

---

---

# ПРИБОРЫ И СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

---

---

УДК 681.5  
DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-12-982-992

## РОБАСТНОЕ ТРАЕКТОРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КВАДРОКОПТЕРОМ ПО ВЫХОДУ НА ОСНОВЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОДХОДА

О. И. БОРИСОВ, М. А. КАКАНОВ, А. Ю. ЖИВИЦКИЙ, А. А. ПЫРКИН

*Университет ИТМО, 197101, Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: borisov@itmo.ru*

Решена задача траекторного управления квадрокоптером с неизмеряемыми углами тангажа и крена на основе геометрического подхода. Для решения задачи применены модифицированный расширенный наблюдатель и внутренняя модель. Предложен подход, позволяющий обеспечить движение квадрокоптера в горизонтальной плоскости по траектории, заданной периодической (синусоидальной) функцией или полиномиальной функцией второго порядка. Движение квадрокоптера характеризуется полуглобальной асимптотической сходимостью ошибок слежения к нулю.

**Ключевые слова:** траекторное управление, геометрический подход, робастное управление, наблюдатель с высоким коэффициентом усиления, внутренняя модель, квадрокоптер

**Введение.** Геометрический подход включает комплекс методов анализа и синтеза систем управления. В основе этих методов лежит исследование динамических свойств систем как геометрических характеристик пространств состояний и их подпространств. Некоторые характеристики, в частности, могут являться инвариантными при смене координат, что в ряде случаев позволяет упростить решение той или иной задачи управления [1]. Задача синтеза управления для нелинейных систем является нетривиальной, а геометрический подход позволяет формализовать процедуру синтеза путем смены координат и приведения динамической модели объекта к нормальной форме, к которой применима линеаризация по обратной связи, а также синтез робастного закона управления на базе оценок неопределенных функций, полученных с помощью наблюдателя с высоким коэффициентом усиления. Геометрический подход для нелинейных систем приведен в книгах [2—4], однако развитие его методов актуально, в том числе в части расширения класса нелинейных систем и задач управления. В работе [5] предложен подход модифицированного расширенного наблюдателя (enhanced extended observer) на базе расширенной леммы Даяванца. В сравнении со стандартным расширенным наблюдателем [6] модифицированная версия позволяет охватить более широкий класс нелинейных систем, нормальная форма которых характеризуется нестационарным коэффициентом усиления. К такому классу систем, в частности, относится квадрокоптер, у которого динамическая модель в нормальной форме содержит нестационарный коэффициент усиления, зависящий от управляющего воздействия, соответствующего вертикальному движению.

В работе [7] показаны особенности применения модифицированного расширенного наблюдателя для решения задачи удержания заданного положения квадрокоптера с неизмеряемыми углами крена и тангажа. В настоящей статье решена более общая задача траекторного управления квадрокоптером в горизонтальной плоскости путем применения внутренней модели для компенсации в установившемся режиме внешних воздействий, представляющих собой задающие сигналы, описываемые генератором траектории, и, как следствие, обеспечения полуглобальной асимптотической сходимости ошибок слежения к нулю.

**Постановка задачи.** Рассмотрим динамическую модель квадрокоптера, полученную после преобразований, произведенных в работе [7],

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= (g + u_0) \sin\theta \cos\psi, \\ \ddot{y} &= -(g + u_0) \sin\psi, \\ \ddot{z} &= (g + u_0) \cos\theta \cos\psi - g, \\ \ddot{\theta} &= u_1, \\ \ddot{\psi} &= u_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $x, y, z \in \mathbb{R}$  — декартовы координаты, доступные для измерения;  $\theta, \psi \in \mathbb{S} := [0, 2\pi)$  — соответственно углы тангажа и крена, предполагающиеся неизмеряемыми;  $u_0, u_1, u_2$  — управляющие сигналы;  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  — ускорение свободного падения.

Следуя [7], примем, что задача стабилизации квадрокоптера на заданной высоте  $z^* = \text{const}$  решена с помощью ПД-регулятора с насыщением

$$u_0 = \text{sat}_\ell [-r_0 \ddot{z} - r_1 \dot{z}], \quad 0 < \ell < g,\tag{2}$$

который при соответствующем выборе параметров  $r_0, r_1$  и выполнении условия

$|\cos\theta \cos\psi| \geq \frac{g}{g + \ell}$  обеспечивает устойчивость вертикального движения квадрокоптера по вхо-

ду-состоянию и сходимости ошибки стабилизации  $\tilde{z}(t) = z(t) - z^*$  к нулю.

