УДК 517.928
DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-8-710-716

ГИБРИДНЫЙ МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

С. Е. Иванов, А. В. Бухановский

Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: boukhanovsky@mail.ifmo.ru

Предложен гибридный метод преобразований для задач анализа нелинейных динамических систем полиномиальной структуры. Базирующийся на многочленных преобразованиях метод позволяет аналитически исследовать свойства стационарных решений (для систем в нормальных и экстремальных режимах эксплуатации); для нестационарных (например, переходных) решений он применяется совместно с численным методом Рунге-Кутта. Метод обладает существенно меньшей вычислительной сложностью, чем численные методы эквивалентной степени точности. Предложенный метод не требует определения условий и области сходимости приближенного решения. Он позволяет проводить расчет характеристик различных технических объектов в условиях внешних периодических воздействий, например, методом преобразований проведено исследование динамической модели автокранов, выполнен расчет для виброзащитных систем моторов катеров.

Ключевые слова: *нелинейное дифференциальное уравнение, аналитический метод, многочленное преобразование, стационарный режим*

Для проектирования и эксплуатации технических систем, описываемых нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, необходимо определять их характеристики в различных условиях, включая экстремальные. В отличие от нормальных (штатных) режимов, экстремальные, как правило, характеризуются резкими изменениями фазовых переменных, возникающими, например, при совпадении или кратности собственных частот системы и частоты внешнего возмущения. В целом это может привести к задаче отыскания жестко осциллирующих решений, при численной реализации которой необходимо уменьшать шаг расчетной сетки в районе точек устранимого разрыва первого рода. Аналитические и численно-аналитические методы исследования нелинейных динамических систем обеспечивают адекватное описание их состояния за счет априорного учета функциональных свойств траектории в окрестности, характеризуемой экстремальным поведением. Такой математический аппарат наиболее развит для систем с полиномиальной нелинейностью; системы с другими видами нелинейности могут быть сведены к ним с заданной точностью за счет полиномиальной аппроксимации. Однако только за счет эквивалентных преобразований большинство нелинейных моделей динамических систем нельзя свести к дифференциальным уравнениям с известным точным решением [1]. Упрощение модели путем линеаризации может применяться для описания нормальных режимов; использование линеаризации в экстремальных режимах приводит к излишне гладким решениям. Альтернативой являются основанные на представлении искомого решения в виде ряда приближенные аналитические методы [1]: классические методы малого параметра, Ван-дер-Поля, Крылова—Боголюбова, усреднения, методы возмущений, асимптотические приближения Найфэ. Возможности их применения ограничены областью сходимости, зависящей от коэффициентов уравнения, а также определенными требованиями к структуре полинома. Преодолению этого недостатка экстенсивным путем посвящен ряд публикаций. Так, в [2, 3] аналитическое решение автономных систем дифференциальных уравнений полиномиальной структуры строится на основе последовательных приближений Пикара и процедур повторения локальных решений. В [4] для дифференциальных уравнений с полиномиальной нелинейностью предложен асимптотический метод разложения по степеням независимой переменной, коэффициенты которого являются рядами Лорана по убывающим степеням логарифма. В [5] рассмотрен численно-аналитический метод на основе приближенного представления решения и его производной в виде частичных сумм смещенных рядов Чебышева. В работах [6, 7] сделана попытка расширить условия сходимости за счет представления решения в форме ряда в окрестностях *подвижных* особых точек.

В настоящей статье рассматривается альтернативный подход к исследованию характеристик динамических систем с полиномиальной нелинейностью, основанный на эквивалентных преобразованиях, что позволяет избежать ограничений, связанных со сходимостью приближенных решений в форме рядов. Он базируется на методе многочленных преобразований [8] и позволяет аналитически исследовать свойства стационарных решений динамической системы. Для нестационарных (например, переходных) решений он применяется совместно с численным методом Рунге-Кутта.

