

УСТОЙЧИВОСТЬ ЖЕЛАЕМОГО СТАЦИОНАРНОГО РЕЖИМА ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ИЗМЕНЕНИЕМ СТРУКТУРЫ

А. И. КОРШУНОВ

Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“,
198514, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Рассматривается замкнутая линейная автоматическая система, структура которой периодически изменяется с достаточно высокой частотой. Расчет системы целесообразно производить по предельной непрерывной модели, не учитывая пульсации токов и напряжений реальной системы. Дискретный характер управления может вызвать в реальной системе негативные явления, например автоколебания, искажающие желаемый стационарный режим, имеющий частоту пульсаций выходного сигнала, равную частоте переключений структуры системы. Причиной их обычно оказывается нарушение условий устойчивости желаемого режима. С учетом разных вариантов математического описания силовой части системы внутри периодов коммутации получены ее разностное уравнение и разностное уравнение интегрального регулятора. Для заданного соотношения частей периода коммутации определены стационарный вектор фазовых координат системы и матрица линеаризованного разностного уравнения возмущенного движения. Расположение ее собственных значений внутри круга единичного радиуса с точностью до граничного случая гарантирует асимптотическую устойчивость стационарного режима. С использованием этой матрицы в случае устойчивости желаемого стационарного режима можно построить квадратичную функцию Ляпунова, позволяющую гарантированно выделить хотя бы часть области устойчивости. Приведен пример практического применения полученных результатов к стабилизатору напряжения с параметрическим управлением. Исследование устойчивости его желаемого стационарного режима, выполненное методом математического моделирования в системе MatLab, подтвердило актуальность задачи и корректность ее решения.

Ключевые слова: линейная система, периодическое изменение структуры, желаемый стационарный режим, устойчивость, возмущенное движение, матрица линеаризованного уравнения возмущенного движения

Введение. Замкнутые автоматические системы с периодическим изменением структуры широко распространены в силовой электронике. К этому классу систем относятся, например, стабилизированные импульсные преобразователи напряжения — понижающие, повышающие и инвертирующие, силовые части которых представлены на рис. 1, а—в соответственно [1—4].

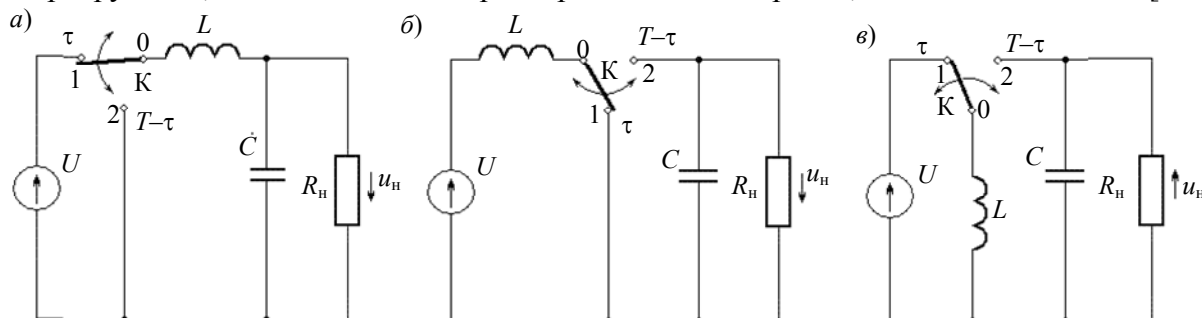


Рис. 1

К этому же классу можно отнести и системы с параметрическим управлением. Примером такой системы служит стабилизатор напряжения постоянного тока [5]. Его силовая часть изображена на рис. 2.

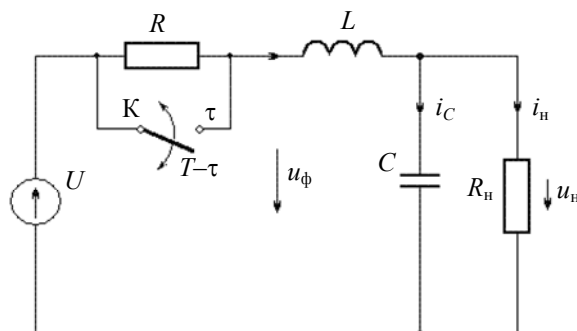


Рис. 2

Особенность применения систем этого класса в силовой электронике заключается в высокой частоте переключений и регулировании относительных длительностей частей периода. Это позволяет плавно изменять полезную постоянную составляющую выходной величины [6] при незначительных ее пульсациях, имеющих частоту переключений структуры.

Расчет системы целесообразно проводить на основе ее предельной непрерывной модели, соответствующей бесконечной частоте переключений структуры [7]. Корректность принимаемого допущения необходимо проверить, поскольку пренебрежение дискретным характером управления может привести к нежелательным субгармоническим автоколебаниям, снижающим частоту и увеличивающим амплитуду пульсаций выходного напряжения намного выше допустимой, или к другим негативным явлениям. Поэтому нарушение условий устойчивости желаемого стационарного режима недопустимо. Помимо возможности экспериментально проверить устойчивость стационарного режима путем математического моделирования желательно иметь и аналитические условия его устойчивости. Определение этих условий является задачей данной статьи.

Насколько известно автору, исследование устойчивости замкнутых систем с периодическим изменением структуры с учетом дискретного характера управления не проводилось. Например, заявленное в работе [8] исследование устойчивости импульсных стабилизаторов напряжения с переменной структурой силовой части методом бифуркации Андронова — Хопфа проводилось на предельной непрерывной модели системы. Эта модель была получена путем длительных преобразований с использованием приближенных выражений и ничем не обоснованным переходом от разностных уравнений к дифференциальным.

Математическая модель системы с периодическим изменением структуры. Рассмотрим системы, подобные импульсным стабилизаторам напряжения постоянного тока (ИСНПТ), в которых на протяжении периода происходит только одно изменение структуры.