Требуется синтезировать робастный регулятор по выходу на основе геометрического подхода, обеспечивающий траекторное управление квадрокоптером в горизонтальной плоскости и выполнение целевых условий

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{x}(t)| &= 0, \quad \tilde{x}(t) = x(t) - x^*(t), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} |\tilde{y}(t)| &= 0, \quad \tilde{y}(t) = y(t) - y^*(t),\end{aligned}\tag{3}$$

где  $x^*(t)$  и  $y^*(t)$  — задающие сигналы, определяющие желаемую траекторию движения в горизонтальной плоскости и описываемые генератором вида

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4}$$

$$S_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\rho_i & 0 \end{pmatrix}, \quad w_i = \begin{pmatrix} w_{i1} \\ w_{i2} \\ w_{i3} \end{pmatrix}, \quad H_i = (1 \quad 0 \quad 0), \quad i = \{1, 2\},$$

$\rho_i \geq 0$  — некоторый заданный параметр.

*Замечание 1.* В зависимости от параметра  $\rho_i$  и начальных условий  $w_i(0)$  генератор (4) позволяет вырабатывать сигнал в синусоидальной или полиномиальной форме второго порядка.

Действительно, при  $\rho_i = \omega^2$  и  $w_i(0) = (C_i + A_i \sin \varphi_i \quad A_i \omega_i \cos \varphi_i \quad -A_i \omega_i^2 \sin \varphi_i)^T$  сигнал принимает вид

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ C_2 + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix},$$

а при  $\rho_i = 0$  и  $w_i(0) = (C_{i0} \quad C_{i1} \quad 2C_{i2})^T$ :

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{10} + C_{11}t + C_{12}t^2 \\ C_{20} + C_{21}t + C_{22}t^2 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

**Основной результат.** Выполним предложенную в работе [7] замену координат

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= x, & \xi_{21} &= y, \\ \xi_{12} &= \dot{x}, & \xi_{22} &= \dot{y}, \\ \xi_{13} &= g \sin \theta \cos \psi, & \xi_{23} &= -g \sin \psi, \\ \xi_{14} &= g \dot{\theta} \cos \theta \cos \psi - g \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi, & \xi_{24} &= -g \dot{\psi} \cos \psi, \end{aligned}$$

являющуюся обратимой при  $|\theta| < \pi/2$  и  $|\psi| < \pi/2$ , что соответствует номинальному режиму полета квадрокоптера, и получим систему в нормальной форме

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{11} &= \xi_{12}, & \dot{\xi}_{21} &= \xi_{22}, \\ \dot{\xi}_{12} &= \beta(t) \xi_{13}, & \dot{\xi}_{22} &= \beta(t) \xi_{23}, \\ \dot{\xi}_{13} &= \xi_{14}, & \dot{\xi}_{23} &= \xi_{24}, \\ \dot{\xi}_{14} &= q_1(\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) + b_1(\theta, \psi) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, & \dot{\xi}_{24} &= q_2(\psi, \dot{\psi}) + b_2(\psi) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где  $q_1(\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi})$ ,  $b_1(\theta, \psi)$ ,  $q_2(\psi, \dot{\psi})$ ,  $b_2(\psi)$  — нелинейные неопределенные функции вида

$$\begin{aligned} q_1(\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) &= g \ddot{\theta} \cos \theta \cos \psi - g \ddot{\psi} \sin \theta \sin \psi - 2g \dot{\psi} \dot{\theta} \cos \theta \sin \psi - g [\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2] \sin \theta \cos \psi, \\ b_1(\theta, \psi) &= (g \cos \theta \cos \psi \quad -g \sin \theta \sin \psi), \\ q_2(\psi, \dot{\psi}) &= g \dot{\psi}^2 \sin \psi - g \ddot{\psi} \cos \psi, \\ b_2(\psi) &= (0 \quad -g \cos \psi), \end{aligned}$$

$\beta(t)$  — ограниченная измеримая функция вида

$$\beta(t) = \left( 1 + \frac{u_0(t)}{g} \right), \quad 0 < \beta_{\min} \leq \beta(t) \leq \beta_{\max},$$

где  $\beta_{\min} = 1 - \frac{\ell}{g}$  и  $\beta_{\max} = 1 + \frac{\ell}{g}$ .