Рассмотрим задачу Коши для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Пусть функции $f_i(\cos(\omega t), \sin(\omega t), q_1, q_2, ..., q_m)$, $i = 1, 2, ..., m$ определены в форме полиномов степени n для $t \in [t_0, t_k]$, $(q_1, q_2, ..., q_m) \in R^m$, $\omega \in R$. Требуется определить функции $q_1(t), q_2(t), ..., q_m(t)$, которые являются решением системы нелинейных дифференциальных уравнений на отрезке $[t_0, t_k]$:

$$\begin{cases} q_1'(t) = f_1(\cos(\omega t), \sin(\omega t), q_1, q_2, ..., q_m), \\ q_2'(t) = f_2(\cos(\omega t), \sin(\omega t), q_1, q_2, ..., q_m), \\ q_m'(t) = f_m(\cos(\omega t), \sin(\omega t), q_1, q_2, ..., q_m) \end{cases}$$

и удовлетворяют начальным условиям $q_1(t) = q_{01}, q_2(t) = q_{02}, ..., q_m(t) = q_{0m}$. При этом требуется, чтобы функции правой части можно было представить в форме полиномов от переменных:

$$f_m(\cos(\omega t), \sin(\omega t), q_1, q_2, ..., q_m) = \sum_{\nu_1 + ... + \nu_{m+2} = 1}^{n} d_{\nu_1, ..., \nu_{m+2}} cos^{\nu_1}(\omega t) sin^{\nu_2}(\omega t) q_1^{\nu_3} ... q_m^{\nu_{m+2}}.$$

В общем виде метод включает следующие этапы.

1. Представить исходную систему в матричной форме:

$$\dot{\mathrm{Q}} + \mathrm{CQ} = \mathrm{H}_1 \cos(\omega t) + \mathrm{H}_2 \sin(\omega t) + \sum_{|\nu|=2}^{n} \mathrm{H}_\nu \cos^{\nu_1}(\omega t) \sin^{\nu_2}(\omega t) q_1^{\nu_3} ... q_m^{\nu_{m+2}} \tag{1}$$

с применением векторного индекса $\nu = [\nu_1 \nu_2 ... \nu_m]$ с целочисленными неотрицательными компонентами. $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + ... + \nu_m$ — сумма компонент векторного индекса, $\mathrm{Q} = [q_1, q_2, ..., q_m]^T$ — вектор-столбец искомых функций, $\dot{\mathrm{Q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_m]^T$ — вектор-столбец производных, C — постоянная невырожденная квадратная ($m \times m$)-матрица. Постоянные векторы-столбцы представлены в виде:

$$\mathrm{H}_1 = [h_{11}, h_{21}, \ldots, h_{m1}]^T,\ \mathrm{H}_2 = [h_{12}, h_{22}, \ldots, h_{m2}]^T;\ \mathrm{H}_\nu = \left[h^1{}_\nu, h^2{}_\nu, ..., h^m{}_\nu\right]^T$$

— вектор-столбец малых $\left|h^k{}_\nu\right| < 1$ коэффициентов при нелинейных членах.

2. Привести систему (1) к нормальной форме путем ее дополнения новыми переменными $x_1 = \exp(i\omega t)$ и $x_2 = \overline{x}_1 = \exp(-i\omega t)$:

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{X} + \mathrm{R}(\mathrm{X}), \tag{2}$$

где $\mathrm{X} = [x_1, x_2, q_1, ..., q_m]^T$ — вектор-столбец искомых функций с дополненными переменными. Квадратная матрица N получена дополнением матрицы C:

$$\mathrm{N} = \begin{bmatrix} i\omega & 0 & 0 \\ 0 & -i\omega & 0 \\ (\mathrm{H}_1 - i\mathrm{H}_2)/2 & (\mathrm{H}_1 + i\mathrm{H}_2)/2 & \mathrm{C} \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{R} = \left[0, 0, \sum_{|\nu|=2}^{n} h_\nu^1 x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} q_1^{\nu_3} ... q_m^{\nu_{m+2}}, \sum_{|\nu|=2}^{n} h_\nu^2 x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} q_1^{\nu_3} ... q_m^{\nu_{m+2}}, ..., \sum_{|\nu|=2}^{n} h_\nu^m x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} q_1^{\nu_3} ... q_m^{\nu_{m+2}} \right]^T.$$

3. Для системы (2) решить характеристическое уравнение $\mathrm{Det}[\Lambda - N] = 0$ и определить невырожденную диагональную матрицу $\Lambda = \mathrm{diag}[\lambda_1, ..., \lambda_m]$. Проверить наличие резонансов, сравнивая корни характеристического уравнения и внешнюю частоту ω. Выполнить линейное преобразование:

$$\mathrm{Y} = \mathrm{L} \cdot \mathrm{X}, \ \mathrm{L} \cdot \mathrm{N} = \Lambda \cdot \mathrm{L}. \tag{3}$$

Результатом подстановки преобразования (3) в (2) является система вида:

$$\dot{\mathrm{Y}} = \Lambda \cdot \mathrm{Y} + \mathrm{R}(\mathrm{Y}). \tag{4}$$

После линейной замены переменных: $\mathrm{R}(\mathrm{Y}) = \mathrm{R}(\mathrm{L} \cdot \mathrm{X})$.

