

СОБСТВЕННАЯ ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ КОНСТРУКЦИЙ ИЗ СТАНОЧНОГО ПРОФИЛЯ, СОЕДИНЕННОГО НА СКРЫТЫЙ УГОЛОК

Е. Е. КОПЕЦ, А. И. КАРИМОВ, Д. Н. БУТУСОВ, В. Г. РЫБИН

*Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
„ЛЭТИ“ им. В. И. Ульянова (Ленина), 197022, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: eekopets@etu.ru*

При проектировании 3D-принтеров и станков с ЧПУ широко используются конструкции из алюминиевого станочного профиля. Разработчик должен учитывать не только статические деформации подобных конструкций, но и вибрационные характеристики, поскольку они непосредственно влияют на качество работы устройства. Предложена математическая модель сочленения двух станочных профилей в виде линейного упругого шарнира, и экспериментально определены ее параметры. Выполнено сравнение результатов, полученных с помощью предлагаемой модели, и результатов моделирования методом конечных элементов в пакете Fusion 360 с экспериментально измеренными данными. Сделан вывод о наилучшем соответствии предложенной математической модели экспериментальным данным.

Ключевые слова: частотный анализ, 3D-печать, уравнения Лагранжа, станочный профиль, автоматизация проектирования, жесткость конструкций

Введение. Станочный профиль — специализированный алюминиевый профиль особой формы, предназначенный для изготовления различных механических конструкций и широко используемый в машиностроении при создании рам 3D-принтеров [1—4], станков с ЧПУ [5—7] и робототехнических установок различного назначения [7]. Вибрации влияют на работу этих устройств и их узлов, в частности, ряд исследований выявил негативное влияние вибраций на качество 3D-печати [8]. Снизить величину вибраций можно, повышая жесткость конструкции, причем эксперименты показывают, что жесткость также зависит от множества факторов, включая нагрузки на станок [9].

Жесткость конструкции является не единственным параметром, влияющим на характер вибраций. При прочих равных условиях целесообразно повышать собственные частоты колебаний конструкции 3D-принтера или станка с ЧПУ, поскольку амплитуда колебаний рамы, а следовательно и погрешность позиционирования инструмента, обратно пропорциональна частоте колебаний при сообщении конструкции той же самой энергии. В частности, если линейная конструкция массой m , вовлеченной в движение, совершает гармонические колебания по закону

$$x = A \sin(\omega t), \dot{x} = A \omega \cos(\omega t),$$

то ее кинетическая энергия в нулевых положениях будет равна

$$E_k = m \dot{x}^2(0) / 2 = mA^2 \omega^2 / 2,$$

откуда нетрудно найти, что при равной энергии в двух системах с частотами ω_1 и ω_2 соотношение амплитуд равно

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Следовательно, повышая собственную частоту колебаний системы, можно добиваться уменьшения амплитуды колебаний, а вслед за этим — погрешности позиционирования рабочего органа (экструдера, шпинделя и пр.). Поэтому для инженерной практики проектирования требуется простая и надежная методика расчета собственных частот подобных конструкций.

Наиболее часто вибрационные характеристики исследуются с помощью математического аппарата в рамках теорий Рэлея, Эйлера—Бернулли или Тимошенко [10]. Более универсальным для расчета вибраций конструкции является метод конечных элементов [11], часто применяемый при анализе 3D-принтеров [12]. Однако в конструкциях с болтовыми соединениями возникают нелинейные эффекты колебаний различного рода. Примером является ситуация, когда детали сопряжены таким образом, что в одну сторону деформация вызывает в конструкции меньшие, чем в другую, напряжения. В модальном анализе, используемом в специализированных программах, таких как ANSYS и Fusion 360, можно использовать только линейные типы контактов (которые не допускают разделение, разрыв двух связанных деталей), а для нелинейных систем определение собственных частот колебаний осложняется.