Зададим сигналы ошибок  $e_1 = (e_{11} \quad \dots \quad e_{14})^T$ ,  $e_2 = (e_{21} \quad \dots \quad e_{24})^T$  как

$$\begin{aligned}
e_{11} &= \xi_{11} - w_{11}, & e_{21} &= \xi_{21} - w_{21}, \\
e_{12} &= \xi_{12} - w_{12}, & e_{22} &= \xi_{22} - w_{22}, \\
e_{13} &= \xi_{13} - \frac{1}{\beta(t)} w_{13}, & e_{23} &= \xi_{23} - \frac{1}{\beta(t)} w_{23}, \\
e_{14} &= \xi_{14} + \frac{\dot{\beta}}{\beta^2} w_{13} + \frac{\rho_1}{\beta} w_{12}, & e_{24} &= \xi_{24} + \frac{\dot{\beta}}{\beta^2} w_{23} + \frac{\rho_2}{\beta} w_{22},
\end{aligned}$$

продифференцировав которые, получим модели

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{11} &= e_{12}, \\
\dot{e}_{12} &= \beta(t) e_{13}, \\
\dot{e}_{13} &= e_{14}, \\
\dot{e}_{14} &= q_1(\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}) + \left[ \frac{\ddot{\beta}}{\beta^2} - \frac{2\dot{\beta}^2}{\beta^3} + \frac{\rho_1}{\beta} \right] w_{13} - \frac{2\rho_1\dot{\beta}}{\beta^2} w_{12} + b_1(\theta, \psi) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{21} &= e_{22}, \\
\dot{e}_{22} &= \beta(t) e_{23}, \\
\dot{e}_{23} &= e_{24}, \\
\dot{e}_{24} &= q_2(\psi, \dot{\psi}) + \left[ \frac{\ddot{\beta}}{\beta^2} - \frac{2\dot{\beta}^2}{\beta^3} + \frac{\rho_2}{\beta} \right] w_{23} - \frac{2\rho_2\dot{\beta}}{\beta^2} w_{22} + b_2(\psi) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Запишем модели (7), (8) в общем виде как

$$\dot{w} = s(w), \quad \dot{e} = f(w, e, u), \quad \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{y}} \end{pmatrix} = h_e(w, e), \tag{9}$$

где  $w = (w_1^T \quad w_2^T)^T$  — вектор состояния генератора,  $e = (e_1^T \quad e_2^T)^T$  — вектор состояния модели ошибки,  $u = (u_1 \quad u_2)^T$  — вектор управляющих воздействий,  $s(\cdot), f(\cdot), h_e(\cdot)$  — гладкие функции.

Исследуем поведение системы (9) в установившемся режиме с помощью выражений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi}{\partial w} s(w) &= f(w, \pi(w), v(w)), \\
0 &= h_e(w, \pi(w)),
\end{aligned}$$

где  $\pi(w) = (\pi_1^T(w) \quad \pi_2^T(w))^T$  — вектор состояния объекта в установившемся режиме,

$v(w) = (v_1(w) \quad v_2(w))^T$  — вектор управления в установившемся режиме.

Заметим, что в установившемся режиме справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
q_1(0, 0, 0, 0) &= 0, \quad b_1(0, 0) = (g \quad 0), \quad q_2(0, 0) = 0, \quad b_2(0) = (0 \quad -g), \\
u_0(\infty) &= 0, \quad \beta(\infty) = 1, \quad \dot{\beta}(\infty) = \ddot{\beta}(\infty) = 0,
\end{aligned}$$

с учетом которых найдем пару  $\pi(w), v(w)$  для решения задачи управления по выходу системой (7)—(8):

$$\begin{aligned}\pi(w) &= \left( \pi_1^T(w) \quad \pi_2^T(w) \right)^T = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^T, \\ v(w) &= \left( v_1(w) \quad v_2(w) \right)^T = \left( -\frac{\rho_1}{g} w_{13} \quad \frac{\rho_2}{g} w_{23} \right)^T := \Psi w.\end{aligned}\tag{10}$$

Для компенсации внешних сигналов  $w$  и, как следствие обеспечения сходимости ошибок слежения к нулю, сформируем внутреннюю модель вида

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ u &= \Gamma\eta + \bar{u},\end{aligned}\tag{11}$$

где  $\bar{u}$  — управляющее воздействие, которое будет определено позднее,  $F = \text{diag}(F_1, F_2)$  — гурвицева матрица, образующая вместе с  $G = \text{diag}(G_1, G_2)$ ,  $G_1 = G_2 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1)^T$  управляемую пару  $(F, G)$ ; матрица  $\Gamma = \text{diag}(\Gamma_1, \Gamma_2)$  такая, что собственные числа матрицы  $\Phi = F + G\Gamma$  совпадают с собственными числами матрицы  $S = \text{diag}(S_1, S_2)$ .

