

**АЛГОРИТМ ИЗМЕРЕНИЯ УГЛОВ ПОВОРОТА ОБЪЕКТА  
АВТОКОЛЛИМАЦИОННЫМ МЕТОДОМ  
ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ТРИЭДРИЧЕСКОГО ОТРАЖАТЕЛЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГРАНЬЮ**

М. М. Никитин\*, И. А. Коняхин, Ф. Г. Добрых

*Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия*  
*\* nikitinmm96@gmail.com*

**Аннотация.** Предложен алгоритм определения угла поворота контрольного элемента для автоколлимационной системы, использующей отражатель в виде триэдрического контрольного элемента с цилиндрической гранью. Этот тип отражателей используется для определения трехмерного углового пространственного положения объекта. Создана математическая модель отражателя, воспроизводящая взаимодействие излучения с отражателем. На основе получаемых изображений согласно модели разработан алгоритм определения угла поворота контрольного элемента. Алгоритм обеспечивает фильтрацию изображения от шумов; уменьшение толщины линий, находящихся на изображении, для повышения точности определения угла поворота; наложение темной области на центр изображения, для возможности последующей кластеризации линий; непосредственно определение угла поворота линий на изображении для последующего определения угла поворота контрольного элемента. Алгоритм позволяет анализировать картину, получаемую от отражателя, имеющего более одной цилиндрической грани.

**Ключевые слова:** автоколлимационная система, цилиндрическая грань, алгоритм обработки изображения, пространственное угловое положение объекта

**Ссылка для цитирования:** Никитин М. М., Коняхин И. А., Добрых Ф. Г. Алгоритм измерения углов поворота объекта автоколлимационным методом при использовании триэдрического отражателя с цилиндрической гранью // Изв. вузов. Приборостроение. 2022. Т. 65, № 4. С. 262—270. DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-4-262-270.

**ALGORITHM FOR OBJECT ROTATION ANGLES MEASURING  
BY THE AUTOCOLLIMATION METHOD  
USING A TRIHEDRAL REFLECTOR WITH A CYLINDRICAL FACE**

M. M. Nikitin\*, I. A. Konyakhin, F. G. Dobrykh

*ITMO University, St. Petersburg, Russia*  
*\* nikitinmm96@gmail.com*

**Abstract.** An algorithm for determining rotation angle of the control element for autocollimation system using the reflector in the form of a trihedral control element with a cylindrical face is proposed. This type of reflector is used to determine the three-dimensional angular spatial position of an object. A mathematical model of the reflector is created, which reproduces its interaction with the radiation. On the basis of obtained images, according to the model, an algorithm for determining the control element rotation angle is developed. The algorithm provides image filtering from noise; reducing the thickness of the lines on the image to improve the accuracy of determining the angle of rotation; imposition of a dark area on the center of the image, for the possibility of subsequent clustering of lines; directly determining the angle of rotation of the lines on the image for the subsequent determination of the angle of rotation of the control element. The algorithm makes it possible to analyze the pattern obtained from a reflector with more than one cylindrical face.

**Keywords:** autocollimation system, cylindrical surface, image processing algorithm, three-dimensional positioning

**For citation:** Nikitin M. M., Konyakhin I. A., Dobrykh F. G. Algorithm for object rotation angles measuring by the autocollimation method using a trihedral reflector with a cylindrical face. *Journal of Instrument Engineering*. 2022. Vol. 65, N 4. P. 262—270 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2022-65-4-262-270.

**Введение.** Автоколлимационные системы используются для точного нахождения углов поворота [1, 2]. Согласно [3], автоколлимационные системы эффективны при выполнении следующих задач:

- 1) измерение угловых перемещений частей и блоков крупногабаритных сооружений для контроля точности их сопряжения и обеспечения неизменного взаимного положения [4];
- 2) контроль деформаций и прогибов нагруженных элементов промышленных и транспортных сооружений в режиме реального времени [5];
- 3) установка и юстировка оптических компонентов приборов по автоколлимационным точкам [6, 7].

Типовая схема измерения автоколлимационным методом представлена на рис. 1.