Несколько решений позволяют провести модальный анализ для систем с болтовыми соединениями, в частности, анализ с предварительным расчетом напряжений [13—15]. Такой подход позволяет перед модальным анализом использовать заданную статическую нагрузку для придания жесткости геометрии. Расчет в основном используется для простых моделей [16], и на выходе получается линейное решение для заданного нелинейного состояния. При сложных сборках очень сложно подобрать параметры модели, и зачастую программный решатель не может выполнить моделирование. Для больших сборок используется моделирование виртуального промежуточного материала, коэффициент упругости которого подбирается согласно жесткости сопряжения элементов [17, 18]. Для определения коэффициента упругости виртуального материала требуется ряд экспериментов. Тем не менее, в ряде случаев относительно точные результаты можно получить и с помощью более простых расчетных формул [19].

Хотя возможности применения линейных моделей ограничены, нелинейный анализ даже простых нелинейных систем относительно сложен [20], поэтому в настоящей работе проведем линейный анализ и покажем, что этот подход также может давать приемлемую точность результатов моделирования.

Объектом настоящего исследования являются методы расчета собственных частот конструкций из станочного профиля, предмет исследования — свойства конструкций из станочного профиля при соединении на скрытый уголок, часто используемый для профиля сечением 20×20 мм. Ввиду сложной формы станочного профиля и сложности моделирования процессов, происходящих при его деформации, жесткость профиля определена экспериментально и этот подход, с использованием простой модели, применен к расчету П-образной портальной конструкции. Полученные результаты хорошо согласуются с измерениями. При этом расчет с помощью метода конечных элементов (МКЭ) показывает значительно меньшую точность.

Модель вибрации балки. В настоящей работе предлагается модель сочленения на основе линейного упругого шарнира. Предположим, что сам профиль бесконечно жесткий. Это допущение корректно, если длина профиля не слишком велика, жесткость сочленения слабо зависит или вовсе не зависит от направления деформации, а сами деформации малы. Исходя из второго закона Ньютона при данных допущениях движение вертикально расположенного профиля можно выразить обыкновенным дифференциальным уравнением, связывающим отклонение профиля от вертикали θ (рис. 1, *a*) и его угловое ускорение:

$$J\ddot{\theta} + k\theta = 0, \quad (1)$$

где $J = M_c L_c^2$ — момент инерции стержня, M_c — масса стержня с закрепленными на нем элементами, L_c — расстояние от шарнирного сочленения до центра масс стержня, k — крутильная жесткость шарнира. Уравнение (1) имеет аналитическое решение

$$\theta(t) = \theta(0)e^{j\omega t}. \quad (2)$$

Подставив решение (2) в (1), получим:

$$-J\omega^2 + k = 0,$$

откуда нетрудно выразить собственную частоту колебаний стержня:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M_c L_c^2}} = \frac{1}{L_c} \sqrt{\frac{k}{M_c}}. \quad (3)$$

Эта частота соответствует наиболее низкочастотной составляющей колебаний системы в поперечной плоскости. Уравнение (3) можно использовать для экспериментального определения жесткости сочленения, найдя опытным путем собственную частоту колебаний и выразив жесткость через соотношение:

$$k = \omega^2 L_c^2 M_c. \quad (4)$$

Определим собственные частоты колебаний портальной конструкции, приведенной на рис. 1, б, в поперечной плоскости. Будем считать различными значения жесткости Т-образных сочленений в основании конструкции и L-образных сочленений в ее верхней части. Это допущение справедливо, если в нижней части конструкции используется по два уголка, а в верхней — по одному.

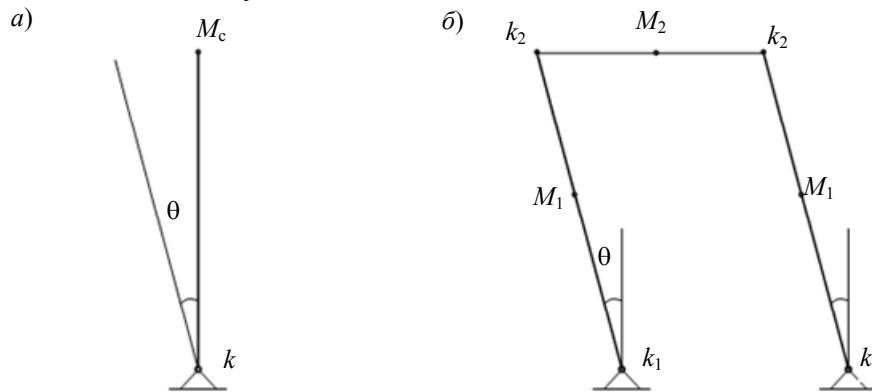


Рис. 1

Запишем выражение для кинетической энергии движения портальной конструкции:

$$T = \frac{2J_1 \dot{\theta}^2}{2} + \frac{M_2 (\dot{\theta} L_1)^2}{2} = \frac{M_1 L_1^2}{4} \dot{\theta}^2 + \frac{M_2 L_1^2}{2} \dot{\theta}^2,$$

где L_1 — высота вертикальной балки.

Потенциальная энергия портальной конструкции равна:

$$U = -\left(\frac{2k_1 \theta^2}{2} + \frac{2k_2 \theta^2}{2}\right) = -(k_1 + k_2) \theta^2.$$

Уравнение Эйлера—Лагранжа запишется в виде:

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0.$$

Принимая во внимание, что $L = T - U$, с помощью несложных преобразований

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M_1}{2} + M_2 \right) L_1^2 \dot{\theta} + 2(k_1 + k_2) \theta = 0,$$

$$\left(\frac{M_1}{2} + M_2 \right) L_1^2 \ddot{\theta} + 2(k_1 + k_2) \theta = 0,$$

решив (2), получим уравнение для частоты собственных колебаний портальной конструкции:

$$\omega = \frac{1}{L_1} \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)}{\frac{M_1}{2} + M_2}}. \quad (5)$$

Формула (5) задает частоту, соответствующую наиболее низкочастотной составляющей колебаний системы из трех станочных профилей в поперечной плоскости, причем в нее входит длина только вертикального профиля L_1 , длина горизонтального профиля не оказывает влияния на частоту.

На рис. 2 представлены модели балки (а) и портальной конструкции (б), закрепленные при помощи скрытых уголков (1 — станочный профиль; 2 — акселерометр; 3 — скрытые уголки). Расчет по МКЭ произведен в модуле Simulation пакета Fusion 360, где для каждой модели сгенерирована сетка плотностью один элемент на $1,5 \text{ см}^3$. Сопряжение скрытых уголков и станочного профиля производилось только в точках затягивания винта. Исследовались собственные частоты, возникающие в моделях при креплении одного и двух скрытых уголков, при движении системы в поперечной плоскости.

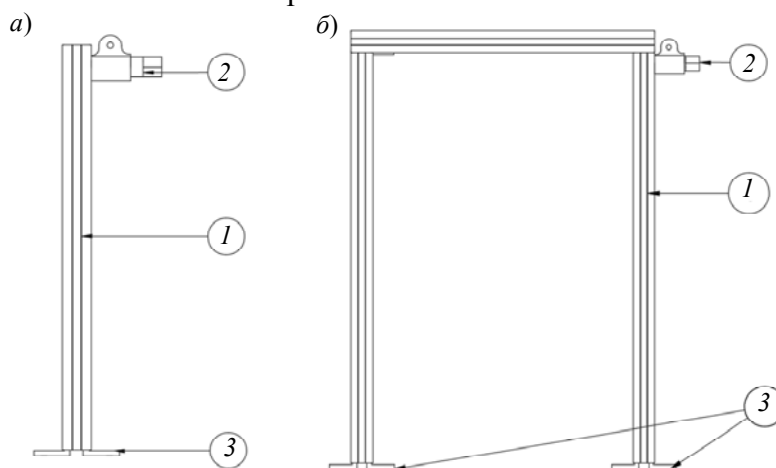


Рис. 2

Экспериментальные результаты. Экспериментальная установка собрана из станочного профиля, который с помощью скрытых уголков закреплен на неподвижном основании. Основным измерительным средством служит аналоговый акселерометр IMV VP-4200, установленный сверху балки (рис. 3) на пластиковое крепление, распечатанное на 3D-принтере. Во время эксперимента обеспечивалось импульсное механическое воздействие на балки станочного профиля длиной 0,28 и 0,38 м, затем с помощью акселерометра регистрировались их вибрационные отклики.