4. Найти особые значения индекса $\nu = [\nu_1 \nu_2 ... \nu_{2m+2}]$, соответствующие значениям при нелинейных компонентах автономной системы. Для этого решить систему уравнений: $\lambda_1 \nu_1 + \ldots + \lambda_{m+2} \nu_{m+2} - \lambda_s = 0, \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{m+2} = 2, 3, ..., n,\ s = 1, 2, ..., m+2$.

5. Выполнить многочленное преобразование для системы (4) вида:

$$y_s = z_s + \sum_{|\nu|=2}^{n} \left(a_\nu^s z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} ... z_{m+2}^{\nu_{m+2}} \right), \ s = 1, 2, ..., m+2. \tag{5}$$

Результатом является система:

$$\dot{z}_S = \lambda_s z_s + \sum_{|\nu|=2}^{n} \left(p_\nu^s z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} ... z_{m+2}^{\nu_{m+2}} \right), \ s = 1, 2, ..., m+2, \tag{6}$$

где p_ν^s — коэффициенты преобразованной системы, a_ν^s — коэффициенты преобразования. Коэффициенты p_ν^s приравниваются нулю при не особых значениях векторного индекса, а a_ν^s — при особых; p_ν^s вычисляются при особых значениях векторного индекса, а a_ν^s — при не особых.

6. Определить коэффициенты a_ν^s и p_ν^s преобразованной системы (6) в соответствии с [9]:

$$\sum_{|\nu|=2}^{n} q_\nu^S z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} ... z_{m+2}^{\nu_{m+2}} + \sum_{|\nu|=2}^{n} \left(a_\nu^S z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} ... z_{m+2}^{\nu_{m+2}} \left(\sum_{k=1}^{m+2} \lambda_k \nu_k - \lambda_S \right) \right) + \sum_{k=3}^{m+2} \times$$

$$\times \sum_{|\nu|=2}^{n} \left(a_\nu^S z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} ... z_{m+2}^{\nu_{m+2}} \nu_k z_k^{-1} \sum_{|\mu|=2}^{n} q_\mu^k z_1^{\mu_1} z_2^{\mu_2} ... z_{m+2}^{\mu_{m+2}} \right) = R_S,$$

7. Для приведения к автономной форме в (6) выполнить переход к новым комплексным переменным:

$$z_S = u_S \exp\left(\mathrm{itIm}\lambda_S\right), s = 1, 2, ..., m+2 . \tag{7}$$

Преобразованная система в новых переменных имеет автономную форму:

$$\dot{u}_S = u_S \mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|\nu|=2}^{4} q_\nu^S u_1^{\nu_1} u_2^{\nu_2} ... u_{m+2}^{\nu_{m+2}}, \ s = 1, 2, ..., m+2 . \tag{8}$$

8. Перейти к автономной системе с вещественными переменными. Выполнить замену переменных в (8):

$$u_S = \rho_S \exp\left(i\theta_S\right). \tag{9}$$

Общий вид полученной автономной системы:

$$\dot{\rho}_S = \rho_S \mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|\nu|=2}^{n} \rho_1^{\nu_1+\nu_2} ... \rho_{m+1}^{\nu_{m+1}+\nu_{m+2}} \mathrm{Re}\left(q_\nu^S \exp\left(i \left(\sum_{l=1}^{m+2} \theta_{2l-1}\left(\nu_{2l-1} - \nu_{2l}\right) - \theta_S \right)\right)\right), \ s = 1, 2, ..., m+2,$$

$$\rho_S \dot{\theta}_S = \sum_{|\nu|=2}^{n} \rho_1^{\nu_1+\nu_2} ... \rho_{m+1}^{\nu_{m+1}+\nu_{m+2}} \mathrm{Im}\left(q_\nu^S \exp\left(i \left(\sum_{l=1}^{m+2} \theta_{2l-1}\left(\nu_{2l-1} - \nu_{2l}\right) - \theta_S \right)\right)\right). \tag{10}$$