В первой части периода $nT < t < nT + \tau_n$, где n — целое положительное число, T — период переключений, τ_n — длительность первой части n -го периода, силовая часть системы описывается системой линейных дифференциальных уравнений, записанных в векторно-матричной форме:

$$\frac{dX}{dt} = A_1 X + h_1 E_1, u_n = c^T X, \quad (1)$$

где X — m -мерный вектор фазовых координат силовой части стабилизатора, m -й элемент которого равен выходной величине системы; h_1 — m -мерный числовой вектор-столбец; c^T — m -мерная вектор-строка, m -й элемент которой равен 1, а остальные элементы равны 0; E_1 —

входная величина в первой части периода; A_1 — $m \times m$ -матрица, элементы которой зависят от параметров системы в первой части периода.

Аналогично во второй части периода коммутации $nT + \tau_n < t < (n+1)T$ имеем:

$$\frac{dX}{dt} = A_2 X + h_2 E_2, u_H = c^T X. \quad (1a)$$

Рассмотрим вариант использования простейшего интегрального регулятора, обеспечивающего нулевую статическую ошибку стабилизации, и широтно-импульсного преобразователя I рода. В этом случае

$$\tau_n = k_M e_n, \quad (2)$$

где $k_M = \text{const}$ — параметр модулятора; $e_n = e(t) \big|_{t=nT}$, $e(t)$ — выходной сигнал интегрального регулятора, ограниченный значениями $0 < e(t) < T/k_M$,

$$\frac{de(t)}{dt} = k_p (U_3 - u_H(t)), \quad (3)$$

где U_3 — заданное значение выходной величины, например напряжения ИСНПТ, k_p — коэффициент преобразования интегрального регулятора.

С учетом динамических свойств регулятора состояние стабилизатора определяется $(m+1)$ -мерным вектором фазовых координат $Z = [X^T, e]^T$. Процессы в стабилизаторе в n -м периоде коммутации описываются уравнениями (1)–(3).

В дальнейшем будем полагать матрицы A_1 и A_2 гурвицевыми, что в случае ИСНПТ следует из пассивности линейных элементов (кроме источников питания E_1 и E_2) электрических цепей, образующих силовую часть стабилизатора.

Разностное уравнение ИСНПТ. Разностное уравнение ИСНПТ связывает значения фазовых координат системы в начале следующего периода $Z((n+1)T) = Z_{n+1} = [X_{n+1}^T, e_{n+1}]^T$ с их значениями в начале текущего периода $Z(nT) = Z_n = [X_n^T, e_n]^T$. При этом предполагается непрерывность фазовых координат, т.е. $Z(t-0) = Z(t+0)$.

Обозначив $X(nT+\tau_n) = X_n'$ и решив уравнения (1), (1a) и (3), получим

$$\begin{aligned} X_n' &= H_1(\tau_n) X_n + \int_0^{\tau_n} H_1(\tau_n - \eta) h_1 E_1 d\eta; \\ X_{n+1} &= H_2(T - \tau_n) X_n' + \int_0^{T - \tau_n} H_2(T - \tau_n - \eta) h_2 E_2 d\eta = H_2(T - \tau_n) H_1(\tau_n) X_n + \\ &+ H_2(T - \tau_n) \int_0^{\tau_n} H_1(\tau_n - \eta) h_1 E_1 d\eta + \int_0^{T - \tau_n} H_2(T - \tau_n - \eta) h_2 E_2 d\eta, \end{aligned} \quad (4)$$

где $H_i(t) = \exp(A_i t)$ — матричный экспоненциал, $i=1,2$;

$$e_{n+1} = e_n + k_p \int_0^T (U_3 - u_H(nT + \eta)) d\eta \quad \text{или} \quad \tau_{n+1} = \tau_n + k_M k_p \int_0^T (U_3 - u_H(nT + \eta)) d\eta, \quad (5)$$

где

$$u_H(nT + \eta) = c^T X(nT + \eta), \quad X(nT + \eta) = H_1(\eta) X_n + \int_0^{\eta} H_1(\eta - \zeta) h_1 E_1 d\zeta \quad \text{при} \quad 0 < \eta < \tau_n,$$

$$X(nT + \eta) = H_2(\eta - \tau_n)X'_n + \int_0^{\eta - \tau_n} H_2(\eta - \tau_n - \zeta)h_2E_2d\zeta \text{ при } \tau_n < \eta < T.$$

При определенных значениях $E_1 = \text{const}$, $E_2 = \text{const}$ и заданном $U_3 = \text{const}$ в линейной зоне возможен желаемый стационарный режим, определяемый условием

$$Z_{n+1} = Z_n = Z_0 = \text{const} \text{ или } X_{n+1} = X_n = X_0, e_{n+1} = e_n = e_0 (\tau_{n+1} = \tau_n = \tau_0, 0 < \tau_0 < T).$$

Определение точных значений Z_0 и τ_0 в общем случае представляет собой сложную задачу. При интегральном регуляторе среднее значение выходного напряжения совпадает с его заданным значением, т.е.

$$U_3 = T^{-1}c^T \{ \{A_1^{-1}[H_1(\tau_0) - E] + A_2^{-1}[H_2(T - \tau_0) - E]H_1(\tau_0)\}X_0 + \{A_1^{-1} + A_2^{-1}[H_2(T - \tau_0) - E]\}h_1E_1 - A_1^{-1}h_1E_1\tau_0 + A_2^{-1}[H_2(T - \tau_0) - E]h_2E_2 - A_2^{-1}h_2E_2(T - \tau_0) \}. \quad (6)$$

Из этого условия в каждом конкретном случае можно точно определить величину τ_0 , по которой можно построить стационарный режим и затем оценить его устойчивость.

По значению τ_0 сразу определяется $e_0 = \tau_0 / k_M$. Из уравнения (4) находим:

$$X_0 = [E - H_2(T - \tau_0)H_1(\tau_0)]^{-1} \{ H_2(T - \tau_0)[H_1(\tau_0) - E]A_1^{-1}h_1E_1 + [H_2(T - \tau_0) - E]A_2^{-1}h_2E_2 \}. \quad (7)$$

Матрица $[E - H_2(T - \tau_0)H_1(\tau_0)]$ при принятых допущениях невырожденная и, следовательно, существует ее обратная матрица (см. Приложение). Рассматриваемый стационарный режим ИСНПТ является желательным, поскольку обеспечивает равномерную загрузку ключей и наименьшие пульсации выходного напряжения при выбранной частоте коммутации. Для существования этого режима необходимо обеспечить его устойчивость.

