k+2} + \frac{P_{k+2}Q_k S_{k+2}}{Q_{k+2}}, \qquad (18)$$

$$M_k = S_k + \frac{R_k P_{k+2}}{R_{k+2}},\ N_k = R_k Q_{k+2} + \frac{P_{k+2}R_k S_{k+2}}{R_{k+2}}. \qquad (19)$$

Заметим, что все слои с одной четностью одинаковы и однородны. В связи с этим $\zeta_k(x,z) = \zeta_k(z)$, $\zeta_{k+2}(z) = \zeta_k(z)$ для целых $-m \le k \le (n-2)$, и $\sigma^{\pm}_{k+1,l+1} = \sigma^{\pm}_{k-1,l-1}$, $\sigma^{\pm}_{k,k+1} = \sigma^{\pm}_{k,k-1}$ для целых $-(m-1) \le k,l \le (n-1)$. Ширину $k$-го слоя мы обозначили $\Delta_k$, при этом $\Delta_{k+2} = \Delta_k$ для целых $-m \le k \le (n-2)$. Для рассматриваемой системы $\Delta_k = \Delta_1$ при четном $k$ и $\Delta_k = \Delta_2$ при нечетном $k$. Выражения (16) и (17) приобретают следующий вид:

$$P_k = \left[\frac{\sigma^{+}_{k,k+1}\sigma^{+}_{k+1,k}}{4} + \frac{\sigma^{-}_{k,k+1}\sigma^{-}_{k+1,k}}{4}\left(e^{i\zeta_k 2\Delta_k} + e^{i\zeta_{k+1}2\Delta_{k+1}} - e^{i\zeta_k 2\Delta_k + i\zeta_{k+1}2\Delta_{k+1}}\right)\right]e^{i(\zeta_k - \zeta_{k+1})\Delta_{k+1}},$$

$$Q_k = -\frac{\sigma^{-}_{k,k+1}}{2}\left(1 - e^{i\zeta_k 2\Delta_k}\right)e^{-i(\zeta_k + \zeta_{k+1})x_{k+1}},$$

$$R_k = -\frac{\sigma^{-}_{k+1,k}}{2}\left(1 - e^{i\zeta_{k+1}2\Delta_{k+1}}\right)e^{i\zeta_k(x_k + 2\Delta_k + \Delta_{k+1}) + i\zeta_{k+1}(x_k - \Delta_{k+1})},$$

$S_k = e^{i(\zeta_k - \zeta_{k+1})\Delta_k}$.

Очевидно, что

$P_{k-2} = P_k$, $S_{k-2} = S_k$, $Q_{k-2} = Q_k e^{i(\zeta_k + \zeta_{k+1})(\Delta_k + \Delta_{k+1})}$, $R_{k-2} = R_k e^{-i(\zeta_k + \zeta_{k+1})(\Delta_k + \Delta_{k+1})}$.

Теперь запишем выражения (18), (19):

$$K_k = \left[ \frac{\sigma^+_{k,k+1}\sigma^+_{k+1,k}}{4}\left(1 + e^{i\zeta_k 2\Delta_k + i\zeta_{k+1} 2\Delta_{k+1}}\right) + \frac{\sigma^-_{k,k+1}\sigma^-_{k+1,k}}{4}\left(e^{i\zeta_k 2\Delta_k} + e^{i\zeta_{k+1} 2\Delta_{k+1}}\right)\right] e^{i(\zeta_k - \zeta_{k+1})\Delta_{k+1}},$$

$$L_k = e^{i\zeta_k 2(\Delta_k + \Delta_{k+1})},$$

$$M_k = \left[ \frac{\sigma^+_{k,k+1}\sigma^+_{k+1,k}}{4}\left(1 + e^{i\zeta_k 2\Delta_k + i\zeta_{k+1} 2\Delta_{k+1}}\right) + \frac{\sigma^-_{k,k+1}\sigma^-_{k+1,k}}{4}\left(e^{i\zeta_k 2\Delta_k} + e^{i\zeta_{k+1} 2\Delta_{k+1}}\right)\right] e^{-i\zeta_k \Delta_k - i\zeta_{k+1}(\Delta_k + 2\Delta_{k+1})},$$