Рис. 3

На рис. 4 приведены полученные экспериментально значения частот (*а* — балка длиной 0,38 м, крепление с помощью одного уголка; *б* — балка 0,38 м, крепление с помощью двух уголков; *в* — балка 0,28 м, крепление с помощью одного уголка; *г* — балка 0,28 м, крепление с помощью двух уголков). Частоты исследовались в серии из 10 экспериментов, обработанные данные приведены в табл. 1.

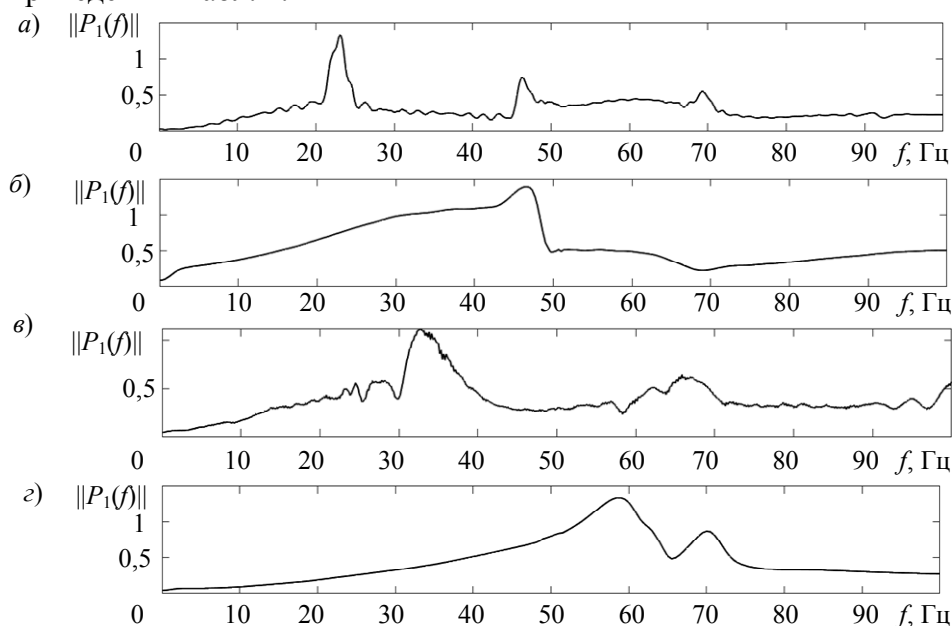


Рис. 4

Таблица 1

Экспериментальные результаты

№	Тип конструкции, длина балки	Частота, Гц	
		крепление каждой балки при помощи двух скрытых уголков	крепление каждой балки при помощи одного скрытого уголка
1	Стержень, 0,38 м	$45,2273 \pm 1,2043, p = 95 \%$	$22,1329 \pm 0,2415, p = 95 \%$
2	Стержень, 0,28 м	$57,7576 \pm 0,8626, p = 95 \%$	$31,8170 \pm 1,4559, p = 95 \%$
3	Портал, 0,38 м	$31,1110 \pm 0,43, p = 95 \%$	—

С использованием формулы (3) и экспериментальных данных (см. табл. 1) рассчитаны значения жесткости сочленений балки с одним и двумя уголками (табл. 2).

Таблица 2

Экспериментальная жесткость стержневой конструкции

№	Тип конструкции, длина балки	Жесткость, Н·м/рад	
		крепление каждой балки при помощи двух скрытых уголков	крепление каждой балки при помощи одного скрытого уголка
1	Стержень, 0,38 м	$700,5203 \pm 36,3769, p = 95 \%$	$167,4264 \pm 3,6813, p = 95 \%$
2	Стержень, 0,38 м	$498,1953 \pm 14,8664, p = 95 \%$	$152,1460 \pm 12,6140, p = 95 \%$

