СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смагин В. А., Парамонов И. Ю.* Оценивание количества информационной работы вычислительной сети // Изв. вузов. Приборостроение. 2012. Т. 55, № 12. С. 16—20.
2. *Лавров Р. О., Парамонов И. Ю., Смагин В. А., Харин В. Н.* Модели надежности программного обеспечения средств измерений. СПб: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2013. 90 с.
3. *Smagin V. A.* Nanotechnology. The basis for the creation of new high-reliability elements // Automatic Control and Computer Sciences. 2008. Vol. 42. N 2. P. 109—111.
4. *Смагин В. А.* Новые вопросы теории эксплуатации. СПб: ВКА им. А. Ф. Можайского, 2010. 127 с.
5. *Смагин В. А., Филимонихин Г. В.* О моделировании случайных процессов на основе гипердельтного распределения // АВТ. 1990. № 5. С. 25—31.
6. *Хорошевский В. Г.* Инженерный анализ функционирования вычислительных машин и систем. М.: Радио и связь, 1987. 256 с.
7. *Cohen D.* All the World`s a Net // New Scientist. 2002. Apr. P. 22—29.
8. *Moffat J.* Complexity theory and network centric warfare // CCRP Publ. Ser.: Information Age Transformation Series. 2002. 201 p.

Сведения об авторах

Иван Юрьевич Парамонов — канд. техн. наук; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург; докторант; E-mail: ivan_paramonov@mail.ru

Владимир Александрович Смагин — д-р техн. наук, профессор; Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, кафедра метрологического обеспечения, Санкт-Петербург; E-mail: va_smagin@mail.ru

Рекомендована отделом
перспектив развития АСУ и связи
ВКА им. А. Ф. Можайского

Поступила в редакцию
18.06.13 г.

УДК 62.50

Н. А. Дударенко, Н. А. Полинова, М. В. Сержантова, А. В. Ушаков

КРАТНЫЕ БИНОМИАЛЬНЫЕ СТРУКТУРЫ В ЗАДАЧЕ АППРОКСИМАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ, СОДЕРЖАЩИХ ЗВЕНО ЧИСТОГО ЗАПАЗДЫВАНИЯ

Рассматривается проблема аппроксимации динамических цепей со звеном чистого запаздывания. Предложено решение, основанное на применении кратных биномиальных структур в задаче аппроксимации динамических цепей. Задача решается относительно класса аппроксимационных процедур в функциональном пространстве.

Ключевые слова: *динамическая цепь со звеном чистого запаздывания, аппроксимация, кратные биномиальные структуры, функциональное пространство.*

Введение. Постановка задачи. Реальные физические объекты в неупрощенном модельном представлении являются нелинейными и характеризуются задержками при передаче сигналов от одного физического компонента к другому. При модельном представлении физических объектов, вследствие ограниченных технологических возможностей аналитических и расчетных процедур, отмеченные факторы часто игнорируют. Однако существуют ситуации, когда игнорирование факта наличия временных задержек может способствовать неадекватности модельных представлений физическим процессам [1—4]. Эта системная ситуация рассматривается в настоящей статье. Стимулом к началу исследований стало то обстоятельство, что основные результаты по анализу и синтезу систем с элементами задержки получены, как правило, частотными методами [1—4]. Инструментарий метода пространства состояний [5—6] пока не позволяет структурно представлять элементы задержки. Таким образом, современный аппарат анализа и синтеза систем управления, обеспечивающий решение многих „тонких“ проблем теории и практики, в настоящее время не может быть применен для исследования указанного класса объектов и систем.

Конструктивным способом исследования проблемы анализа и синтеза систем с элементами задержки с использованием алгоритмической среды метода пространства состояний является аппроксимационный подход. При этом, по мнению авторов настоящей статьи, вместо непосредственной аппроксимации звена чистого запаздывания [7] следует решать задачу аппроксимации отклика динамической цепи „звено чистого запаздывания — типовое динамическое звено“ как элемента функционального пространства в экспоненциальном функциональном базисе [8].

Сравнительный анализ методов аппроксимации звена чистого запаздывания. Введем предварительно следующие определения.

Определение 1. Под звеном чистого запаздывания (ЗЧЗ) с постоянной запаздывания τ понимается звено, отклик которого $h_{\text{ч.з}}(t)$ на единичное внешнее воздействие $g(t)=1(t)$ представляется в форме

$$h_{\text{ч.з}}(t)=1(t-\tau). \tag{1}$$

Если воспользоваться представлением (1) и осуществить переход в область комплексной переменной *s*, то можно дать альтернативное определение ЗЧЗ.