Оценка устойчивости желаемого стационарного режима ИСНПТ. Для оценивания устойчивости необходимо линеаризовать разностное уравнение возмущенного движения ИСНПТ:

$$\Delta Z_{n+1} = f(\Delta Z_n), \quad (8)$$

где $\Delta Z_n = Z_n - Z_0 = [\Delta X_n^T, \Delta e_n^T]^T$, $\Delta X_n = X_n - X_0$, $\Delta e_n = e_n - e_0$ или $\Delta Z_n = Z_n - Z_0 = [\Delta X_n^T, \Delta \tau_n^T]^T$, $\Delta X_n = X_n - X_0$, $\Delta \tau_n = \tau_n - \tau_0$, $0 < \tau_n < T$.

Подстановка $X_n = X_0 + \Delta X_n$, $\tau_n = \tau_0 + \Delta \tau_n$ в уравнения (4) и (5) и их линеаризация при $\Delta X_n \approx 0$, $\Delta \tau_n \approx 0$ дает систему двух линеаризованных уравнений:

$$\Delta X_{n+1} = H_2(T - \tau_0)H_1(\tau_0)\Delta X_n + g_m \Delta \tau_n; \Delta \tau_{n+1} = q_m^T \Delta X_n + d_{m+1, m+1} \Delta \tau_n, \quad (9)$$

$$g_m = H_2(T - \tau_0)(A_1 - A_2)H_1(\tau_0)X_0 - H_2(T - \tau_0) \{ A_2 A_1^{-1} [H_1(\tau_0) - E] - H_1(\tau_0) \} h_1 E_1 - H_2(T - \tau_0) h_2 E_2;$$

$$q_m^T = -kc^T \{ A_1^{-1} [H_1(\tau_0) - E] + A_2^{-1} [H_2(T - \tau_0) - E] H_1(\tau_0) \};$$

$$d_{m+1, m+1} = 1 - kc^T \{ [H_2(T - \tau_0) - E] A_2^{-1} (A_1 - A_2) H_1(\tau_0) X_0 + [H_2(T - \tau_0) - E] [A_1^{-1} - (A_1^{-1} - A_2^{-1}) H_1(\tau_0)] h_1 E_1 - A_2^{-1} [H_2(T - \tau_0) - E] h_2 E \},$$

где g_m — m -мерный вектор-столбец, q_m^T — m -мерный вектор-строка, $d_{m+1, m+1}$ — скаляр, $k = k_M k_p$.

Линеаризованное разностное уравнение возмущенного движения можно записать в матричной форме, используя блочные векторы и матрицы:

$$\Delta Z_{n+1} = D \Delta Z_n, \quad (10)$$

где $D = \begin{bmatrix} D_{m,m} & g_m \\ q_m & d_{m+1,m+1} \end{bmatrix}$, $\Delta Z_n = \begin{bmatrix} \Delta X_n \\ \Delta \tau_n \end{bmatrix}$ — $(m+1) \times (m+1)$ -квадратная матрица и $(m+1)$ -мерный вектор-столбец соответственно.

Как известно, для асимптотической устойчивости желательного стационарного режима с точностью до граничного случая необходимо и достаточно выполнения условия [7]

$$|\lambda_i| < 1, \quad (11)$$

где λ_i — различные собственные значения матрицы D или корни ее характеристического уравнения

$$\det[zE - D] = 0,$$

среди которых могут быть кратные и комплексно-сопряженные корни.

Определив максимальный по модулю корень, например выбрав его среди определенных в системе MatLab, можно оценить не только устойчивость системы, но и время затухания свободного процесса в линеаризованной системе.

Разумеется, выполнение условия (11) гарантирует только устойчивость в малом, а область устойчивости в фазовом пространстве $\{\Delta X, \Delta \tau\}$ оказывается не определенной.

Для оценивания области устойчивости можно воспользоваться вторым методом Ляпунова [8], дающим, как известно, только достаточные условия устойчивости. Для линеаризуемой устойчивой в малом системы в качестве функции Ляпунова целесообразно использовать положительно-определенную квадратичную форму фазовых координат $V_n = Z_n^T B Z_n$, где B — симметричная матрица. Для определения матрицы квадратичной формы необходима матрица D линеаризованного уравнения возмущенного движения (10). Имея матрицу D , по выбранной матрице положительно-определенной квадратичной формы $U = Z_n^T A Z_n$, где A — симметричная матрица, можно определить матрицу B положительно-определенной квадратичной формы V_n из матричного уравнения [9]

$$D^T B D - B + A = 0. \quad (12)$$

При достаточно малых возмущениях получаем первую разность функции Ляпунова $\Delta V_n = V_{n+1} - V_n \approx -U_n < 0$, что гарантирует выделение хотя бы части области устойчивости желаемого стационарного режима [9].

Использование нескольких квадратичных функций Ляпунова, соответствующих различным матрицам A , позволяет расширить часть области устойчивости, выделяемой в фазовом пространстве [10].

Пример. Исследуем устойчивость ИСНПТ с параметрическим управлением [4], схема которого представлена на рис. 2.

В первой части n -го периода ($0 < \eta = t - nT < \tau_n$) силовая часть описывается уравнениями (1), где

$$X = \begin{bmatrix} i \\ u_H \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/R_H C \end{bmatrix}, \quad h_1 = h = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [0, 1], \quad E_1 = U, \quad (13)$$

а во второй части n -го периода ($\tau_n < \eta = t - nT < T$) силовая часть описывается уравнениями (1а), где

$$X = \begin{bmatrix} i \\ u_H \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -R/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_H C \end{bmatrix}, \quad h_2 = h = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T = [0, 1], \quad E_2 = U. \quad (14)$$

Согласно [4, 5] предельная непрерывная модель силовой части имеет вид

$$\frac{dX}{dt} = AX + hU, \quad u_H = c^T X, \quad (15)$$

где

$$A = A_1\gamma + A_2(1-\gamma) = \begin{bmatrix} -(1-\gamma)R/L & -1/L \\ 1/C & -1/R_H C \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{\tau}{T}.$$