Собственная частота порталной конструкции, найденная экспериментально, составила $31,11 \pm 0,43$ Гц. Для верификации представленного подхода к расчету собственных частот составных конструкций из профиля, рассчитаем собственную частоту порталной конструкции, используя формулу (5) и значения жесткости сочленений из табл. 2. Портальная конструкция имеет сочленения двух различных жесткостей: к нижнему основанию крепятся вертикальные балки с помощью двух уголков, жесткость этих сочленений равна k_1 ; каждая вертикальная балка крепится к горизонтальной при помощи одного уголка, жесткость этих сочленений равна k_2 . Таким образом, переходя к линейной частоте $f = \omega / (2\pi)$, получим:

$$f = \frac{1}{2\pi L_1} \sqrt{\frac{2(k_1 + k_2)}{\frac{M_1}{2} + M_2}} = \frac{1}{2 \cdot 3,1416 \cdot 0,38} \sqrt{\frac{2(700,52 + 167,42)}{\frac{0,16}{2} + 0,188}} = 33,7 \pm 0,77 \text{ Гц.}$$

Также для сравнения проанализированы собственные частоты в среде Fusion 360 с использованием МКЭ. Первые моды профиля и порталной конструкции, полученные при в среде Fusion 360 и соответствующие исследуемому движению, сведены в табл. 3.

Таблица 3

МКЭ во Fusion 360

№	Тип конструкции, длина балки	Частота, Гц	
		крепление каждой балки при помощи двух скрытых уголков	крепление каждой балки при помощи одного скрытого уголка
1	Стержень, 0,38 м	67,21	31,69
2	Стержень, 0,28 м	101	41,86
3	Портал, 0,38 м	69,94	51,64

Значения частот, полученные при моделировании во Fusion 360, существенно отличаются от экспериментальных результатов, что объясняется невозможностью интерактивной корректировки жесткости сопряжений элементов в программе моделирования. При выборе жесткого сопряжения (соответствует креплению элементов друг к другу посредством болтов) программа определяет это сопряжение абсолютно жестким, что не соответствует действительности.

При использовании экспериментально найденных значений жесткости крепления одного и двух скрытых уголков к балке рассчитанная теоретическая частота порталной конструкции ($33,7 \pm 0,77$ Гц) оказалась близка к определяемой экспериментально ($31,11 \pm 0,43$ Гц). Небольшое несоответствие частот может быть связано с различной затяжкой болтов при креплении скрытого уголка, а также ограниченной релевантностью представленной линейной модели.

Выводы. В работе экспериментально исследованы Т-образное и L-образное сочленения станочного профиля 20×20 мм на два и один скрытый уголок соответственно, а также определена жесткость этих сочленений. Выведена формула расчета собственной частоты порталной конструкции из станочного профиля — полученное с ее помощью значение собственной частоты хорошо согласуется с результатами эксперимента. Вместе с тем в ходе исследования обнаружены значительные погрешности, которые возникают при расчете собственных частот конструкций из станочного профиля с соединениями на скрытый уголок при помощи метода конечных элементов в популярном пакете моделирования Fusion 360.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kun K. Reconstruction and development of a 3D printer using FDM technology // *Procedia Eng.* Elsevier. 2016. Vol. 149. P. 203–211.
2. Finnes T. High definition 3d printing-comparing SLA and FDM printing technologies // *J. Undergrad. Res.* 2015. Vol. 13, N 1. P. 3.
3. Horvath J. The Desktop 3D Printer // *Mastering 3D Printing.* Springer, 2014. P. 11—20.
4. Grutle Ø. K. 5-axis 3D Printer. Master's thesis. University of Oslo, 2015.
5. Donaldson R. R., Thompson D. C., Loewen E. G. Design and performance of a small precision CNC turning machine // *CIRP Ann.* Elsevier, 1986. Vol. 35, N 1. P. 373—376.
6. Prasetyawan A. T. Redesign CNC plotter batik dengan transmisi everman belt drive menggunakan rangka v-slot aluminium profile. Thesis Undergraduate. University of Muhammadiyah Malang, 2019.
7. Megalingam R. K., Darla V. P., Nimmala C. S. K. Autonomous Wall Painting Robot // 2020 Intern. Conf. for Emerging Technology (INCET). 2020. P. 1—6.
8. Pilch Z., Domin J., Szlapa A. The impact of vibration of the 3D printer table on the quality of print // 2015 Selected Problems of Electrical Engineering and Electronics (WZEE). 2015. P. 1—6.