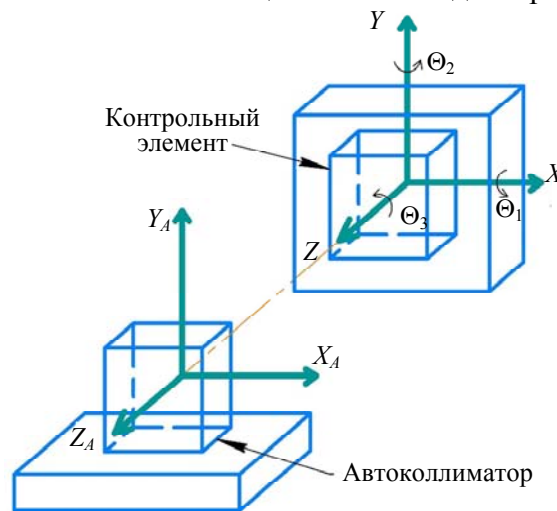


Рис. 1

На базе располагается автоколлиматор с привязанной к нему системой координат  $(X_A Y_A Z_A)$ , а на контролируемом объекте устанавливается контрольный элемент (КЭ) таким образом, чтобы оси его системы координат  $X$  и  $Y$  были параллельны соответствующим осям системы координат автоколлиматора, а  $Z$  совпадала с осью  $Z_A$ . Автоколлиматор измеряет углы поворота КЭ ( $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ ) вокруг соответствующих осей.

При этом для определения пространственного углового положения объекта могут использоваться различные схемы оптико-электронных систем. Например, может быть использован сложный контрольный элемент [8], представляющий собой отдельную оптическую систему со светоделительным кубиком, плоским зеркалом и прямоугольной призмой; могут быть использованы схема, в которой два автоколлиматора расположены под углом  $90^\circ$ , или прямоугольная призма с модифицированным автоколлиматором, содержащим двойное количество матриц, светодиодов и специальных тест-объектов и три светоделительных кубика [9]. Однако существует и иное решение — использование схемы, содержащей один автоколлиматор и один контрольный элемент, представляющий собой триэдрический отражатель с цилиндрической гранью [10, 11]. Использование такого отражателя позволит упростить и одновременно удешевить системы, определяющие пространственное угловое положение объекта, а также преодолеть проблему увеличения дистанции [12], которая ограничивает пределы измерения систем, работающих с отражателем в виде плоского зеркала.

**Математическая модель.** Рассмотрим модель такого контрольного элемента. На рис. 2, а представлена структура отражателя, включающего три отражающие грани. Пусть первая

грань совпадает с координатной плоскостью  $Z_0OX_0$ , вторая — плоскостью  $Z_0OY_0$ , третья грань — цилиндрическая поверхность. Угол между проекцией нормали в плоскость  $X_0OY_0$  и осью  $X_0$  равен  $\alpha$  (рисунку соответствует значение  $45^\circ$ ). На рис. 2, б представлена приборная система координат  $XYZ$ , относительно которой будут измеряться углы поворота.

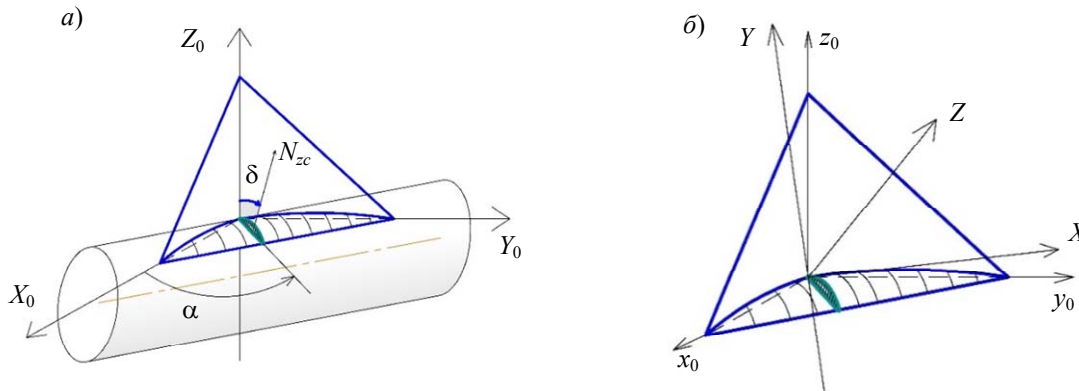


Рис. 2

Матрицы плоских зеркал  $\mathbf{R}_y$ ,  $\mathbf{R}_x$ , соответствующие граням  $Z_0OY_0$  и  $Z_0OX_0$ , так же как и матрица цилиндрической поверхности  $\mathbf{R}_{zc}$ , находятся из формул, приведенных в [13]. Матрица действия отражателя для последовательности отражений 1-2-3 будет иметь вид:

$$\mathbf{R}_{123} = \mathbf{R}_{zc} \cdot \mathbf{R}_y \cdot \mathbf{R}_x.$$

Матрица переноса в приборную систему координат имеет вид:

$$\mathbf{M}_p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Вектор падающего пучка  $\mathbf{A}$  имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы поворота вокруг осей приборной системы координат  $XYZ$  —  $\mathbf{M}_{\Theta 1}$  (вокруг оси  $X$ ),  $\mathbf{M}_{\Theta 2}$  (вокруг оси  $Y$ ),  $\mathbf{M}_{\Theta 3}$  (вокруг оси  $Z$ ) — описаны в [10]. Таким образом, вектор отраженного пучка будет иметь вид:

$$\mathbf{B}_{123\Theta} = \mathbf{M}_{\Theta} \cdot \mathbf{M}_p \cdot \mathbf{R}_{123} \cdot \mathbf{M}_p^T \cdot \mathbf{M}_{\Theta}^T \cdot \mathbf{A},$$

где вместо  $\mathbf{M}_{\Theta}$  подставляется соответствующая матрица поворота.

Аналогично можно найти вектор отраженного пучка для последовательностей 3-2-1, 1-3-2 и 2-3-1 (здесь указаны все действующие последовательности, так как матрицы  $\mathbf{R}_x$ ,  $\mathbf{R}_y$  коммутативны и последовательности 2-1-3, 1-2-3 и 3-1-2, 3-2-1 попарно одинаковы).

Для нахождения координат изображения на матричном анализаторе воспользуемся углами рыскания и тангажа (аналогично [14, с. 221]):

$$\psi = \arcsin(B_y),$$

$$\kappa = \arctg\left(\frac{B_x}{B_z}\right),$$

где  $B_x$ ,  $B_y$ ,  $B_z$  — проекции вектора  $\mathbf{B}_{123\Theta}$  на соответствующие оси.

Зная углы тангажа и рыскания и задав конкретное фокусное расстояние объектива  $f$ , можно найти координаты:

$$Y = ftg\psi, \quad X = ftg\kappa.$$

При  $\alpha = 45^\circ$ ,  $f = 100$  мм и  $\delta = 0—10^\circ$  (угол поворота нормали на рис. 2, а) изображение, создаваемое в плоскости матричного анализатора, будет иметь вид, представленный на рис. 3.

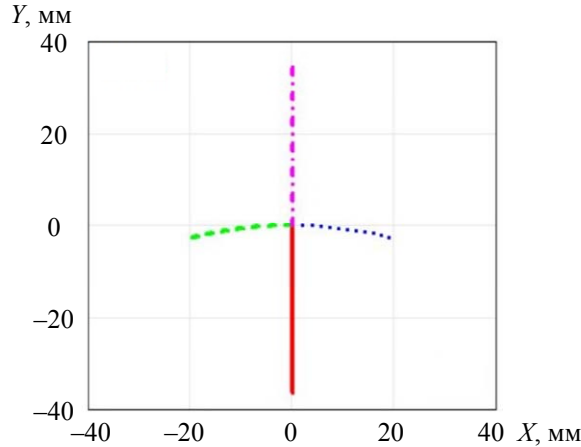


Рис. 3

При этом сплошной кривой соответствуют последовательности 1-2-3 и 2-1-3, штрихпунктирной — 3-2-1 и 3-1-2, штриховой — 1-3-2, а пунктирной — 2-3-1. При различных углах поворота вокруг осей приборной системы координат  $XYZ$  части изображения будут поворачиваться на угол, пропорциональный повороту контрольного элемента так, как описано в статье [15]. Эти линии являются дугами эллипсов [10]. Для измерения угла поворота КЭ воспользуемся конструкцией Брейкенриджа—Маклорена, согласно которой через пять точек на плоскости, любые три из которых не лежат на одной прямой, можно провести коническое сечение, притом только одно. При этом формула для данного конического сечения может быть получена из следующего выражения:

$$\begin{vmatrix} x^2 & xy & y^2 & x & y & 1 \\ p_1^2 & p_1q_1 & q_1^2 & p_1 & q_1 & 1 \\ p_2^2 & p_2q_2 & q_2^2 & p_2 & q_2 & 1 \\ p_3^2 & p_3q_3 & q_3^2 & p_3 & q_3 & 1 \\ p_4^2 & p_4q_4 & q_4^2 & p_4 & q_4 & 1 \\ p_5^2 & p_5q_5 & q_5^2 & p_5 & q_5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

где  $p, q$  — координаты точек  $x, y$  с 1 по 5, а верхняя строчка — коэффициенты перед соответствующими слагаемыми.