$$N_k = e^{-i\zeta_{k+1} 2(\Delta_k + \Delta_{k+1})}.$$

Очевидно, что $K_{k+2} = K_k$, $L_{k+2} = L_k$, $M_{k+2} = M_k$, $N_{k+2} = N_k$ при $-m \le k \le (n-2)$. Таким образом, для величин $K_k$, $L_k$, $M_k$, $N_k$, $\zeta_k$ имеется только два значения в зависимости от четности номера *k*. То же справедливо для величины $\sigma^\pm_{k,k+1}$. Следовательно, уравнения (14), (15) рассматриваются для четных и нечетных *k* в отдельности как рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Решения этих соотношений могут быть найдены в общем виде при помощи метода производящих функций.

## NIM-ситуация

Нас интересует NIM-ситуация, поэтому, прежде чем воспользоваться методом производящих функций, рассмотрим величину (3) при $z \to \pm\hat{\omega}$. Обозначим

$$\rho(\omega) = \left| \omega^2 \left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2}\right)^2 - \kappa^2 \right|^{1/2}.$$

Согласно исследованию, представленному в [8], имеется два случая:

1. $\hat{\omega} > \kappa$ – «radiative regime». В этом случае $\zeta_k(\pm\hat{\omega}) = \mp\rho(\hat{\omega})$, если *k* четно, и $\zeta_k(\pm\hat{\omega}) = \pm\rho(\hat{\omega})$, если *k* нечетно, а величина $\sigma^-_{0,1}(z) \to 0$ при $z \to \pm\hat{\omega}$.
2. $\hat{\omega} < \kappa$ – «evanescent regime». В этом случае $\zeta_k(\pm\hat{\omega}) = i\rho(\hat{\omega})$ для любого номера *k* и $\sigma^+_{0,1}(z) \to 0$ при $z \to \pm\hat{\omega}$.

Введем обозначение $O\left(\sigma^\pm_{0,1}\right)$, под которым понимается некоторая величина одного порядка малости с $\sigma^\pm_{0,1}(z)$. Как было замечено ранее, для величины (12) верно, что $\sigma^\pm_{k+1,l+1} = \sigma^\pm_{k-1,l-1}$, $\sigma^\pm_{k,k+1} = \sigma^\pm_{k,k-1}$ при $-(m-1) \le k,l \le (n-1)$. Исходя из этого, $\sigma^\pm_{k,k+1}$ равняется $\sigma^\pm_{0,1}$ или $\sigma^\pm_{1,0}$ в зависимости от четности *k*. При условии $z \to \pm\hat{\omega}$ величины $\sigma^\pm_{0,1}$, $\sigma^\pm_{1,0}$ стремятся к нулю одновременно и являются величинами одного порядка малости, т.е. $\sigma^\pm_{1,0} = O\left(\sigma^\pm_{0,1}\right)$. Таким образом, общие решения уравнений (14), (15) в условиях NIM-ситуации выражаются через асимптотические приближения при $\sigma^\pm_{0,1}(z) \to 0$.

Для случая $\hat{\omega} > \kappa$ при помощи метода производящих функций мы получили асимптотические приближения искомых решений. Они не содержат особенностей и для четных *k* представляются в виде

$$\beta_k = e^{\pm i\rho((n+1)\Delta_1 + k\Delta_2)} + O\left(\sigma^-_{1,2}\right)^2,\ \gamma_k = O\left(\sigma^-_{0,1}\right), \tag{20}$$

$$\xi_k = -I_0 e^{\pm i\rho(k\Delta_2 + y)} + O\left(\sigma^-_{0,1}\right),\ \eta_k = I_0 e^{\pm i\rho(k\Delta_1 - y)} + O\left(\sigma^-_{0,1}\right), \tag{21}$$

