УДК 621.396:681.323
DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-8-653-658

ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОМПЛЕКСНОГО ПОЛОСОВОГО ФИЛЬТРА БАТТЕРВОРТА

С. И. Зиатдинов

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, 190000, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kaf53@guap.ru

На основании теории вычетов в общем виде получены выражения для частотной передаточной функции комплексного полосового фильтра Баттерворта. Показано, что импульсная характеристика комплексного фильтра также является комплексной и содержит вещественную и мнимую составляющие, сдвинутые по фазе на 90°. Для преобразования вещественного фильтра низких частот в фильтр Баттерворта необходимо импульсную характеристику фильтра низких частот умножить на комплексный гармонический сигнал с заданной частотой. Предложена методика расчета вещественной и мнимой составляющих импульсной характеристики комплексного полосового фильтра Баттерворта различных порядков. Рассмотрены конкретные примеры.

Ключевые слова: *комплексный полосовой фильтр, частотная передаточная функция, импульсная характеристика, полюсы.*

При решении задач фильтрации полезного сигнала на фоне шумов, восстановления непрерывного сигнала по его периодическим отсчетам и т.д. используются фильтры нижних частот (ФНЧ). Среди ФНЧ можно выделить фильтры Баттерворта, обладающие гладкой амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) в зоне прозрачности и достаточно резким спадом коэффициента передачи за ее пределами.

Вместе с тем представляет интерес построение комплексного полосового фильтра Баттерворта, средняя частота АЧХ которого могла бы перестраиваться, принимая как положительные, так и отрицательные значения. Для исследования особенностей прохождения сигнала через полосовой фильтр необходимо знать его импульсную характеристику, нахождение которой и является целью настоящей работы.

В общем виде [1] частотная передаточная функция фильтра Баттерворта может быть представлена следующим образом:

$$W_s(p) = \frac{\left|\prod_{i=1}^{s} p_i\right|}{\prod_{i=1}^{s}(p - p_i)}, \tag{1}$$

где s — порядок фильтра; p_i — полюсы передаточной функции.

После несложных преобразований уравнения (1) представим выражение для частотной передаточной функции комплексного фильтра Баттерворта нечетного порядка:

$$W_s(p) = \frac{0{,}5\omega_{\text{ср}}^{s}}{\prod_{i=1}^{(s-1)/2}\left[(p-p_0)^2 + 2a_i\omega_{\text{ср}}(p-p_0) + \omega_{\text{ср}}^2\right]\left(p - p_0 + \omega_{\text{ср}}\right)}. \tag{2}$$

Для фильтра Баттерворта четного порядка передаточная функция имеет вид

$$W_s(p)=\frac{0{,}5\omega_{\text{ср}}^s}{\prod\limits_{i=1}^{s/2}\left[(p-p_0)^2+2a_i\omega_{\text{ср}}(p-p_0)+\omega_{\text{ср}}\right]}\,. \tag{3}$$

В соотношениях (2) и (3) $p=j\omega$; ω — круговая частота; ω_0— средняя частота АЧХ фильтра; $\omega_{\text{ср}}$ — частота среза фильтра, отсчитываемая относительно средней частоты ω_0; $p_0=j\omega_0$. При этом для фильтра четного порядка $a_i=\cos\pi(i-0{,}5)/s$, нечетного — $a_i=\cos\pi i/s$.

Импульсная характеристика как реакция фильтра на δ-функцию определяется следующим соотношением [2, 3]:

$$h(t)=\frac{1}{2\pi j}\int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty}W_s(p)e^{pt}dp=\sum_{i=1}^{s}\text{res}_i\;, \tag{4}$$

где $\sum\limits_{i=1}^{s}\text{res}_i$ — сумма вычетов в подынтегральной функции выражения.

Представим подынтегральную функцию в виде

$$W_s(p)e^{pt}=P(p)/Q(p),$$

где $P(p)=\omega_0^s e^{pt}$, а

$$Q(p)=\prod_{i=1}^{(s-1)/2}\left[(p-p_0)^2+2a_i\omega_{\text{ср}}(p-p_0)+\omega_{\text{ср}}^2\right](p-p_0+\omega_{\text{ср}})$$

для фильтра нечетного порядка и

$$Q(p)=\prod_{i=1}^{s/2}\left[(p-p_0)^2+2a_i\omega_{\text{ср}}(p-p_0)+\omega_{\text{ср}}^2\right]$$

— для фильтра четного порядка.