В установившемся режиме при $\gamma_0 = \tau_0/T = \text{const}$ $AX + hU = 0$, т.е.

$$\frac{(1-\gamma_0)R}{L}i + \frac{1}{L}u_H = \frac{1}{L}U; \quad \frac{1}{C}i - \frac{1}{R_H C}u_H = 0,$$

откуда

$$u_H = \frac{R_H}{R_H + (1-\gamma_0)R}U, \quad i = \frac{1}{R_H + (1-\gamma_0)R}U = \frac{u_H}{R_H}. \quad (16)$$

Поскольку при интегральном регуляторе в предельной непрерывной модели $u_H = U_3$, легко определить

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{T} = 1 - \frac{R_H}{R} \left(\frac{U}{U_3} - 1 \right), \quad \tau_0 = \left[1 - \frac{R_H}{R} \left(\frac{U}{U_3} - 1 \right) \right] T. \quad (17)$$

Вычислив собственные значения матриц A_1 и A_2 , соответственно получим

$$\left. \begin{aligned} p_{1,2} &= -\frac{1}{2R_H C} \pm \sqrt{\frac{1}{4R_H^2 C^2} - \frac{1}{LC}}, \quad q_{1,2} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R_H C} \right) \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{R}{L} + \frac{1}{R_H C} \right)^2 - \frac{1}{LC} \left(1 + \frac{R}{R_H} \right)}, \\ H_1(t) = \exp(A_1 t) &= \frac{1}{p_1 - p_2} \begin{bmatrix} \left(p_1 + \frac{1}{R_H C} \right) e^{p_1 t} - \left(p_2 + \frac{1}{R_H C} \right) e^{p_2 t} & -\frac{1}{L} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) \\ \frac{1}{C} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) & p_1 e^{p_1 t} - p_2 e^{p_2 t} \end{bmatrix}, \\ H_2(t) = \exp(A_2 t) &= \frac{1}{q_1 - q_2} \begin{bmatrix} \left(q_1 + \frac{1}{R_H C} \right) e^{q_1 t} - \left(q_2 + \frac{1}{R_H C} \right) e^{q_2 t} & -\frac{1}{L} (e^{q_1 t} - e^{q_2 t}) \\ \frac{1}{C} (e^{q_1 t} - e^{q_2 t}) & \left(q_1 + \frac{R}{L} \right) e^{q_1 t} - \left(q_2 + \frac{R}{L} \right) e^{q_2 t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

С учетом выражений (13), (14) по формуле (7) находим

$$X_0 = [E - H_2(T - \tau_0)H_1(\tau_0)]^{-1} \{ H_2(T - \tau_0)[H_1(\tau_0) - E]A_1^{-1} + [H_2(T - \tau_0) - E]A_2^{-1} \} hU.$$

Переходя в последнем выражении к пределу при $T \rightarrow 0$, получаем

$$\lim_{T \rightarrow 0} X_0 = \left[\frac{U}{R_H + (1-\gamma_0)R}, \quad \frac{R_H}{R_H + (1-\gamma_0)R} U \right]^T, \quad (19)$$

что согласуется с выражением (16) и объясняется полным исчезновением пульсаций при $T \rightarrow 0$.

Вычислив при заданных параметрах схемы (см. рис. 2): $R=25$ Ом, $R_H=100$ Ом, $U_3=100$ В, $U=112,5$ В, $T=2 \cdot 10^{-4}$ с, $L=2 \cdot 10^{-2}$ Гн, $C=1 \cdot 10^{-4}$ Ф, $\tau_0=0,5T=1 \cdot 10^{-4}$ с, $\gamma_0=0,5$ [4]·элементы вектора X_0 , получим: $X_0=[0,969108, 100,0034]^T$. Сравнение этого значения с предельным (при $T \rightarrow 0$) $X_0 = [1, 100]^T$ показывает хорошее совпадение, что говорит о малых пульсациях тока и напряжения при выбранных параметрах фильтра L и C и достаточно высокой частоте коммутации ($F=1/T=5$ кГц).

В рассматриваемом случае несколько упрощаются выражения для элементов матрицы D :

$$g_2 = H_2(T - \tau_0)(A_1 - A_2) \{ H_1(\tau_0)X_0 + A_1^{-1} [H_1(\tau_0) - E]hU \}, \quad (20)$$

$$d_{3,3} = 1 - kc^T \{ [H_2(T - \tau_0) - E]A_2^{-1}(A_1 - A_2)H_1(\tau_0)X_0 + A_1^{-1} [H_1(\tau_0) - E]hU \}. \quad (21)$$

Вследствие наличия пульсаций выходного напряжения ИСНПТ его среднее значение отличается от напряжения предельной непрерывной модели при одинаковых значениях $\gamma_0 = \tau_0/T$. При $\tau_0 = T/2$ ($\gamma_0 = 0,5$) в установившемся режиме среднее значение $u_n(t)$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u_n(t) dt = \frac{1}{T} c^T \{ \{ A_1^{-1} [H_1(\tau_0) - E] + A_2^{-1} [H_2(T - \tau_0) - E] H_1(\tau_0) \} X_0 + \{ A_1^{-2} [H_1(\tau_0) - E] + A_2^{-2} [H_2(T - \tau_0) - E] + A_2^{-1} [H_2(T - \tau_0) - E] A_1^{-1} [H_1(\tau_0) - E] - A_1^{-1} \tau_0 - A_2^{-1} (T - \tau_0) \} hU \}$$

равно 100,000036 В.

Постоянная составляющая выходного напряжения ИСНПТ $u_n(t)$ незначительно отличается от установившегося напряжения его предельной непрерывной модели: $u_n = U_3 = 100$ В. Это позволяет принять в реальной модели ИСНПТ $U_3 = 100,000036$ В. Определять значение τ_0 , обеспечивающее в реальной модели среднее значение выходного напряжения, равное 100 В, не имеет смысла, поскольку оно будет незначительно отличаться от $\tau_0 = T/2$ ($\gamma_0 = 0,5$).