а для нечетных *k* – в виде

$$\beta_k = e^{\pm i\rho(n-k)\Delta_1} + O\left(\sigma^-_{1,2}\right)^2,\ \gamma_k = O\left(\sigma^-_{0,1}\right), \tag{22}$$

$$\xi_k = -I_0 e^{\pm i\rho(-(k+1)\Delta_1 + y)} + O\left(\sigma^-_{0,1}\right),\ \eta_k = I_0 e^{\pm i\rho(-(k-1)\Delta_2 - y)} + O\left(\sigma^-_{0,1}\right), \tag{23}$$

где $I_0 = \pm \dfrac{\rho(\hat{\omega})}{2i\hat{\omega}^2}$. Выражение (13) в этом случае таково:

$$A_n = I_0 e^{\pm i\rho(-(n+1)\Delta_1 + y)} + O\left(\sigma^-_{0,1}\right). \tag{24}$$

Для случая $\hat{\omega} < \kappa$ мы получили асимптотические приближения решений, которые содержат полюс первого порядка следующего вида:

$$W = \frac{1}{\sigma_{0,1}^{+}} \overset{z\to\pm\hat{\omega}}{\sim} \left(\frac{\rho(\hat{\omega})\Omega}{2\kappa}\right)^2 \frac{1}{(z-\hat{\omega})(z+\hat{\omega})}. \quad (25)$$

Для четных $k$:

$$\beta_k = -2(W-1)e^{-\rho(n+1-k)\Delta_1} + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right), \quad (26)$$

$$\gamma_k = (2W-1)e^{-\rho((n+1)\Delta_1+k\Delta_2)} + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right), \quad (27)$$

$$\xi_k = I_0\left[\begin{array}{l} -(2W-1)e^{\rho(k\Delta_1-y)} \\ +\dfrac{\left(1-e^{-\rho2\Delta_1}\right)e^{-\rho(k-2)\Delta_1}-\left(1-e^{-\rho2\Delta_2}\right)e^{-\rho(k-2)\Delta_2}}{\left(e^{-\rho2\Delta_1}-e^{-\rho2\Delta_2}\right)}e^{\rho(k-2)(\Delta_1+\Delta_2)}e^{\rho y}\end{array}\right] + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right), \quad (28)$$

$$\eta_k = I_0\left[2We^{-\rho(k\Delta_2+y)} + \frac{\left(1-e^{\rho2\Delta_2}\right)\left(e^{-\rho k\Delta_1}-e^{-\rho k\Delta_2}\right)}{\left(e^{-\rho2\Delta_1}-e^{-\rho2\Delta_2}\right)}e^{-\rho2(\Delta_1+\Delta_2)}e^{\rho y}\right] + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right), \quad (29)$$

для нечетных $k$:

$$\beta_k = \frac{\left(e^{-\rho(n+2-k)\Delta_1}-e^{-\rho(n+2-k)\Delta_2}\right)-e^{-\rho2(\Delta_1+\Delta_2)}\left(e^{-\rho(n-k)\Delta_1}-e^{-\rho(n-k)\Delta_2}\right)}{\left(e^{-\rho2\Delta_1}-e^{-\rho2\Delta_2}\right)} + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right)^2, \quad (30)$$

$$\gamma_k = -\frac{\left(1-e^{-\rho2\Delta_1}\right)\left(e^{-\rho(n-k)\Delta_1}-e^{-\rho(n-k)\Delta_2}\right)}{\left(e^{-\rho2\Delta_1}-e^{-\rho2\Delta_2}\right)}e^{-\rho(k+1)(\Delta_1+\Delta_2)} + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right), \quad (31)$$

$$\xi_k = -I_0\left[2We^{\rho(k-1)\Delta_2}e^{\rho y} + \frac{\left(1-e^{-\rho2\Delta_2}\right)\left(e^{-\rho(k-1)\Delta_1}-e^{-\rho(k-1)\Delta_2}\right)}{\left(e^{-\rho2\Delta_1}-e^{-\rho2\Delta_2}\right)}e^{\rho(k-1)(\Delta_1+\Delta_2)}e^{-\rho y}\right] + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right), \quad (32)$$

$$\eta_k = I_0\left[\begin{array}{l} (2W-1)e^{-\rho(k+1)\Delta_1}e^{\rho y} \\ +\dfrac{\left(1-e^{-\rho2\Delta_2}\right)e^{-\rho(k+1)\Delta_1}-\left(1-e^{-\rho2\Delta_1}\right)e^{-\rho(k+1)\Delta_2}}{\left(e^{-\rho2\Delta_1}-e^{-\rho2\Delta_2}\right)}e^{-\rho y}\end{array}\right] + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right), \quad (33)$$