Определение 2. Под звеном чистого запаздывания с постоянной запаздывания τ понимается звено, передаточная функция $\Phi_{\text{ч.з}}(s)$ „вход—выход“ которого имеет вид

$$\Phi_{\text{ч.з}}(s)=y_{\text{ч.з}}(s)/g(s)=\exp(-\tau s). \tag{2}$$

Все методы [3, 4, 7] аппроксимации ЗЧЗ строятся по схеме: формирование аналитической аппроксимации $\Phi_{\text{ч.з}}(s)$ в виде передаточной функции $\Phi_{\text{а.ч.з}}(s)$ — контроль успешной аппроксимации по невязке откликов $h_{\text{а.ч.з}}(t)=h\{t,\ \Phi_{\text{а.ч.з}}(s)\}$ и $h_{\text{ч.з}}(t)=1(t-\tau)$.

Сравнительный анализ ограничим выборкой методов, основанных на разложении экспоненты $\exp(\tau s)$ в усеченный ряд Тейлора; аппроксимации функции $\Phi_{\text{ч.з}}(s)$ представлением Паде различных порядков; аппроксимации функции $\Phi_{\text{ч.з}}(s)$ биномиальной передаточной функцией $(Ts+1)^{-\nu}$. Для краткости, аппроксимирующий элемент будем именовать аппроксимантом, а аппроксимируемый — оригиналом.

Прежде чем сравнивать выбранные методы аппроксимации, укажем предельные свойства передаточной функции $\Phi_{\text{ч.з}}(s)$ (2) оригинала:

$$\lim_{s\to 0}\left\{\Phi_{\text{ч.з}}(s)=\exp(-\tau s)\right\}=1, \tag{3}$$

$$\lim_{s\to \infty}\left\{\Phi_{\text{ч.з}}(s)=\exp(-\tau s)\right\}=0. \tag{4}$$

1. *Аппроксимант в виде усеченного ряда Тейлора представления экспоненты:*

$$\exp(-\tau s) = \left[\exp(\tau s)\right]^{-1} \cong \left[1 + \sum_{i=1}^{\nu} \left((i)!\right)^{-1} (Ts)^i\right]^{-1} =$$

$$= \left[1 + Ts + (2)^{-1}(Ts)^2 + (6)^{-1}(Ts)^3 + \ldots + (\nu!)^{-1}(Ts)^{\nu}\right]^{-1}. \qquad (5)$$

Предельные свойства аппроксиманта (5)

$$\lim_{s\to 0}\left[1 + \sum_{i=1}^{\nu}\left((i)!\right)^{-1}(Ts)^i\right]^{-1} = 1, \quad \lim_{s\to\infty}\left[1 + \sum_{i=1}^{\nu}\left((i)!\right)^{-1}(Ts)^i\right]^{-1} = 0$$

совпадают со свойствами (3), (4).

Значения задержки τ как функции $\tau = \tau(T, \nu)$ постоянной времени T и числа ν, зафиксированной на уровне 0,05 переходной функции аппроксиманта (5), сведены в табл. 1

Таблица 1

ν	1	2	3	4	5	6
τ	$0{,}0513T$	$0{,}243T$	$0{,}411T$	$0{,}534T$	$0{,}6216T$	$0{,}686T$

При ν=4 аппроксимант (5) в оболочке “Simulink” имеет в процессе установления переходной функции тринадцать полуколебаний; при ν=5, ν=6 и выше переходные функции становятся расходящимися.

2. *Аппроксимант с использованием представления Паде первого порядка*:

$$\exp(-\tau s) \cong \frac{2-\tau s}{2+\tau s} = 1\Big/\left[(2+\tau s)/(2-\tau s)\right] =$$

$$= 1\Big/\left[1 + \tau s + (2)^{-1}(\tau s)^2 + (4)^{-1}(\tau s)^3 + (8)^{-1}(\tau s)^4 + (16)^{-1}(\tau s)^5 + (32)^{-1}(\tau s)^6\right]. \qquad (6)$$

Предельные свойства аппроксиманта (6)

$$\lim_{s\to 0}\left((2-\tau s)/(2+\tau s)\right) = 1, \quad \lim_{s\to\infty}\left((2-\tau s)/(2+\tau s)\right) = -1$$

отличаются от предельных свойств (3), (4) оригинала, что порождает сомнение в целесообразности использования аппроксиманта (6).