При заданных параметрах силовой части ИСНПТ согласно формулам (18) получаем

$$p_{1,2} = \alpha_1 \pm j\omega_1, \quad \alpha_1 = 50, \quad \omega_1 = 100\sqrt{49,75}, \quad q_{1,2} = \alpha_2 \pm j\omega_2, \quad \alpha_2 = 675, \quad \omega_2 = 100\sqrt{4,4375},$$

$$H_1(\tau_0) = \begin{bmatrix} 0,99751 & -4,9709 \cdot 10^{-3} \\ 0,99419 & 0,98757 \end{bmatrix}, \quad H_2(T - \tau_0) = \begin{bmatrix} 0,88078 & -4,6733 \cdot 10^{-3} \\ 0,93466 & 0,98826 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Вычислив по формулам (10), (20) и (21) с использованием (22) элементы матрицы D для значения $k = k_p k_m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ В}^{-1}$, соответствующего 10 дБ запаса устойчивости в предельной непрерывной модели ИСНПТ (критическое значение $k_{кр} = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{0,5} = 65,2 \cdot 10^{-4} \text{ В}^{-1}$, $(k/T)_{кр} = 65,2 \text{ (В} \cdot \text{с)}^{-1}$), получим

$$D = \begin{bmatrix} 0,87337 & -8,9897 \cdot 10^{-3} & 1135,0 \\ 1,9140 & 0,97074 & 1205,0 \\ -3,9267 \cdot 10^{-7} & -3,9473 \cdot 10^{-7} & 0,99987 \end{bmatrix}, \quad \text{eig}(D) = \begin{bmatrix} 0,95068 + 0,11736j \\ 0,95068 - 0,11736j \\ 0,94262 \end{bmatrix},$$

где $\text{eig}(D)$ — вектор собственных значений матрицы D (в системе MatLab).

Наибольшее по модулю собственное значение матрицы D $|\lambda|_{\max} = \max |\lambda_i| = 0,95789 < 1$ удовлетворяет условию (11), что доказывает асимптотическую устойчивость желательного стационарного режима.

При значении коэффициента $k = k_p k_m = 3,26 \cdot 10^{-3} \text{ В}^{-1}$ ($(k/T) = 16,3 \text{ (В} \cdot \text{с)}^{-1}$), соответствующем границе устойчивости предельно непрерывной модели, получаем также пару комплексно-сопряженных корней, имеющих максимальный модуль: $|\lambda|_{\max} = \max |\lambda_i| = 1,00258 > 1$.

Исследование реальной системы с периодическим изменением структуры и ее предельной непрерывной модели проведено на математических моделях, построенных в системе MatLab 6.5 SIMULINK 5 (рис. 3, а и б соответственно). Основа построения моделей — описание переключаемых структур (13), (14) и интегрального регулятора (3).

Изменение структуры реализуется фиксатором нулевого порядка Zero-Order Hold, широтно-импульсным модулятором ШИМ (рис. 3, в — Subsystem), блоком умножения Product1 и сумматором Σ_1 . В течение интервала времени $nT < t < nT + \tau_n$ ШИМ выдает единичный сигнал на вход блока умножения. Вследствие этого на его выходе действует сигнал i . На выходе Σ_1 в результате получается 0, и Ri на вход Σ_2 не поступает. Этим моделируется короткое замыкание резистора R в силовой части стабилизатора (см. рис. 2). В оставшейся части периода ($nT + \tau_n < t < nT + T$) нулевой сигнал с выхода ШИМ обнуляет выход блока произведения. В результате на вход Σ_2 поступает произведение Ri . Этим моделируется включение резистора R в схеме силовой части (см. рис. 2).

Блок Subsystem (см. рис. 3, в), реализующий широтно-импульсный модулятор, состоит из генератора периодического линейно возрастающего сигнала Repeating Sequence, сумматора и релейного элемента Relay. Генератор Repeating Sequence вырабатывает пилообразный сигнал „развертки“ с амплитудой, равной 1, и периодом T , равным периоду переключений структуры. Сумматор сравнивает выходной сигнал интегрального регулятора с сигналом „развертки“. Выходной сигнал релейного элемента, равный 1 при положительном входном сигнале и 0 — при отрицательном, представляет собой широтно-модулированные прямоугольные импульсы единичной амплитуды. Таким образом, $\tau = k_M e$, $k_M = T/U_{\text{п}}$ с/В, где $U_{\text{п}} = 1$ В — амплитуда пилообразного сигнала, $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с, $\gamma = (k_M / T)e$.