Тогда вычеты функции $P(p)/Q(p)$ в точках $p=p_i$ определяются формулами

$$\text{res}_i=\frac{P(p)}{\left[\dfrac{dQ(p)}{dp}\right]}\ \text{при}\ p=p_i\,. \tag{5}$$

При этом импульсная характеристика фильтра принимает вид

$$h(t)=\sum_{i=1}^{s}\frac{P(p)}{\left[\dfrac{dQ(p)}{dp}\right]}\ \text{при}\ p=p_i\,. \tag{6}$$

Переходная характеристика фильтра как реакция на единичное входное воздействие [4] может быть найдена из выражения

$$g(t)=\int\limits_0^t h(\tau)d\tau\,.$$

Фильтр Баттерворта первого порядка. Из соотношения (2) находим, что

$$W_1(p)=\frac{0{,}5\omega_{\text{ср}}}{(p-p_0)+\omega_{\text{ср}}}\,.$$

Эта частотная передаточная функция имеет один комплексный полюс $p_1=p_0-\omega_{\text{ср}}=$ $=j\omega_0-\omega_{\text{ср}}$. Тогда $Q(p)=(p-p_0)+\omega_{\text{ср}}$, а $dQ(p/dp)=1$.

В результате, согласно (6), импульсная характеристика фильтра Баттерворта первого порядка определяется выражением

$$h(t) = 0,5\omega_{\text{ср}}\left(e^{j\omega_0 t - \omega_{\text{ср}}t} + e^{j\omega_0 t - \omega_{\text{ср}}t}\right) = \omega_{\text{ср}}e^{-\omega_{\text{ср}}t}(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t).$$

Таким образом, импульсная характеристика комплексного фильтра Баттерворта носит комплексный характер.

Фильтр Баттерворта второго порядка. Из выражения (3) находим частотную передаточную функцию рассматриваемого фильтра

$$W_2(p) = \frac{0,5\omega_{\text{ср}}^2}{(p-p_0)^2 + 2a_1\omega_{\text{ср}}(p-p_0) + \omega_{\text{ср}}^2},$$

где $a_1 = \cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2}$.

При этом

$$Q(p) = (p-p_0)^2 + 2a_1\omega_{\text{ср}}(p-p_0) + \omega_{\text{ср}}^2 \text{ и } dQ(p)/dp = 2p + 2a_1\omega_{\text{ср}}.$$

Частотная передаточная функция $W_2(p)$ имеет два комплексных полюса

$$p_{1,2} = \left(-a_1 \pm j\sqrt{1-a_1^2}\right)\omega_{\text{ср}} + j\omega_0.$$

После подстановки этих полюсов в выражение (5) получим

$$\text{res}_{1,2} = \omega_{\text{ср}}\frac{e^{\left(-a_1 \pm j\sqrt{1-a_1^2}\right)\omega_{\text{ср}}t + j\omega_0 t}}{\pm 2j\sqrt{1-a_1^2}}.$$

В результате импульсную характеристику фильтра Баттерворта второго порядка можно представить следующим образом:

$$h(t) = \text{res}_1 + \text{res}_2 = \sqrt{2}\omega_{\text{ср}}e^{-\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}}t}\sin\frac{\omega_{\text{ср}}}{\sqrt{2}}t(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t).$$

Фильтр Баттерворта третьего порядка. Для этого фильтра частотная передаточная функция имеет вид

$$W_3(p) = \frac{0,5\omega_{\text{ср}}^3}{\left[(p-p_0)^2 + 2a_1\omega_{\text{ср}}(p-p_0) + \omega_{\text{ср}}^2\right](p-p_0+\omega_{\text{ср}})},$$

где $a_1 = \cos(\pi/3) = 0,5.$ Тогда

$$Q(p) = \left[(p-p_0)^2 + 2a_1\omega_{\text{ср}}(p-p_0) + \omega_{\text{ср}}^2\right](p-p_0+\omega_{\text{ср}}),$$

$$dQ(p)/dp = 3(p-p_0)^2 + 4\omega_{\text{ср}}(p-p_0) + 2\omega_{\text{ср}}^2.$$

Полюсы частотной передаточной функции фильтра можно представить следующим образом:

$$p_1 = j\omega_0 - \omega_{\text{ср}};\;\; p_{2,3} = -\frac{\omega_{\text{ср}}}{2} \pm \sqrt{\frac{\omega_{\text{ср}}^2}{4} - \omega_{\text{ср}}^2} + j\omega_0 = \frac{\omega_{\text{ср}}}{2}(-1 \pm j\sqrt{3}) + j\omega_0.$$