Аппроксимант с использованием представления Паде второго порядка:

$$\exp(-\tau s) \cong \frac{\tau^2 s^2 - 6\tau s + 12}{\tau^2 s^2 + 6\tau s + 12} =$$

$$= 1\Big/\left[1 + \tau s + (2)^{-1}(\tau s)^2 + (6)^{-1}(\tau s)^3 + (24)^{-1}(\tau s)^4 + (168)^{-1}(\tau s)^5 + (5040)^{-1}(\tau s)^6 + \ldots\right]. \qquad (7)$$

Предельные свойства аппроксиманта (7)

$$\lim_{s\to 0}\left(\frac{\tau^2 s^2 - 6\tau s + 12}{\tau^2 s^2 + 6\tau s + 12}\right) = 1, \quad \lim_{s\to\infty}\left(\frac{\tau^2 s^2 - 6\tau s + 12}{\tau^2 s^2 + 6\tau s + 12}\right) = 1$$

также отличаются от предельных свойств (3), (4) оригинала, что порождает сомнение в целесообразности использования аппроксиманта (7).

3. *Аппроксимант с биномиальной передаточной функцией (БПФ)*:

$$(Ts+1)^{-\nu} = 1\Big/\left[(Ts)^{\nu} + C_1^{\nu}(Ts)^{\nu-1} + C_2^{\nu}(Ts)^{\nu-2} + \ldots + C_{\nu-2}^{\nu}(Ts)^2 + C_{\nu-1}^{\nu}(Ts)^1 + 1\right]. \qquad (8)$$

Предельные свойства аппроксиманта (8)

$$\lim_{s\to 0}\left(1\big/(Ts+1)^{\nu}\right) = 1, \quad \lim_{s\to\infty}\left(1\big/(Ts+1)^{\nu}\right) = 0$$

совпадают с предельными свойствами (3), (4) оригинала, что обусловливает целесообразность использования аппроксиманта (8) и исследования его аппроксимирующих свойств.

На рис. 1 приведены кривые откликов аппроксиманта (8) на единичное внешнее воздействие. Анализ полученных кривых послужил экспериментальной основой для расчета сведенных в табл. 2 значений задержки $\tau = \arg\{h_{\text{а.ч.з}}(t) = 0,05\}$ и длительности переходного процесса $t_{\text{п}} = \arg\{h_{\text{а.ч.з}}(t) = 0,95\}$, а также отношения $t_{\text{п}}/\tau$ как функций $t_{\text{п}} = t_{\text{п}}(T,\nu)$, $\tau = \tau(T,\nu)$ постоянной времени T и порядка ν.