В нерезонансном случае, когда собственные частоты колебаний системы и внешняя частота не кратны, автономная система принимает более простой вид:

$$\dot{\rho}_S = \rho_S \mathrm{Re}\lambda_S + \sum_{|\nu|=2}^{n} \rho_1^{\nu_1+\nu_2} ... \rho_{m+1}^{\nu_{m+1}+\nu_{m+2}} \mathrm{Re}\left(q_\nu^S\right), \ \rho_S \dot{\theta}_S = \sum_{|\nu|=2}^{n} \rho_1^{\nu_1+\nu_2} ... \rho_{m+1}^{\nu_{m+1}+\nu_{m+2}} \mathrm{Im}\left(q_\nu^S\right),$$

$$s = 1, 2, ..., m+2 . \tag{11}$$

9. Для определения характеристик стационарного решения приравнять правые части автономной системы (10) нулю и решить методом Ньютона систему нелинейных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{|\nu|=2}^{n} \rho_1^{\nu_1+\nu_2} ... \rho_{m+1}^{\nu_{m+1}+\nu_{m+2}} \mathrm{Re}\left(q_\nu^S \exp\left(i \left(\sum_{l=1}^{m} \theta_{2l-1}\left(\nu_{2l-1} - \nu_{2l}\right) - \theta_S \right)\right)\right) = -\rho_S \mathrm{Re}\lambda_S,$$

$$s = 1, 2, ..., m+2, \tag{12}$$

$$\sum_{|\nu|=2}^{n} \rho_1^{\nu_1+\nu_2} ... \rho_{m+1}^{\nu_{m+1}+\nu_{m+2}} \mathrm{Im}\left(q_\nu^S \exp\left(i \left(\sum_{l=1}^{m} \theta_{2l-1}\left(\nu_{2l-1} - \nu_{2l}\right) - \theta_S \right)\right)\right) = 0.$$

В нерезонансном случае система (12) имеет более простой вид:

$$\sum_{|\nu|=2}^{n} \rho_1^{\nu_1+\nu_2} ... \rho_{m+1}^{\nu_{m+1}+\nu_{m+2}} \mathrm{Re}\left(q_\nu^S\right) = -\rho_S \mathrm{Re}\lambda_S, \ \sum_{|\nu|=2}^{n} \rho_1^{\nu_1+\nu_2} ... \rho_{m+1}^{\nu_{m+1}+\nu_{m+2}} \mathrm{Im}\left(q_\nu^S\right) = 0, \ s = 1, 2, ..., m+2 .$$

10. Для определения характеристик нестационарного решения автономная система (10) с начальными условиями, преобразованными посредством операций (3), (5), (7), (9), численно интегрируется методом Рунге-Кутта. Для экономичного вычисления правых частей полиномиальной структуры используем обобщение схемы В.Я. Пана [10] с предварительной обработкой коэффициентов для полинома от многих переменных вида

$$g\left(x_1, \ldots, x_m\right) = \sum_{i_1, \ldots, i_m = 0}^{n} a_{i_1, \ldots, i_m} \prod_{j=1}^{m} x_j^{i_j}, \sum_{j=1}^{m} i_j \le n,$$

$$l_0 = \sum_{j_1=1}^{m} x_{j_1} \sum_{j_2=j_1}^{m} x_{j_2}, l_1 = \sum_{j=1}^{m} x_j + b_1, \ l_{4s+1} = l_{4s-3}\left(\left(\sum_{j=1}^{m} x_j + l_0 + b_{4s-2}\right)\left(l_0 + b_{4s-1}\right) + b_{4s}\right) + b_{4s+1},$$

$$l_{4k+3} = l_{4k+1}\left(l_0 + b_{4k+2}\right) + b_{4k+3},\ \ s = 1,\ldots,k,$$

$$g_n = a_0 l_n \text{ , при } n = 4k+1, 4k+3\text{ ; } g_n = \sum_{j=1}^{m} a_{0j} x_j l_{n-1} + a_n \text{ , при } n = 4k+2, 4k+4.$$

11. Выполнить преобразование к исходным переменным

$$z_S = \rho_S \exp\left(\mathrm{itIm}\lambda_S + i\theta_S\right),\ y_s = z_s + \sum_{|\nu|=2}^{n}\left(a_\nu^s z_1^{\nu_1} z_2^{\nu_2} \ldots z_{m+2}^{\nu_{m+2}}\right),\ s = 1,2,\ldots,m+2\ .$$

Для представления результата в исходных переменных использовать замену, обратную (3): $\mathrm{X}=\mathrm{L}^{-1}\cdot\mathrm{Y}$.