Известно [4, 8], что существует матрица  $\Sigma$  такая, что

$$\begin{aligned}\Sigma S &= (F + G\Gamma)\Sigma, \\ \Psi &= \Gamma\Sigma.\end{aligned}$$

*Замечание 2.* Если параметр  $\rho_i$  генератора (4) равен нулю, то, как следует из выражения (10), значение управляющего воздействия  $v_i(w)$  в установившемся режиме также равно нулю  $\rho_i = 0 \Rightarrow v_i(w) = 0$ , следовательно, задача слежения за квадратичным задающим сигналом вида (5) не требует построения внутренней модели (11).

Объединим внутреннюю модель с объектом управления и получим агрегированную систему вида

$$\begin{aligned}\dot{\eta} &= F\eta + G[\Gamma\eta + \bar{u}], \\ \dot{e}_{i1} &= e_{i2}, \\ \dot{e}_{i2} &= \beta(t)e_{i3}, \\ \dot{e}_{i3} &= e_{i4}, \\ \dot{e}_{i4} &= q_i(\cdot) + \left[ \frac{\ddot{\beta}}{\beta^2} - \frac{2\dot{\beta}^2}{\beta^3} + \frac{\rho_i}{\beta} \right] w_{i3} - \frac{2\rho_i\dot{\beta}}{\beta^2} w_{i2} + b_i(\cdot)[\Gamma\eta + \bar{u}].\end{aligned}\tag{12}$$

Введем новую переменную

$$\tilde{\eta} = \eta - \Sigma w,$$

производная которой равна

$$\dot{\tilde{\eta}} = F\tilde{\eta} + G[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}],$$

с учетом чего система (12) принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\eta}} &= F\tilde{\eta} + G[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}], \\ \dot{e}_{i1} &= e_{i2}, \\ \dot{e}_{i2} &= \beta(t)e_{i3}, \\ \dot{e}_{i3} &= e_{i4}, \\ \dot{e}_{i4} &= \tilde{q}_i(\cdot) + b_i(\cdot)[\Gamma\tilde{\eta} + \bar{u}],\end{aligned}\tag{13}$$

где функция

$$\tilde{q}_i(\cdot) = q_i(\cdot) + \left[ \frac{\ddot{\beta}}{\beta^2} - \frac{2\dot{\beta}^2}{\beta^3} + \frac{\rho_i}{\beta} \right] w_{i3} - \frac{2\rho_i\dot{\beta}}{\beta^2} w_{i2} + b_i(\cdot) \Psi w$$

в положении равновесия  $e_i = (0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$  равна нулю.

Для системы (13) выберем номинальный линеаризующий закон управления вида

$$\bar{u} = -\Gamma \tilde{\eta} + B^{-1}(\theta, \psi) \begin{pmatrix} -\tilde{q}_1(\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, w, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) + Ke_1 \\ -\tilde{q}_2(\psi, \dot{\psi}, w, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) + Ke_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$B(\theta, \psi) = \begin{pmatrix} b_1(\theta, \psi) \\ b_2(\psi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \cos \theta \cos \psi & -g \sin \theta \sin \psi \\ 0 & -g \cos \psi \end{pmatrix}, \quad K = (k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4).$$

Подставив закон управления (14) в (13), получим замкнутую систему вида

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= F \tilde{\eta} + GB^{-1}(\theta, \psi) \begin{pmatrix} -\tilde{q}_1(\theta, \dot{\theta}, \psi, \dot{\psi}, w, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) + Ke_1 \\ -\tilde{q}_2(\psi, \dot{\psi}, w, \beta, \dot{\beta}, \ddot{\beta}) + Ke_2 \end{pmatrix}, \\ \dot{e}_{i1} &= e_{i2}, \\ \dot{e}_{i2} &= \beta(t) e_{i3}, \\ \dot{e}_{i3} &= e_{i4}, \\ \dot{e}_{i4} &= Ke_i, \end{aligned} \quad (15)$$

где вектор  $e_i$  экспоненциально сходится к нулю в силу соответствующего выбора вектора  $K$  (см. работу [7]), а подсистема, описываемая первым выражением из (15), является устойчивой по входу-состоянию. Таким образом, можно сделать вывод, что вся система (15) является глобально асимптотически устойчивой.