где $I_0 = -\dfrac{\rho(\hat{\omega})}{2\hat{\omega}^2}$. Величина (13) в этом случае выражается следующим образом:

$$A_n = -I_0e^{\rho((n+1)\Delta_1-y)} + O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right). \quad (34)$$

**Результаты**

Подставляя выражения (20)–(34) в формулы (4)–(6) и учитывая (7), мы получили выражения для функции Грина в каждом слое. Для случая $\hat{\omega} > \kappa$ функция Грина в слое с номером $k$ представляется как

$$G_k(x,y,\pm\hat{\omega}) = \pm\frac{\rho(\hat{\omega})}{2i\hat{\omega}^2}e^{\pm i\rho X(x,y,k)},$$

для случая $\hat{\omega} < \kappa$ – как

$$G_k(x,y,\pm\hat{\omega}) = \frac{\rho(\hat{\omega})}{2\hat{\omega}^2}e^{-\rho X(x,y,k)}, \quad (35)$$

где

$$X(x,y,k) = |k|\Delta_2 - |x-y| \text{ при } k = -(m-1),\ldots-2,0,2,\ldots(n-1),$$

$$X(x,y,k) = -|k|\Delta_1 + |x-\Delta_1+y| \text{ при } k = -m,\ldots-3,-1,1,3,\ldots n.$$

Несмотря на то, что в случае $\hat{\omega} < \kappa$ асимптотические приближения (26)–(29), (32), (33) содержат особенность вида (25), конечное выражение для функции Грина (35) особенностей не имеет. В ходе решения все асимптотические приближения имели точность $O\left(\sigma_{0,1}^{+}\right)$ одного порядка малости с $\sigma_{0,1}^{+}(z)\to 0$ при $z\to\pm\hat{\omega}$. Таким образом, мы можем быть уверены в точности полученной формулы и использовать знак равенства вместо знака асимптотической эквивалентности при $z\to\pm\hat{\omega}$.

**Заключение**

В настоящей работе была решена задача поиска электрической $p$-поляризованной составляющей скалярной функции Грина в условиях NIM-ситуации для слоистой NIM-системы. $s$-поляризованная составляющая может быть найдена аналогичным путем. Следуя формулам, представленным в [8], легко получить величину электрического поля в каждой точке системы. Полученные формулы симметричны относительно положения источника, что соответствует физическим представлениям о распространении электромагнитных волн в системе, состоящей из однородных изотропных слоев.

Рассмотренная NIM-система состоит из чередующихся слоев метаматериала и вакуума. На систему были наложены следующие ограничения: число слоев системы нечетно и может быть равно 7, 11, 15 и т.д.; точечный источник электромагнитного поля находится в слое с NIM; число слоев справа и слева от источника нечетно и больше трех (включительно). Заметим, что можно снять некоторые из этих ограничений, повторив вычисления, представленные в данной работе. Например, можно поместить источник электромагнитного поля в слой с вакуумом или выбрать четным число слоев справа или слева от источника. Система может состоять, в принципе, из неограниченного числа слоев, что позволяет широко применять данную модель при создании реальных объектов – от системы суперлинз до многослойных NIM-покрытий. Аналогичными моделями, интересными для исследований, могут быть, например, периодические NIM-системы, состоящие из различных чередующихся слоев. Рассмотрение более общего случая, т.е. NIM-систем со слоями различной толщины, заполненными различными материалами, представляется задачей высокой сложности в силу отсутствия зависимостей между слоями.