При этом вычеты в точках $p = p_{1,2,3}$ определяются выражениями

$$\text{res}_1 = \omega_{\text{ср}}e^{-\omega_{\text{ср}}t + j\omega_0 t};\;\; \text{res}_{2,3} = \omega_{\text{ср}}\frac{e^{-0,5\omega_{\text{ср}}t}e^{\pm j0,5\sqrt{3}\omega_{\text{ср}}t + j\omega_0}}{-1,5 \pm j0,5\sqrt{3}}.$$

В результате импульсная характеристика фильтра Баттерворта третьего порядка будет иметь вид

$$h(t) = \mathrm{res}_1 + \mathrm{res}_2 + \mathrm{res}_3 =$$

$$= \omega_{\text{ср}}\left[e^{-\omega_{\text{ср}}t} + e^{-0{,}5\omega_{\text{ср}}t}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\ \sin 0{,}5\sqrt{3}\omega_{\text{ср}}t - \cos 0{,}5\sqrt{3}\omega_{\text{ср}}t\right)\right](\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t).$$

Фильтр Баттерворта четвертого порядка. Частотная передаточная функция для фильтра четвертого порядка имеет вид

$$W_4(p) = \frac{0{,}5\omega^4}{\left[(p-p_0)^2 + 2a_1\omega_{\text{ср}}(p-p_0) + \omega_{\text{ср}}^2\right]}\ \frac{1}{\left[(p-p_0)^2 + 2a_2\omega_{\text{ср}}(p-p_0) + \omega_{\text{ср}}^2\right]},$$

где $a_1 = \cos(\pi/8)$, $a_2 = \cos(3\pi/8)$.

Нетрудно показать, что функция $Q(p)$ в этом случае записывается следующим образом:

$$Q(p) = (p-p_0)^4 + b_3(p-p_0)^3 + b_2(p-p_0)^2 + b_1(p-p_0) + \omega_{\text{ср}}^4,$$

где $b_1 = 2(a_1+a_2)\omega_{\text{ср}}^3$; $b_2 = 2(1+2a_1a_2)\omega_{\text{ср}}^2$; $b_3 = 2(a_1+a_2)\omega_{\text{ср}}$.

При этом

$$dQ(p)/dp = 4(p-p_0)^3 + 3b_3(p-p_0)^2 + 2b_2(p-p_0) + b_1.$$

Полюсы частотной передаточной функции $W_4(p)$ определяются соотношениями

$$p_{1,2} = \left(-a_1 \pm j\sqrt{1-a_1^2}\right)\omega_{\text{ср}} + j\omega_0,\quad p_{3,4} = \left(-a_2 \pm j\sqrt{1-a_2^2}\right)\omega_{\text{ср}} + j\omega_0.$$

В результате вычеты функции $W_4(p)$ в точках $p = p_{1,2,3,4}$ можно найти из соотношений

$$\mathrm{res}_{1,2} = 0{,}5\omega_{\text{ср}}^4\frac{e^{-c_1t \pm jc_2 + j\omega_0 t}}{d_1 \pm jk_1};\ \mathrm{res}_{3,4} = 0{,}5\omega_{\text{ср}}^4\frac{e^{-c_3t \pm jc_4 + j\omega_0 t}}{d_2 \pm jk_2},$$

где $c_1 = -a_1\omega_{\text{ср}}$; $c_2 = \sqrt{1-a_1^2}\,\omega_{\text{ср}}$; $c_3 = -a_2\omega_{\text{ср}}$; $c_4 = \sqrt{1-a_2^2}\,\omega_{\text{ср}}$;

$$d_1 = 4c_1^3 - 12c_2^2c_1 + 3b_3c_1^2 - 3b_3c_2^2 + 2b_2c_1 + b_1;$$

$$k_1 = 12c_1^2c_2 - 4c_2^3 + 6b_3c_1c_2 + 2b_2c_2;$$

$$d_2 = 4c_3^3 - 12c_4^2c_3 + 3b_3c_3^2 - 3b_3c_4^2 + 2b_2c_3 + b_1;$$

$$k_2 = 12c_3^2c_4 - 4c_4^3 + 6b_3c_3c_4 + 2b_2c_4.$$

Тогда импульсная характеристика фильтра принимает вид

$$h(t) = \sum_{i=1}^{8} res_i = \omega_{\text{ср}}^4\left[(2d_1\ \sin c_2t + 2k_1\cos c_2t) + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{c_3t}}{d_2^2 + k_2^2}(2d_2\ \sin c_4t + 2k_2 s\cos c_4t)\right](\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t).$$

Проанализировав полученные результаты, можно отметить, что импульсная характеристика комплексного фильтра также является комплексной. Для преобразования фильтра нижних частот в комплексный полосовой фильтр достаточно импульсную характеристику фильтра нижних частот умножить на $(\cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t)$. Рассмотренную методику получения импульсной характеристики легко распространить на комплексные полосовые фильтры Баттерворта более высоких порядков.