Однако, поскольку закон управления (14) содержит неопределенности, он нереализуем. Для построения реализуемого закона управления воспользуемся так называемым подходом модифицированного расширенного наблюдателя, предложенного в [5].

Построим робастный закон управления вида

$$\bar{u} = \text{sat}_v \left[ \bar{B}^{-1} \begin{pmatrix} -\sigma_1 + K\hat{e}_1 \\ -\sigma_2 + K\hat{e}_2 \end{pmatrix} \right], \quad (16)$$

где  $\text{sat}_v(\cdot)$  — гладкая функция насыщения,  $\bar{B} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \end{pmatrix}$  — обратимая матрица такая, что

$$\| [B(\theta, \psi) - \bar{B}] \bar{B}^{-1} \|_1 < 1,$$

а  $\hat{e}_i = (\hat{e}_{i1} \ \hat{e}_{i2} \ \hat{e}_{i3} \ \hat{e}_{i4})^T$  и  $\sigma_i$  при  $i = \{1, 2\}$  представляют собой состояния модифицированных расширенных наблюдателей вида

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{e}}_{i1} &= \hat{e}_{i2} + \kappa a_4 (\tilde{x} - \hat{e}_{i1}), \\
 \dot{\hat{e}}_{i2} &= \beta(t) \hat{e}_{i3} + \kappa^2 a_3 (\tilde{x} - \hat{e}_{i1}), \\
 \dot{\hat{e}}_{i3} &= \hat{e}_{i4} + \kappa^3 a_2 (\tilde{x} - \hat{e}_{i1}), \\
 \dot{\hat{e}}_{i4} &= \sigma_i + \bar{b}_i \bar{u} + \kappa^4 a_1 (\tilde{x} - \hat{e}_{i1}), \\
 \dot{\sigma}_i &= \kappa^5 a_0 (\tilde{x} - \hat{e}_{i1}).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Робастный закон управления (11), (16), (17) обеспечивает в системе свойства полуглобальной асимптотической устойчивости, что означает выполнение цели управления (3) для ограниченного множества начальных условий. Формализуем результат в виде утверждения.

*Утверждение 1.* Для заданной траектория движения в горизонтальной плоскости  $(x^*, y^*)$ , вырабатываемой генератором (4), и ограниченного множества начальных условий  $R$  такого, что  $\|e(0)\| \leq R$ ,  $\|(\hat{e}(0), \sigma(0))\| \leq R$ , существует предел насыщения  $v$ , параметры  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$  и значение  $\kappa^*$  такие, что при  $\kappa > \kappa^*$  все траектории системы (7), (8), (11), (16), (17) ограничены и сигналы ошибок слежения  $\tilde{x}, \tilde{y}$  асимптотически сходятся к нулю, что означает выполнение цели управления (3).

**Моделирование.** Рассмотрим пример моделирования решения задачи траекторного управления квадрокоптером с использованием предложенного подхода.

Выберем высоту полета  $z^* = 0,5$  и рассмотрим две формы заданной траектории в горизонтальной плоскости:

1) периодический сигнал

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 + 0,3 \sin(0,5t + 0,7) \\ 0,2 + 0,4 \sin(0,6t + 0,8) \end{pmatrix}; \tag{18}$$

2) полиномиальный сигнал

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 + 0,3t + 0,5t^2 \\ 0,2 + 0,4t + 0,6t^2 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Выберем значения параметров ПД-регулятора (2) как

$$r_0 = 15, r_1 = 20, \ell = 0,9g.$$

Выберем значения параметров робастного регулятора (16), (17) как

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & -g \end{pmatrix}, K = (100 \ 100 \ 100 \ 10), v = 100, \kappa = 180,$$

а также вычислим значения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4$ , следуя процедуре, описанной в работе [9], как

$$\begin{aligned}
 a_4 &= b_4, \\
 a_3 &= b_4 b_3, \\
 a_2 &= b_4 b_3 b_2, \\
 a_1 &= b_4 b_3 b_2 b_1, \\
 a_0 &= b_4 b_3 b_2 b_1 b_0,
 \end{aligned}$$

где  $b_0 = 1$ , а коэффициенты  $b_1, b_2, b_3, b_4$  вычисляются рекурсивно:

$$b_1 = L_1 b_0 + b_0,$$

$$b_2 = \frac{L_2 (\sqrt{2} + 2b_0 b_1) + b_0 b_1}{\beta_{\min}},$$

$$b_3 = L_3 (\sqrt{3} + 3\beta_{\max} b_0 b_1 b_2) + \beta_{\max} b_0 b_1 b_2,$$

$$b_4 = L_4 (2\beta_{\max} + 4b_0 b_1 b_2 b_3) + b_0 b_1 b_2 b_3,$$

где  $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 1$ .