## Reference


1. Dubinov A.E., Mytareva L.A. Invisible cloaking of material bodies using the wave flow method. *Physics-Uspekhi*, 2010, vol. 53, no. 5, pp. 475–479. doi: 10.3367/UFNe.0180.201005b.0475
2. Rozanov N.N. Nevidimost': za i protiv [Invisibility: pro and contra]. *Priroda*, 2008, no. 6, pp. 3–10.
3. Ozbay E., Li Z., Aydin K. Super-resolution imaging by one-dimensional microwave left-handed metamaterials with an effective negative index. *Journal of Physics Condensed Matter*, 2008, vol. 20, no. 30, art. no. 304216. doi: 10.1088/0953-8984/20/30/304216
4. Iyer A.K., Eleftheriades G.V. Free-space imaging beyond the diffraction limit using a Veselago-Pendry transmission-line metamaterial superlens. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 2009, vol. 57, no. 6, pp. 1720–1727. doi: 10.1109/TAP.2009.2019890
5. Casse B.D., Lu W.T., Huang Y.J., Gultepe E., Menon L., Sridhar S. Super-resolution imaging using a three-dimensional metamaterials nanolens. *Applied Physics Letters*, 2010, vol. 96, no. 2, art. no. 023114. doi: 10.1063/1.3291677
6. Lequime M., Gralak B., Guenneau S., Zerrad M., Amra C. *Optical properties of multilayer optics including negative index materials*. Available at: http://arxiv.org/pdf/1312.6288v1.pdf (accessed 16.04.2014).
7. Burgos S.P., de Waele R., Polman A., Atwater H.A. A single-layer wide-angle negative-index metamaterial at visible frequencies. *Nature Materials*, 2010, vol. 9, no. 5, p. 407–412. doi: 10.1038/nmat2747
8. Gralak B., Tip A. Macroscopic Maxwell's equations and negative index materials. *Journal of Mathematical Physics*, 2010, vol. 51, no. 5, art. no. 029004JMP. doi: 10.1063/1.3374670
9. Gralak B., Maystre D. Negative index materials and time-harmonic electromagnetic field. *Comptes Rendus Physique*, 2012, vol. 13, no. 8, pp. 786–799. doi: 10.1016/j.crhy.2012.04.003
10. Collin R.E. Frequency dispersion limits resolution in Veselago lens. *Progress In Electromagnetics Research B*, 2010, vol. 19, pp. 233–261.
11. Pravdin K.V., Popov I.Yu. Model of the interaction of point source electromagnetic fields with metamaterials. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, 2013, vol. 4, no. 4, pp. 570–576.
12. Liu Y., Guenneau S., Gralak B. *A route to all frequency homogenization of periodic structures*. Available at: http://arxiv.org/pdf/1210.6171v2.pdf (accessed 16.04.2014).
13. Lequime M., Gralak B., Guenneau S., Zerrad M., Amra C. *Negative Index Materials: The Key to «White» Multilayer Fabry-Perot*. Available at: http://arxiv.org/pdf/1312.6281v1.pdf (accessed 16.04.2014).
14. Lai K.L., Tsang L., Huang C.C. Spatial domain green's functions for planar multilayered structures microwave and optical technology letters. *Microwave and optical technology letters*, 2005, vol. 44, no. 1, pp. 86–91. doi: 10.1002/mop.20555
15. Maksimovic M., Hammer M., Jaksic Z. Thermal radiation antennas made of multilayer structures containing negative index metamaterials. *Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering*, 2008, vol. 6896, art. no. 689605. doi: 10.1117/12.762616



| | | |
|---|---|---|
| ***Правдин Константин Владимирович*** | – | аспирант, магистр, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, construeman@gmail.com |
| ***Попов Игорь Юрьевич*** | – | доктор физ.-мат. наук, заведующий кафедрой, профессор, Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия, popov1955@gmail.com |
| ***Konstantin V. Pravdin*** | – | postgraduate, ITMO University, Saint Petersburg, Russia, construeman@gmail.com |
| ***Igor Yu. Popov*** | – | D.Sc., Professor, Department head, ITMO University, Saint Petersburg, Russia, popov1955@gmail.com |



*Принято к печати 11.03.14*
*Accepted 11.03.14*