В качестве примера на рис. 1 приведены АЧХ комплексных фильтров Баттерворта первого, второго и четвертого порядков для случая $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 15$ Гц; $f_{\text{ср}} = \omega_{\text{ср}} / 2\pi = 20$ Гц. На рис. 2 для такого случая приведены вещественная и мнимая составляющие импульсной характеристики фильтра Баттерворта второго порядка.

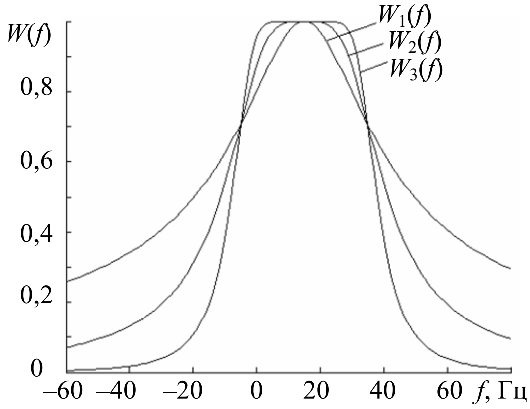

Рис. 1

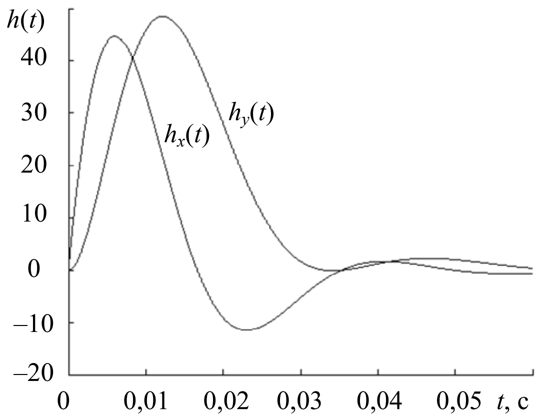

Рис. 2

Полученные теоретические результаты могут быть использованы при решении различных задач обработки сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зиатдинов С. И., Гусев А. И., Елисеев А. А.* Цифровой фильтр Баттерворта с малым динамическим диапазоном значений весовых коэффициентов // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 9. С. 26—33.

2. *Зиатдинов С. И.* Импульсная и переходная характеристики системы автоматического регулирования с узкополосными сглаживающими цепями // Изв. вузов. Приборостроение. 2006. Т. 49, № 10. С. 30—32.

3. *Бесекерский В. А.* Цифровые автоматические системы. М.: Наука, 1976. 575 с.

4. *Воробьев С. Н.* Цифровая обработка сигналов. М.: Академия, 2013. 320 с.

Сведения об авторе

Сергей Ильич Зиатдинов — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения; E-mail: kaf53@guap.ru

Рекомендована кафедрой информационно-сетевых технологий

Поступила в редакцию 08.12.14 г.

Ссылка для цитирования: *Зиатдинов С. И.* Импульсная характеристика комплексного полосового фильтра Баттерворта // Изв. вузов. Приборостроение. 2015. Т. 58, № 8. С. 653—658.

PULSE CHARACTERISTIC OF BUTTERWORTH COMPLEX BANDPASS FILTER

S. I. Ziatdinov

Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation,
190000, Saint Petersburg, Russia
E-mail: kaf53@guap.ru

General expressions for frequency transfer function of Butterworth complex bandpass filter are derived with the use of the residue theory. The pulse characteristic of a complex filter is shown to be a complex one, phase-shift between the real and imaginary components of the function equals 90°. A method is proposed for calculating the real and imaginary components of the pulse characteristic of a complex Butterworth bandpass filter of arbitrary order. Concrete examples are presented.

Keywords: complex bandpass filter, frequency transfer function, pulse characteristic, poles.

Data on author

Sergey I. Ziatdinov — Dr. Sci., Professor; Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation; E-mail: kaf53@guap.ru

Reference for citation: *Ziatdinov S. I.* Pulse characteristic of Butterworth complex bandpass filter // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedeniy. Priborostroenie. 2015. Vol. 58, N 8. P. 653—658 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2015-58-8-653-658