Для слежения за периодическим сигналом (18) зададим значения параметров внутренней модели (11):

$$F_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}, \quad G_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_i = (1 \quad 3 - \rho_i \quad 3), \quad i = \{1, 2\},$$

где  $\rho_1 = 0,25$  и  $\rho_2 = 0,36$ .

Для слежения за полиномиальным сигналом (19) в соответствии с Замечанием 2 деактивируем внутреннюю модель, задав

$$\Gamma_i = (0 \quad 0 \quad 0), \quad i = \{1, 2\}.$$

Результаты моделирования приведены на рис. 1 (периодический задающий сигнал) и 2 (полиномиальный задающий сигнал). Как видно на графиках, условие  $|\cos\theta\cos\psi| \geq \frac{g}{g+l}$ , необходимое для обеспечения устойчивости вертикального движения по входу-состоянию, выполнено, а также углы крена и тангажа удовлетворяют ограничениям  $|\theta| < \pi/2$  и  $|\psi| < \pi/2$ , при которых замена переменных (6) является обратимой. В обоих случаях сигналы ошибок  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  сходятся к нулю, а выходные переменные  $x, y, z$  стремятся к задающим воздействиям  $x^*(t), y^*(t), z^*$ .

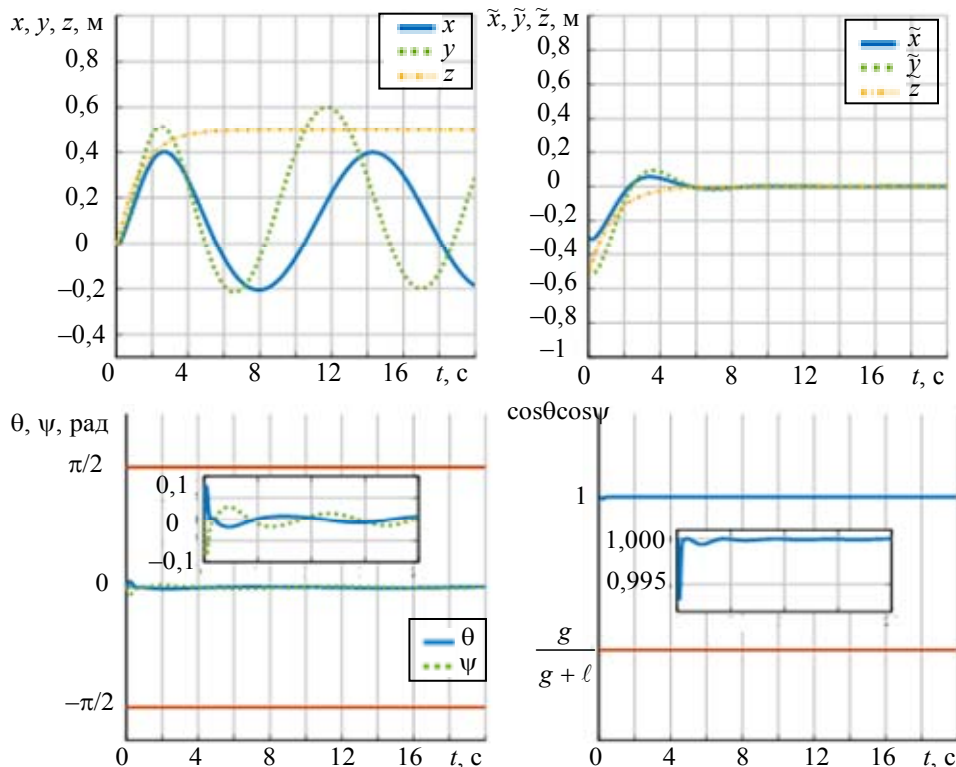
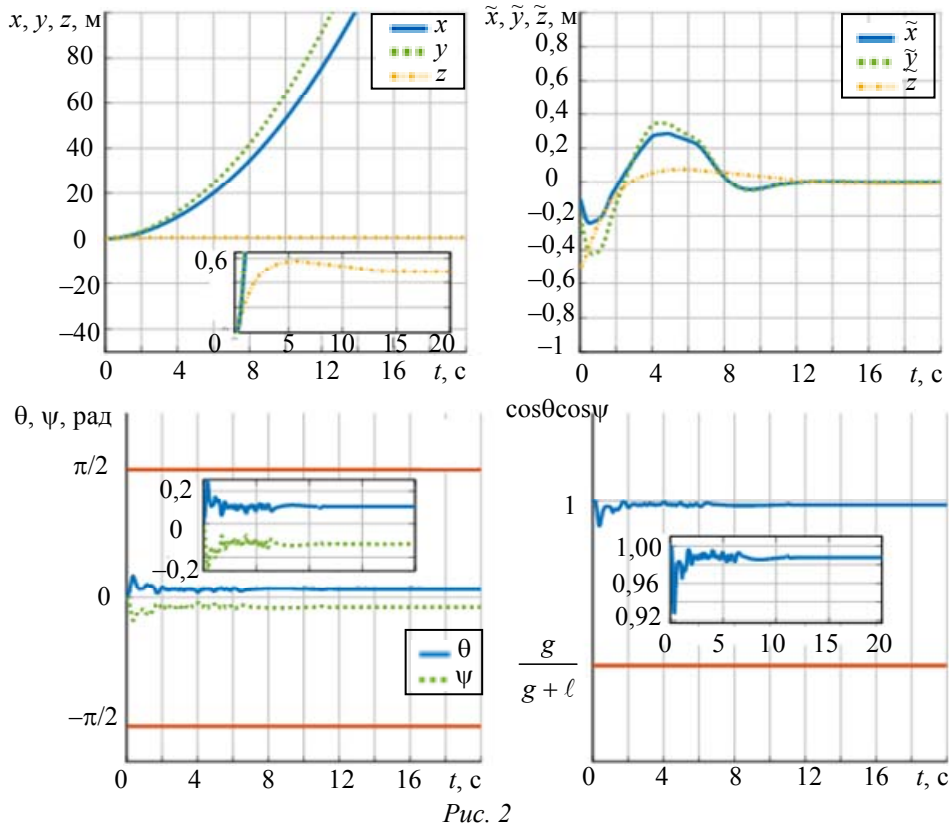