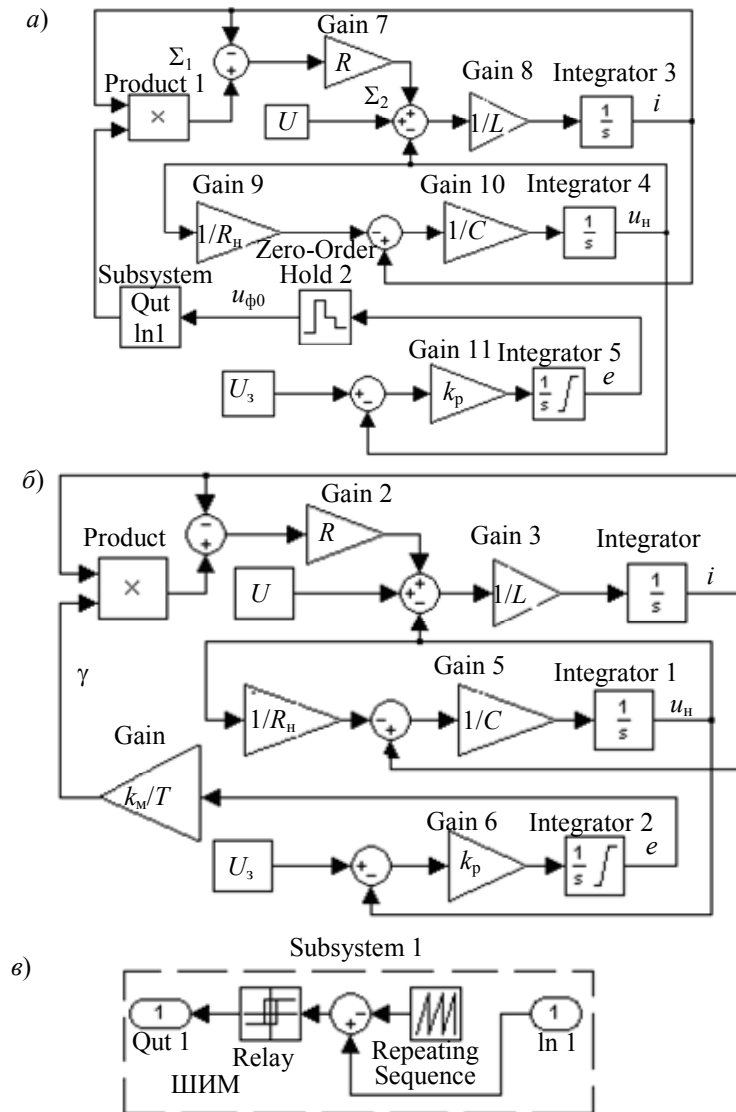


Рис. 3

При начальных условиях $U_0 = 100$ В, $i_0 = 1$ А, $\tau_0 = 0,5T$, $e_0 = 0,5$ В, соответствующих желательному стационарному режиму, в предельной непрерывной модели стационарный режим сохраняется в течение времени моделирования (4 с) при параметрах моделирования: ode23, Max step size 1e-6, Relative tolerance 1e-6.

В модели реальной системы при начальных условиях

$$[i_0, U_0, \tau_0] = [x_0^T, 0,5T] = [0,969108, 100,0034, 1 \cdot 10^{-4}],$$

соответствующих желательному стационарному режиму, стационарный режим вследствие его установленной неустойчивости не сохраняется. За время моделирования происходит

расходящийся переходный процесс (рис. 4, а), заканчивающийся установлением автоколебаний (рис. 4, б) с периодом $8,8 \cdot 10^{-3}$ с, ровно в 44 раза превышающим период коммутации $T=2 \cdot 10^{-4}$ с. Это определено по диаграмме выходного напряжения фиксатора нулевого порядка $u_{\phi 0}$ в установившемся режиме (на рис. 4 не показана). Наблюдаемые автоколебания можно считать субгармоническими.

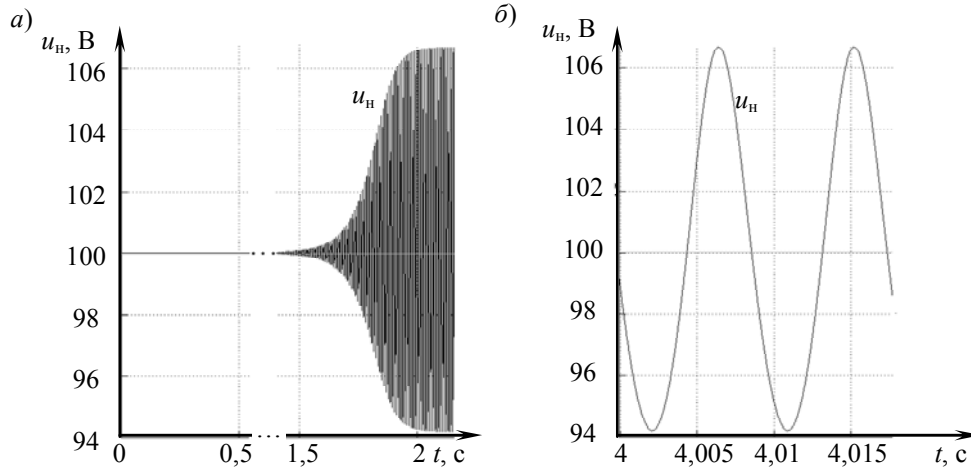


Рис. 4

При ненулевых отклонениях от желательного стационарного режима в предельной непрерывной модели наблюдаются автоколебания с периодом $8,4 \cdot 10^{-3}$ с, приблизительно равным периоду субгармонических автоколебаний в реальной системе.

При $k/T=30,3$ $(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ $|\lambda|_{\max}=0,99974 < 1$, а при $k/T=31$ $(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ $|\lambda|_{\max}=1,00062 > 1$. Следовательно, критическое значение $(k/T)_{\text{кр}}$, соответствующее $|\lambda|_{\max}=1$, заключено между этими двумя значениями. При $k/T=31$ $(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ устанавливаются почти периодические колебания (см. рис. 5, а, б), близкие к субгармоническим с периодом, равным $44T$.

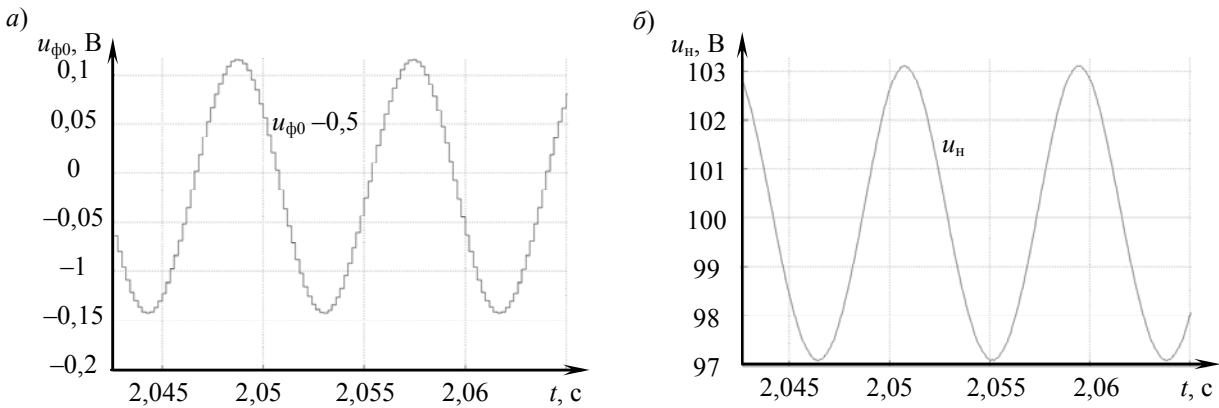


Рис. 5

При частоте переключений структуры $F_1 = F/10 = 500$ Гц, $T_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ с и $k/T=32,6$ $(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ $|\lambda|_{\max}=1,1599$. Моделирование показывает установление неперидических незатухающих колебаний с выходом напряжения интегрального регулятора в нижнюю зону насыщения ($e=0$). При $k/T=22,8$ $(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ $|\lambda|_{\max}=1,1004 > 1$, а при $k/T=22$ $(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ $|\lambda|_{\max}=0,98352 < 1$. Следовательно, $(k/T)_{\text{кр}}$ несколько меньше, чем 22,8.