9. Stejskal T. et al. Measurement of static stiffness after motion on a three-axis CNC milling table // Appl. Sci. Multidisciplinary Digital Publishing Institute, 2018. Vol. 8, N 1. P. 15.
10. Labuschagne A., van Rensburg N. F. J., der Merwe A. J. Comparison of linear beam theories // Math. Comput. Model. Elsevier, 2009. Vol. 49, N 1—2. P. 20—30.
11. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
12. Holman J. M., Serdar T. Analyzing the composite 3-D printer frame for rigidity // 2018 ASEE Annual Conference & Exposition. 2018.
13. Bedri R., Al-Nais M. O. Prestressed modal analysis using finite element package ANSYS // Intern. Conf. on Numerical Analysis and Its Applications. 2004. P. 171—178.
14. Munde K. H., Mestry M. M. P. Pre stressed modal FE Analysis of bolted joint // ETIR. 2018. Vol. 5, is. 7. https://www.researchgate.net/publication/326588021_Pre-Stressed_Modal_Analysis_of_Composite_Bolted_Structure.
15. Piscan I., Janssens T., Pupaza C. Dynamic parameter estimation of bolted assemblies // Proc. of ISMA Conf. on Noise and Vibration Engineering. Leuven, Belgium, 2012. P. 3461—3474.
16. Wang F. et al. The investigation of vibration characteristics on the bolted disk-drum joints structure // Adv. Mech. Eng. 2019. Vol. 11, N 3. P. 1687814019831477.
17. Zhang K. et al. Modal Analysis of Bolted Structure Based on Equivalent Material of Joint Interface // Materials. 2019. Vol. 12, N 18. P. 3004.
18. Chen G. et al. Dynamics modeling and experimental modal analysis of bolt loosening for lightning rod // J. Vibroengineering. JVE International Ltd., 2020. Vol. 22, N 3. P. 657—671.
19. Shirokov V. S., Kholopov I. S., Solovejv A. V. Determination of the frequency of natural vibrations of a modular building // Procedia Eng. 2016. Vol. 153. P. 655—661.
20. Маркеев А. П. О движении связанных маятников // Нелинейная динамика. 2013. Т. 9, № 1. С. 27—38.

Сведения об авторах

- Екатерина Евгеньевна Конец** — СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; ассистент; E-mail: eekopets@etu.ru
- Артур Искандарович Каримов** — канд. техн. наук; СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; доцент; E-mail: aikarimov@etu.ru
- Денис Николаевич Бутусов** — канд. техн. наук, доцент; СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; E-mail: dnbutusov@etu.ru
- Вячеслав Геннадьевич Рыбин** — СПбГЭТУ „ЛЭТИ“, кафедра систем автоматизированного проектирования; ассистент; E-mail: vgrybin@etu.ru

Поступила в редакцию
08.06.2021 г.

Ссылка для цитирования: Конец Е. Е., Каримов А. И., Бутусов Д. Н., Рыбин В. Г. Собственная частота колебаний конструкций из станочного профиля, соединенного на скрытый уголок // Изв. вузов. Приборостроение. 2021. Т. 64, № 10. С. 821—828.

NATURAL VIBRATION FREQUENCY OF STRUCTURES FROM A MACHINE PROFILE CONNECTED WITH A CONCEALED CORNER

E. E. Kopets, A. I. Karimov, D. N. Butusov, V. G. Rybin

St. Petersburg Electrotechnical University LETI, 197022, St. Petersburg, Russia
E-mail: eekopets@etu.ru

Structures made of aluminum machine tools are widely used in 3D printers and CNC machines design. The designer must account not only for the static deformations of such structures, but also for vibration characteristics since they directly affect the quality of the device operation. A mathematical model of construction composed of two machine profiles in the form of a linear elastic hinge is proposed, and its parameters are experimentally determined. Comparison of results obtained using the proposed model as well as simulated by the finite element method in the Fusion 360 package with experimentally measured data is

performed. The conclusion is made about the best correspondence of the proposed mathematical model to experimental data.