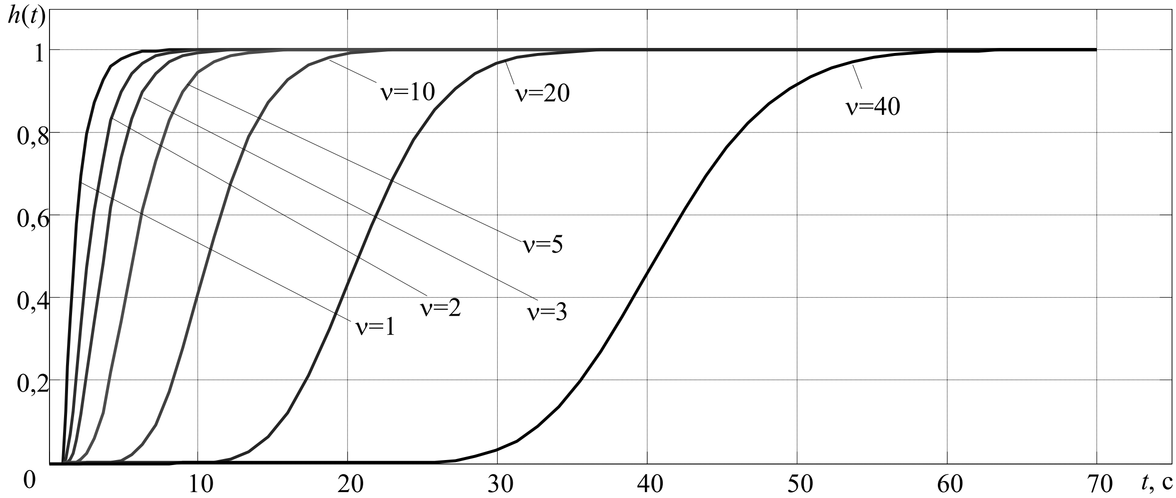

Рис. 1

Таблица 2

ν	1	2	3	4	5	6	10	20	40
τ	0,0513T	0,35T	0,82T	1,36T	1,95T	2,6T	5,4T	13,25T	30,15T
$t_{\text{п}}$	3T	4,75T	6,3T	7,76T	9,16T	10,52T	15,71T	27,9T	51T
$t_{\text{п}}/\tau$	58,48	13,57	7,68	5,7	4,7	4,04	2,91	2,1	1,69

Основной результат. Рассмотрим решение задачи аппроксимации отклика оригинала на единичное внешнее воздействие. Эта задача решается применительно к оригиналу в виде динамической цепи (ДЦ), составленной их последовательного соединения звена чистого запаздывания и апериодического звена первого порядка с постоянной времени $T_{\text{ап}}$.

Сконструируем функциональное пространство (ФП) $L^p(T_{\text{ф}})$, где $T_{\text{ф}} = \{t:\ 0 \le t \le \tau + 5T_{\text{ап}}\}$ — интервал времени формирования ФП; p — индекс нормы $\|\varphi(t)\|_p$ элемента $\varphi(t)$ ФП, удовлетворяющий условию

$$p = \arg\left\{\|\varphi(t)\|_p = \left(\int_0^{T_{\text{ф}}} |\varphi(t)|^p\, dt\right)^{1/p}\right\}, \quad p = 1, 2, \infty .$$

Норма $\|\varphi(t)\|_p$ с индексом $p = \infty$ в силу предельного перехода $p \to \infty$ получает представление $\|\varphi(t)\|_\infty = \max\limits_{t \in T_{\text{ф}}} |\varphi(t)|$.

В этом случае задача решается с помощью аппроксиманта, сформированного в виде последовательного соединения типового динамического звена с БПФ и апериодического звена первого порядка с постоянной времени $T_{\text{ап}}$. Параметры $\{\nu, T\}$ аппроксиманта определяются в результате процедуры минимизации нормы $\|e(t)\|_\infty$ невязки откликов оригинала $h_{\text{д.ц}}(t)$ и аппроксиманта $\hat{h}(t)$ на единичное ступенчатое воздействие $g(t) = 1(t)$:

$$\{\nu, T\} = \arg\min_{\nu, T}\left\{\left\|e(t)\right\|_{\infty} = \left\|h_{\text{д.ц}}(t) - \hat{h}(t)\right\|_{\infty}\right\}, \qquad (9)$$

где $h_{\text{д.ц}}(t) = h\left\{t, \Phi_{\text{д.ц}}(s) = \exp(-\tau s)\left(T_{\text{ап}}s+1\right)^{-1}\right\}$, $\hat{h}(t) = h\left\{t, \Phi_{\text{а.ч.з}}(s) = (Ts+1)^{-\nu}\left(T_{\text{ап}}s+1\right)^{-1}\right\}$.

В табл. 3 приведены результаты оценки параметров $\{\nu, T\}$ аппроксиманта для $\left\|e(t)\right\| = \min_{T,\nu}\left\|h_{\text{д.ц}}(t) - \hat{h}(t)\right\|_{p=\infty}$ и задания оригинала с передаточной функцией $\Phi_{\text{д.ц}}(s) = \exp(-s)(s+1)^{-1}$. Нетрудно видеть, что приведенные результаты, полученные для значений $T_{\text{ап}} = 1$ и $\tau = 1$, могут быть пересчитаны с использованием теоремы об изменении масштаба для любых сочетаний T и τ.

Таблица 3

ν	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	18	22	26	27
T, с	0,65	0,4	0,29	0,23	0,19	0,16	0,14	0,12	0,11	0,091	0,072	0,059	0,048	0,0405	0,039
$\|\|e(t)\|\|$	0,15	0,13	0,113	0,105	0,095	0,09	0,085	0,082	0,078	0,07	0,064	0,062	0,056	0,0515	0,05

На рис. 2 приведены кривые откликов $h_{\text{д.ц}}(t)$ и $\hat{h}(t)$, а также кривая их невязки $e(t) = h_{\text{д.ц}}(t) - \hat{h}(t)$, характеризуемая значением нормы $\left\|e(t)\right\|_{\infty} = 0{,}05$, которое достигается согласно табл. 3 при параметрах аппроксиманта $\nu = 27$ и $T = 0{,}039$ с.