При $k/T=22,8$ $(\text{В} \cdot \text{с})^{-1}$ согласно временной диаграмме выходного сигнала фиксатора нулевого порядка, представленной на рис. 6, период субгармонических колебаний равен $22 \cdot 10^{-3}$ ($11T_1$).

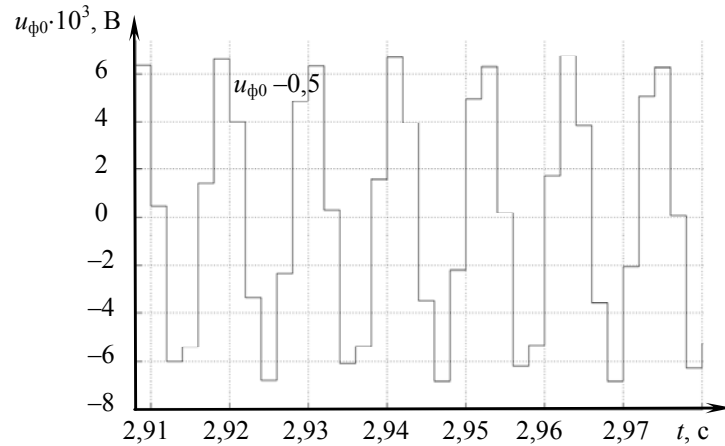


Рис. 6

При частоте переключений $F_2 = 250$ Гц ($T_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ с) при $k/T_2 = 29$ (В·с) $^{-1}$ $|\lambda|_{\max} = 0,9905$, а при $k/T_2 = 29,1$ (В·с) $^{-1}$ $|\lambda|_{\max} = 1,0056$. Следовательно, $(k/T)_{\text{кр}}$ удовлетворяет неравенству $29 < (k/T)_{\text{кр}} < 29,1$. При $k/T = 29,1$ (В·с) $^{-1}$ в стабилизаторе устанавливаются субгармонические автоколебания половинной частоты. Автоколебания на выходе фиксатора нулевого порядка $u_{\phi 0}$ и на выходе стабилизатора $u_{\text{н}}$ показаны на рис. 7, а, б.

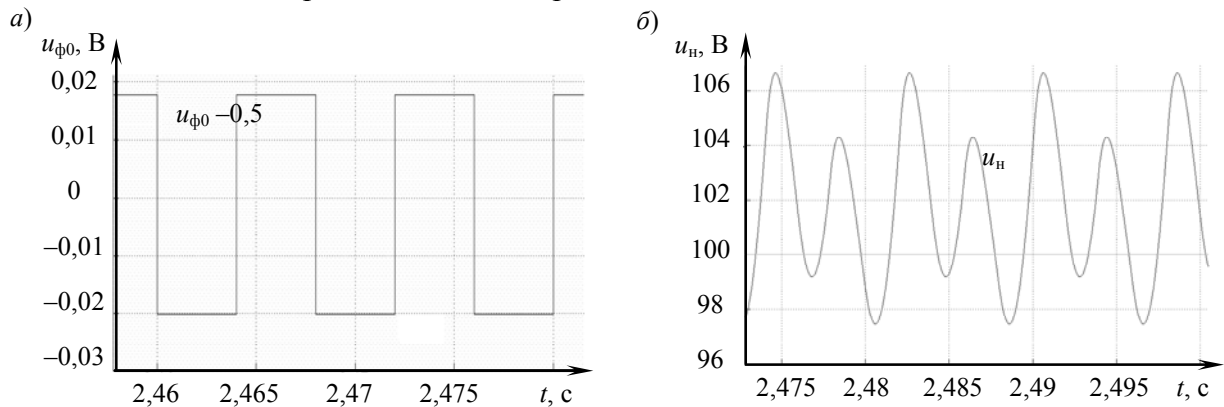


Рис. 7

Заключение. По результатам исследования можно сделать следующие выводы.

1. В системах с периодическим изменением структуры возможны нежелательные проявления дискретного характера управления, вызывающие снижение частоты и увеличение амплитуды пульсаций выходной величины. Обычно это является следствием нарушения условий устойчивости желаемого стационарного режима, соответствующего наибольшей частоте колебаний выходной величины, равной частоте переключений структуры.

2. Изменение структуры, как правило, происходит с достаточно высокой частотой, что следует из необходимости получения малых пульсаций выходной величины. Это позволяет рассчитывать систему по ее предельной непрерывной модели.

3. Критерием достаточности частоты изменений структуры может служить устойчивость желательного стационарного режима с наивысшей частотой пульсаций выходного напряжения, равной частоте переключений структуры, при всех возможных возмущениях.

4. Полученное необходимое и достаточное условие асимптотической устойчивости желательного стационарного режима требует расположения собственных значений определенной в статье матрицы линеаризованного разностного уравнения возмущенного движения внутри круга единичного радиуса.

5. Для оценивания области устойчивости желательного стационарного режима в пространстве возмущений можно применить второй метод Ляпунова. При использовании квадратичной пробной функции для выбора ее матрицы целесообразно использовать матрицу линеаризованного разностного уравнения возмущенного движения, поскольку это всегда гарантирует

выделение хотя бы части области устойчивости. Для расширения выделенной части области устойчивости можно использовать различные квадратичные функции Ляпунова.

6. Экспериментальная проверка полученных результатов на примере стабилизатора с параметрическим управлением показала актуальность поставленной задачи и корректность ее решения.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство невырожденности матрицы $[E-H_1(\tau_0)H_2(T-\tau_0)]$.

В первой части периода переключений ($nT < t < nT + \tau_n$) свободный процесс в силовой части системы описывается уравнением

$$\frac{dX}{dt} = A_1 X,$$

где X — вектор фазовых координат, элементы которого — токи в катушках индуктивности и напряжения на конденсаторах.