Keywords: frequency analysis, 3D printer, Lagrange equations, construction profile, design automation, structural rigidity

REFERENCES

1. Kun K. *Procedia Eng.*, 2016, vol. 149, pp. 203–211.
2. Finnes T. J. *Undergrad. Res.*, 2015, no. 1(13), pp. 3.
3. Horvath J. *Mastering 3D Printing*, Springer, 2014, pp. 11–20.
4. Grutle Ø.K. *5-axis 3D Printer*, Master's thesis, University of Oslo, 2015.
5. Donaldson R.R., Thompson D.C., Loewen E.G. *CIRP Ann.*, 1986, no. 1(35), pp. 373–376.
6. Prasetyawan A.T. *Redesign cnc plotter batik dengan transmisi everman belt drive menggunakan rangka v-slot aluminium profile*, Undergraduate Thesis, University of Muhammadiyah Malang, 2019.
7. Megalingam R.K., Darla V.P., Nimmala C.S.K. *2020 International Conference for Emerging Technology (IN CET)*, 2020, pp. 1–6.
8. Pilch Z., Domin J., Szlapa A. *2015 Selected Problems of Electrical Engineering and Electronics (WZEE)*, 2015, pp. 1–6.
9. Stejskal T. et al. *Appl. Sci.*, 2018, no. 1(8), pp. 15.
10. Labuschagne A., van Rensburg N.F.J., der Merwe A. *J. Math. Comput. Model*, 2009, no. 1–2(49), pp. 20–30.
11. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike* (Finite Element Method in Technology), Moscow, 1975. (in Russ.)
12. Holman J.M., Serdar T. *2018 ASEE Annual Conference&Exposition*, 2018.
13. Bedri R., Al-Nais M.O. *International Conference on Numerical Analysis and Its Applications*, 2004, pp. 171–178.
14. Munde K.H., Mestry M.M.P. *ETIR*, 2018, no. 7(5), https://www.researchgate.net/publication/326588021_Pre-Stressed_Modal_Analysis_of_Composite_Bolted_Structure.
15. Piscan I., Janssens T., Pupaza C. *Proceedings of ISMA Conference on Noise and Vibration Engineering*, 2012, pp. 3461–3474.
16. Wang F. et al. *Adv. Mech. Eng.*, 2019, no. 3(11), pp. 1687814019831477.
17. Zhang K. et al. *Materials*, 2019, no. 18(12), pp. 3004.
18. Chen G. et al. *J. Vibroengineering*, 2020, no. 3(22), pp. 657–671.
19. Shirokov V.S., Kholopov I.S., Solovejev A.V. *Procedia Eng.*, 2016, vol. 153, pp. 655–661.
20. Markeev A.P. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, no. 1(9), pp. 27–38. (in Russ.)

Data on authors

- Ekaterina E. Kopets** — St. Petersburg Electrotechnical University LETI, Department of Computer-Aided Design; Assistant; E-mail: eekopets@etu.ru
- Artur I. Karimov** — PhD; St. Petersburg Electrotechnical University LETI, Department of Computer-Aided Design; Associate Professor; E-mail: aikarimov@etu.ru
- Denis N. Butusov** — PhD, Associate Professor; St. Petersburg Electrotechnical University LETI, Department of Computer-Aided Design; E-mail: dnbutusov@etu.ru
- Vyacheslav G. Rybin** — St. Petersburg Electrotechnical University LETI, Department of Computer-Aided Design; Assistant; E-mail: vgrybin@etu.ru

For citation: Kopets E. E., Karimov A. I., Butusov D. N., Rybin V. G. Natural vibration frequency of structures from a machine profile connected with a concealed corner. *Journal of Instrument Engineering*. 2021. Vol. 64, N 10. P. 821–828 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-10-821-828