В зависимости от задачи исследования этапы 9 и 10 могут быть взаимоисключающими.

С целью оценки вычислительной эффективности предложенного метода определим сложность алгоритма для получения стационарного решения. В соответствии с теоремой Штрассена [11] для вычисления функции $f_m(\cos(\omega t), \sin(\omega t), q_1, q_2, \ldots, q_m)$ в форме полинома степени n необходимо $(m+2)\log_2(n)$ операций. Для выполнения метода преобразований при расчете стационарного режима системы (1) необходимо $(m+2)^2(2+\log_2(n))$ операций. Для сравнения: при расчете системы (1) численным методом Рунге-Кутта четвертого порядка на промежутке с k узловыми точками необходимо $4m(m+2)\log_2(n)k$ операций. Как следствие, применение гибридного метода позволяет сократить сложность алгоритма в $\dfrac{4m\log[n]k}{(2+m)\log[4n]+2k}$ раз по сравнению с численным методом. Например, для десяти узловых точек системы четырех уравнений с правыми частями в виде полинома шестой степени время реализации предложенного метода в семь раз меньше, чем в случае численного метода, при сохранении точности четвертого порядка.

Таким образом, в статье предложен гибридный метод преобразований для задач анализа нелинейных систем, не требующий определения условий и области сходимости приближенного решения. Он позволяет рассчитывать характеристики различных технических объектов в условиях внешних периодических воздействий, например, методом преобразований проведено исследование динамической модели автокранов [12], выполнен расчет для виброзащитных систем моторов катеров [13]. Метод пригоден для исследования как нормальных, так и экстремальных режимов эксплуатации (для стационарных решений) и обладает существенно меньшей вычислительной сложностью, чем численные методы эквивалентной степени точности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алдошин Г. Т.* Теория линейных и нелинейных колебаний. СПб: Лань, 2013. 320 с.

2. *Афанасьев А. П., Дзюба С. М., Кириченко М. А., Рубанов Н. А.* Приближенное аналитическое решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2013. Т. 53, № 2. С. 321—328.

3. *Афанасьев А. П., Дзюба С. М.* Метод построения приближенных аналитических решений дифференциальных уравнений с полиномиальной правой частью // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 10. С. 1694—1702.

4. *Брюно А. Д.* О сложных разложениях решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. № 3. С. 346—364.

5. *Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф.* Приближенное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом рядов Чебышева // Вычислительные методы и программирование. 2016. Т. 17, № 2. С. 121—131.

6. *Орлов В. Н., Хмара П. В.* Об одном варианте приближенного решения нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в окрестности подвижной особой точки // Бюллетень науки и практики. 2016. № 10. С. 22.

7. *Орлов В. Н., Ковальчук О. А., Линник Е. П., Линник И. И.* Исследование одного класса нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка в области аналитичности // Вестн. Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана. Серия „Естественные науки“. 2018. № 4(79). С. 24—35. DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35

8. *Мельников Г. И.* Динамика нелинейных механических и электромеханических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 198 с.

9. *Иванов С. Е.* Алгоритмическая реализация метода исследования нелинейных динамических систем // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2012. № 4(80). С. 90—92.

10. *Пан В. Я.* О способах вычисления значений многочленов // Успехи математических наук. 1966. Т. 21, вып. 1(127). С. 103—134.

11. *Strassen V.* Die Berechnungskomplexität von elementarsymmetrischen Funktionen und von Interpolationskoeffizienten // Numerische Mathematik. 1973. Bd 20, N 3. S. 238—251.

12. *Ivanov S. E.* Mathematical modeling of nonlinear dynamic system of the truck crane // Contemporary Engineering Sciences. 2016. Vol. 9, N 10. P. 487—495.

13. *Ivanov S. E., Melnikov V. G.* Mathematical modeling vibration protection system for the motor of the boat // Applied Mathematical Sciences. 2015. Vol. 9, N 119. P. 5951—5960.