Выбрав в качестве положительно-определенной функции Ляпунова

$$V(X) = L_1 i^2 / 2 + \dots + C_1 u^2 / 2 + \dots = X^T Q X,$$

где $Q = \text{diag}\{L_1/2, \dots, C_1/2, \dots\}$ — диагональная матрица, получим, приняв за начальные условия для уравнения (1) $X_n^T = [i_1(nT), \dots, u_1(nT), \dots]$:

$$X_n' = X(nT + \tau_n) = H_1(\tau_n) X_n, \quad H_1(\tau_n) = \exp(A_1 \tau_n).$$

Очевидно, $V(X_n') < V(X_n)$, поскольку во время свободного процесса запас энергии силовой части рассеивается.

Аналогично во второй части интервала переключений ($nT + \tau_n < t < (n+1)T$):

$$\frac{dX}{dt} = A_2 X,$$

$$X_{n+1} = X(nT + T) = H_2(T - \tau_n) X_n', \quad H_2(T - \tau_n) = \exp(A_2(T - \tau_n)),$$

$$\begin{aligned} V(X_{n+1}) &= X_{n+1}^T Q X_{n+1} = X_n'^T H_2^T(T - \tau_n) Q H_2(T - \tau_n) X_n' = \\ &= X_n^T H_1^T(\tau_n) H_2^T(T - \tau_n) Q H_2(T - \tau_n) H_1(\tau_n) X_n < V(X_n') < V(X_n). \end{aligned}$$

Следовательно, решение линейного разностного уравнения

$$X_{n+1} = H X_n, \quad H = H_2(T - \tau_n) H_1(\tau_n)$$

затухает при любых начальных условиях. Это означает, что все собственные значения матрицы $H = H_2(T - \tau_n) H_1(\tau_n)$ лежат внутри центрального круга единичного радиуса. Поэтому $\det(zE - H)|_{z=1} \neq 0$, что и доказывает невырожденность матрицы $E - H_1(\tau_0) H_2(T - \tau_0)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кориунов А. И. Динамический расчет стабилизированного понижающего преобразователя напряжения постоянного тока // Силовая электроника. 2005. № 3. С. 52—55.
2. Севернс Р., Блум Г. Импульсные преобразователи постоянного напряжения для систем вторичного электропитания: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1988. 294 с.
3. Белов Г. А. Структурные модели и исследование динамики импульсных преобразователей // Электричество. 2008. № 4. С. 40—49.
4. Четти П. Проектирование ключевых источников электропитания: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1990. 240 с.
5. Кориунов А. И. Стабилизатор напряжения с параметрическим управлением // Силовая электроника. 2016. № 3. С. 36—40.
6. Розанов Ю. К. Силовая электроника: Учебник для вузов. М.: МЭИ, 2007. 612 с.

7. Коришун А. И. Предельная непрерывная модель системы с высокочастотным периодическим изменением структуры // Изв. вузов. Приборостроение. 2009. Т. 52, № 9. С. 42—48.
8. Коржавин О. А., Вороной А. А. Анализ устойчивости импульсных стабилизаторов напряжения с переменной структурой силовой части методом Андронова—Хопфа // Практическая силовая электроника. 2008. № 30. С. 29—35.
9. Бромберг П. В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. М.: Наука, 1967. 324 с.
10. Коришун А. И. Анализ устойчивости в целом линеаризуемых импульсных систем с помощью двух функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1990. № 5. С. 91—102.

Сведения об авторе**Анатолий Иванович Коришун**

— д-р техн. наук, профессор; Военно-морской политехнический институт ВУНЦ ВМФ „Военно-морская академия им. Н. Г. Кузнецова“, кафедра радиоэлектроники; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

Рекомендована кафедрой радиоэлектроники

Поступила в редакцию 11.12.16 г.

Ссылка для цитирования: Коришун А. И. Устойчивость желаемого стационарного режима замкнутых систем с периодическим изменением структуры // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60, № 7. С. 612—623.**STABILITY OF DESIRED STATIONARY REGIME OF CLOSED-LOOP SYSTEMS WITH PERIODICALLY CHANGING STRUCTURE****A. I. Korshunov***N. G. Kuznetsov Naval Academy, Naval Polytechnic Institute,
198514, St. Petersburg, Russia
E-mail: a.i.korshunov@mail.ru*

Closed-loop automatic system with structure subject to high-frequency changes is considered. Systems of this class are widely applied in power electronics. Calculation of the system parameters is proposed to be performed by a limiting continuous model which does not account for current and voltage pulsations in actual system. The discrete nature of the control may cause in the real system negative effects such as oscillations distorting the desired stationary mode with pulsation frequency of the output signal equal to the switching frequency of the system structure. The reason of the effects is usually a violation of the conditions of stability of the desired mode. Taking into account different variants of mathematical description of power part of the system within the periods of switching, a difference equation governing the system component is derived as well as a difference equation of the integral controller. For a given ratio of the parts of the switching period, the stationary vector of the phase coordinates of the system and the matrix of the linearized differential equations of perturbed motion are defined. Location of the matrix eigenvalues inside the circle of the unit radius guarantees asymptotic stability of the stationary regime. Using this matrix in the case of the stability of the desired stationary mode it is possible to construct quadratic Lyapunov functions to guarantee separation of at least part of stability domain. An example of practical application of the results to a voltage regulator with parametric control is presented. The study of stability of desired stationary regime of the regulator carried out with the use of mathematical modeling in MatLab, confirmed the urgency of the problem under consideration and correctness of the proposed solution.

Keywords: linear system, periodic change of structure, desired stationary mode, stability, perturbed movement, matrix of the linearized equation of perturbed movement

Data on authors**Anatoly I. Korshunov**

— Dr. Sci., Professor; N. G. Kuznetsov Naval Academy, Naval Polytechnic Institute, Department of Radio-Electronics; E-mail: a.i.korshunov@mail.ru

For citation: Korshunov A. I. Stability of desired stationary regime of closed-loop systems with periodically changing structure. *Journal of Instrument Engineering*. 2017. Vol. 60, N 7. P. 612—623 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2017-60-7-612-623