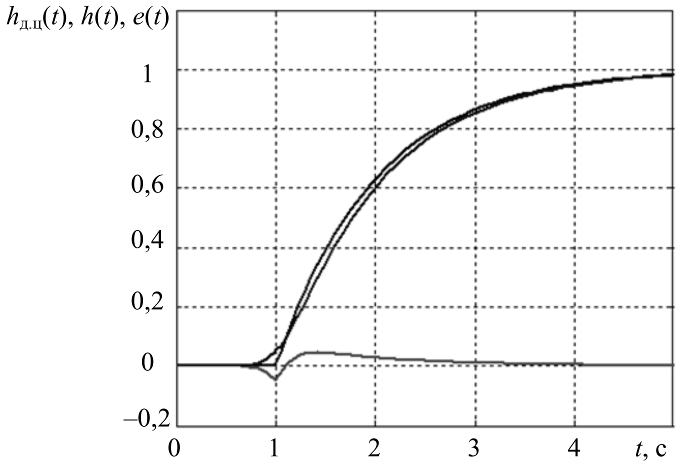

Рис. 2

Рис. 3 визуализирует данные, приведенные в табл. 3.

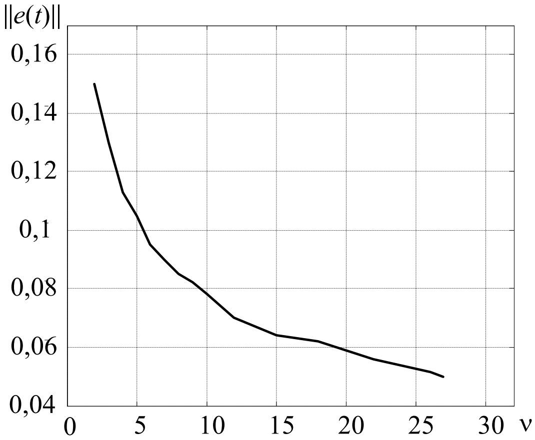

Рис. 3

Заключение. Возможности использования метода пространства состояний при исследовании динамических систем, содержащих звено чистого запаздывания, могут быть существенно расширены, если предложенную процедуру аппроксимации распространить на динамическую цепь с типовыми звеньями типа „интегратор“ и „колебательное звено“.

Статья подготовлена по результатам работы, выполненной при поддержке Министерства образования и науки РФ, проект № 14.Z50.31.0031, и государственной финансовой поддержке ведущих университетов РФ (субсидия 074 — U01).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. СПб: Изд-во „Профессия“, 2003.
2. *Янушевский Р. Т.* Управление объектами с запаздыванием. М.: Машиностроение, 1978. 416 с.
3. *Гудвин Г. К., Гребе С. Ф., Сальгадо М. Э.* Проектирование систем управления. М.: Бином, Лаборатория знаний, 2004.
4. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления: Пер. с англ. М.: Лаборатория базовых знаний, 2004.
5. *Заде Л., Дезоер Ч.* Теория линейных систем: Пер. с англ. М.: Наука, 1970.
6. *Дударенко Н. А., Слита О. В., Ушаков А. В.* Математические основы современной теории управления: аппарат метода пространства состояний: Учеб. пособие / Под ред. *А. В. Ушакова*. СПб: СПбГУ ИТМО, 2008. 323 с.
7. *Громов Ю. Ю., Земской Н. А.* Системы автоматического управления с запаздыванием. Тамбов: Изд-во ТГТУ, 2007.
8. *Френкс Л.* Теория сигналов / Пер с англ.; Под ред. *Д. Е. Вакмана*. М.: Сов. радио, 1974.

Сведения об авторах

Наталия Александровна Дударенко — канд. техн. наук, доцент; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики, Санкт-Петербург; E-mail: dudarenko@yandex.ru

Нина Александровна Полинова — студентка; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики, Санкт-Петербург; E-mail: polinova_nina@mail.ru

Майя Вячеславовна Сержантова — канд. техн. наук; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики, Санкт-Петербург; доцент; E-mail: 12noch@mail.ru

Анатолий Владимирович Ушаков — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, кафедра систем управления и информатики, Санкт-Петербург; E-mail: ushakov-avg@yandex.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики

Поступила в редакцию
13.12.12 г.