Сведения об авторах

Сергей Евгеньевич Иванов — канд. физ.-мат. наук, доцент; Университет ИТМО; факультет инфокоммуникационных технологий; E-mail: sivanov@mail.ifmo.ru

Александр Валерьевич Бухановский — д-р техн. наук; Университет ИТМО; мегафакультет трансляционных информационных технологий; директор мегафакультета; E-mail: boukhanovsky@mail.ifmo.ru

Поступила в редакцию
03.06.19 г.

Ссылка для цитирования: *Иванов С. Е., Бухановский А. В.* Гибридный метод преобразований для исследования нелинейных моделей динамических систем полиномиальной структуры // Изв. вузов. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 8. С. 710—716.

HYBRID TRANSFORMATION METHOD FOR STUDYING NONLINEAR MODELS OF DYNAMICAL SYSTEMS OF POLYNOMIAL STRUCTURE

S. E. Ivanov, A. V. Boukhanovsky

ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia
E-mail: boukhanovsky@mail.ifmo.ru

A hybrid transformation method is proposed for the problems of analyzing nonlinear dynamical systems of polynomial structure. The method is based on polynomial transformations and allows for analyzing analytically the properties of stationary solutions for systems in normal and extreme operating conditions; for non-stationary (e.g., transition) solutions, it may be used in conjunction with the Runge-Kutta numerical method. The method has significantly less computational complexity than numerical methods of an equivalent degree of accuracy and does not require determination of conditions and domain of convergence of the approximate solution. It makes it possible to calculate characteristics of various technical objects under external periodic influences. As an example, the method of transformations is used to study a dynamic model of truck crane and to carry out the calculations for vibration-proof systems of boat motors.

Keywords: nonlinear differential equation, analytical method, polynomial transformation, stationary mode

REFERENCES

1. Aldoshin G.T. *Teoriya lineynykh i nelineynykh kolebaniy* (Theory of Linear and Nonlinear Oscillations), St. Petersburg, 2013, 320 p. (in Russ.)
2. Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M., Kirichenko M.A., Rubanov N.A. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 2013, no. 2(53), pp. 321–328. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466913020038 (in Russ.)
3. Afanas'ev A.P., Dzyuba S.M. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, no. 10(55), pp. 1665–1673. DOI: https://doi.org/10.7868/S0044466915100026.
4. Bruno A.D. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, no. 3(58), pp. 328–347.
5. Arushanyan O.B. and Zaletkin S.F. *Vychislitel'nye Metody i Programmirovanie* (Numerical Methods and Programming), 2016, no. 2(17), pp. 121–131. DOI 10.26089/NumMet.v17r212. (in Russ.)
6. Orlov V., Khmara P. Bulletin of Science and Practice, 2016, no. 10, pp. 22.
7. Orlov V.N., Kovalchuk O.A., Linnik E.P., Linnik I.I. Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Baumana, Estestv. Nauki (Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci.), 2018, no. 4, pp. 24–35 (in Russ.). DOI: 10.18698/1812-3368-2018-4-24-35
8. Mel'nikov G.I. *Dinamika nelineynykh mekhanicheskikh i elektromekhanicheskikh sistem* (Dynamics of Nonlinear Mechanical and Electromechanical Systems), Leningrad, 1975, 198 p. (in Russ.)
9. Ivanov S.E. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, 2012, no. 4(80), pp. 90–92. (in Russ.)
10. Pan V.Ya. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1966, no. 1(21), pp. 103–134. (in Russ.)
11. Strassen V. *Numerische Mathematik*, 1973, no. 3(20), pp. 238–251.
12. Ivanov S.E. *Contemporary Engineering Sciences,* 2016, no. 10(9), pp. 487–495.
13. Ivanov S.E., Melnikov V.G. *Applied Mathematical Sciences*, 2015, no. 119(9), pp. 5951–5960.

Data on authors

Sergey E. Ivanov — PhD, Associate Professor;, Faculty of Infocommunication Technologies; E-mail: sivanov@mail.ifmo.ru

Alexander V. Boukhanovsky — Dr. Sci.; ITMO University, Mega-Faculty of Translational Information Technologies; Head of the Mega-Faculty; E-mail: boukhanovsky@mail.ifmo.ru

For citation: Ivanov S. E., Boukhanovsky A. V. Hybrid transformation method for studying nonlinear models of dynamical systems of polynomial structure. *Journal of Instrument Engineering*. 2019. Vol. 62, N 8. P. 710—716 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2019-62-8-710-716