Рис. 1





**Заключение.** В работе предложено решение задачи траекторного управления моделью квадрокоптера (1) с неизмеряемыми углами тангажа и крена в горизонтальной плоскости по траектории, задаваемой с помощью (4). Предлагаемый подход предусматривает преобразование динамической модели (1) с учетом (2), (4) к модели ошибки в нормальной форме (7), (8), для которой синтезирован закон управления на основе внутренней модели (11) и модифицированного расширенного наблюдателя (16), (17), обеспечивающий полуглобальную асимптотическую устойчивость системы и выполнение достижения цели (3). Работоспособность предложенного подхода проиллюстрирована результатами компьютерного моделирования движения квадрокоптера по задающим воздействиям в двух формах: периодической (синусоидальной) функции и полиномиальной функции второго порядка.

Работа поддержана грантом Президента Российской Федерации № МК-4397.2021.4.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hu X., Lindquist A., Mari J., Sand J. Geometric control theory. Lecture Notes. Stockholm: KTH, 2007.
2. Huang J. Nonlinear Output Regulation. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. DOI: 10.1137/1.9780898718683.
3. Isidori A. Nonlinear Control Systems. London: Springer-Verlag, 1995. DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.
4. Isidori A. Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems. Cham: Springer, 2017. DOI: 10.1007/978-3-319-42031-8.
5. Isidori A., Pyrkin A., Borisov O. An extension of a lemma of Dayawansa and its application in the design of extended observers for nonlinear systems // Automatica. 2019. Vol. 106. P. 178—183. DOI: 10.1016/j.automatica.2019.04.043.
6. Freidovich L. B., Khalil H. K. Performance recovery of feedback-linearization-based designs // IEEE Transactions on Automatic Control. 2008. Vol. 53, N 10. P. 2324—2334. DOI: 10.1109/TAC.2008.2006821.

7. Borisov O. I., Pyrkin A. A., Isidori A. Application of enhanced extended observer in station-keeping of a quadrotor with unmeasurable pitch and roll angles // *IFAC-PapersOnLine*. 2019. Vol. 52, N 16. P. 837—842. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.067.
8. Francis B., Sebakhy O. A., Wonham W. M. Synthesis of multivariable regulators: The internal model principle // *Applied Mathematics and Optimization*. 1974. Vol. 1, N 1. P. 64—86. DOI: 10.1007/BF01449024.
9. Borisov O. I., Pyrkin A. A., Isidori A. Robust output regulation of permanent magnet synchronous motors by enhanced extended observer // *IFAC-PapersOnLine*. 2020. Vol. 53, N 2. P. 4881—4886. DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1056.

**Сведения об авторах**

- Олег Игоревич Борисов** — канд. техн. наук; Университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: borisov@itmo.ru
- Михаил Александрович Каканов** — аспирант; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: makakanov@itmo.ru
- Андрей Юрьевич Живицкий** — студент; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: zhivitckii@itmo.ru
- Антон Александрович Пыркин** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО; факультет систем управления и робототехники; E-mail: pyrkin@itmo.ru

Поступила в редакцию  
16.09.2021 г.

**Ссылка для цитирования:** Борисов О. И., Каканов М. А., Живицкий А. Ю., Пыркин А. А. Робастное траекторное управление квадрокоптером по выходу на основе геометрического подхода // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2021. Т. 64, № 12. С. 982—992.

### ROBUST TRACKING CONTROL OF A QUADROPTER BY OUTPUT BASED ON THE GEOMETRIC APPROACH

O. I. Borisov, M. A. Kakanov, A. Yu. Zhivitckii, A. A. Pyrkin

*ITMO University, 197101, St. Petersburg, Russia*  
*E-mail: borisov@itmo.ru*

The problem of tracking control of a quadcopter with unmeasurable pitch and roll angles is solved on the basis of the geometric approach. The enhanced extended observer and the internal model are used to solve the problem. The proposed approach makes it possible to ensure the quadcopter movement in horizontal plane along a trajectory given by a periodic (sinusoidal) function or a second-order polynomial function. Quadcopter motion is characterized by semiglobal asymptotic convergence of the tracking errors to zero.

**Keywords:** tracking control, geometric approach, robust control, high-gain observer, internal model, quadcopter

**REFERENCES**

- Hu X., Lindquist A., Mari J., Sand J. *Geometric control theory*, Lecture Notes, Stockholm, KTH, 2007.
- Huang J. *Nonlinear Output Regulation. Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2004, DOI: 10.1137/1.9780898718683.
- Isidori A. *Nonlinear Control Systems*, Springer-Verlag, London, 1995, DOI: 10.1007/978-1-84628-615-5.
- Isidori A. *Lectures in Feedback Design for Multivariable Systems*, Springer, Cham, 2017, DOI: 10.1007/978-3-319-42031-8.
- Isidori A., Pyrkin A., Borisov O. *Automatica*, 2019, vol. 106, pp. 178–183, DOI: 10.1016/j.automatica.2019.04.043.
- Freidovich L.B., Khalil H.K. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2008, no. 10(53), pp. 2324–2334, DOI: 10.1109/TAC.2008.2006821.
- Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A. *IFAC-PapersOnLine*, 2019, no. 16(52), pp. 837–842, DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.067.
- Francis B., Sebakhy O.A., Wonham W.M. *Applied Mathematics and Optimization*, 1974, no. 1(1), pp. 64–86, DOI: 10.1007/BF01449024.
- Borisov O.I., Pyrkin A.A., Isidori A. *IFAC-PapersOnLine*, 2020, no. 2(53), pp. 4881–4886, DOI: 10.1016/j.ifacol.2020.12.1056.

**Data on authors**

- Oleg I. Borisov** — PhD; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics;  
E-mail: borisov@itmo.ru
- Mikhail A. Kakanov** — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems  
and Robotics; E-mail: makakanov@itmo.ru
- Andrey Yu. Zhivitckii** — Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics;  
E-mail: zhivitckii@itmo.ru
- Anton A. Pyrkin** — Dr. Sci., Professor; ITMO University, Faculty of Control Systems and  
Robotics; E-mail: pyrkin@itmo.ru

**For citation:** Borisov O. I., Kakanov M. A., Zhivitckii A. Yu., Pyrkin A. A. Robust tracking control of a quadcopter by output based on the geometric approach. *Journal of Instrument Engineering*. 2021. Vol. 64, N 12. P. 982—992 (in Russian).

DOI: 10.17586/0021-3454-2021-64-12-982-992