Найдя определитель по указанной формуле, можно получить уравнение эллипса в следующем виде:

$$a_1x^2 + a_2xy + a_3y^2 + a_4x + a_5y + 1 = 0,$$

где  $a_1—a_5$  — коэффициенты перед соответствующими слагаемыми.

Таким образом можно найти уравнение эллипса, аппроксимирующего линию на изображении, в частности, горизонтальную, а чтобы вычислить угол поворота  $\xi$  (рис. 3), необходимо провести касательную к данному эллипсу в точке с координатами  $x_0 = 0, y_0 = 0$ . Угол поворота касательной определяется по формуле:

$$\xi = \arctg \left( - \frac{a_1 x_0 + \frac{a_2 y_0 + a_4}{2}}{\frac{a_2 x_0}{2} + \frac{a_5}{2} + a_3 y_0} \right).$$

Чтобы определить угол поворота линии на изображении, разобьем ее на пять фрагментов, затем выберем одну случайную точку в каждом из фрагментов и далее, используя конструкцию Брейкенриджа—Маклорена, найдем коэффициенты в уравнении аппроксимирующей данную кривую эллипса, после чего по формуле определим угол поворота. Как было описано выше, за угол поворота дуги эллипса принимается угол поворота касательной к данному эллипсу в точке пересечения кривых, которая является началом координат (рис. 4). Так можно определить угол поворота обеих линий на изображении.

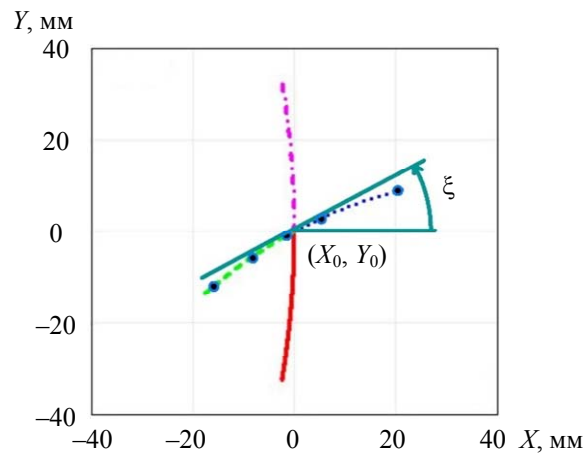


Рис. 4

**Разработка алгоритма.** Если известно, как определять угол поворота кривой на изображении, возможно составить алгоритм обработки этого изображения. На матричном анализаторе имеется зашумленное изображение светящихся линий. Первый этап состоит в применении операции эрозии (рис. 5, *а* — вид изображения до применения, *б* — после применения эрозии).

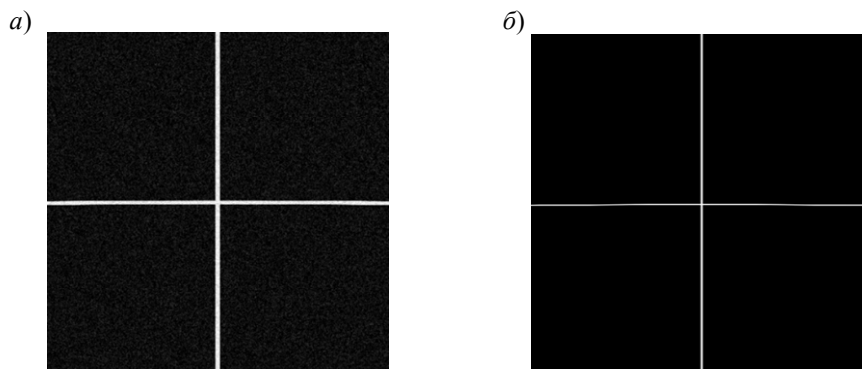


Рис. 5

Данная операция позволит отфильтровать шумы, возникшие на изображении, и одновременно уменьшить толщину линии, что позволит более точно определить угол поворота. В разрабатываемом алгоритме изначальная толщина линии составляет 22 пиксела, после трех итераций операции эрозии с ядром операции  $5 \times 5$  толщина составляет 10 пикселей. Дальнейшее применение эрозии может спровоцировать полное стирание линии на изображении при повороте, этим обуславливается выбор числа итераций.

Далее на центр изображения накладывается темная область. Это сделано для того, чтобы в дальнейшем можно было произвести кластеризацию и разделить линии для анализа каждой из них отдельно (рис. 6, а). После наложения области производится фильтрация изображения и запись данных в массивы координат.

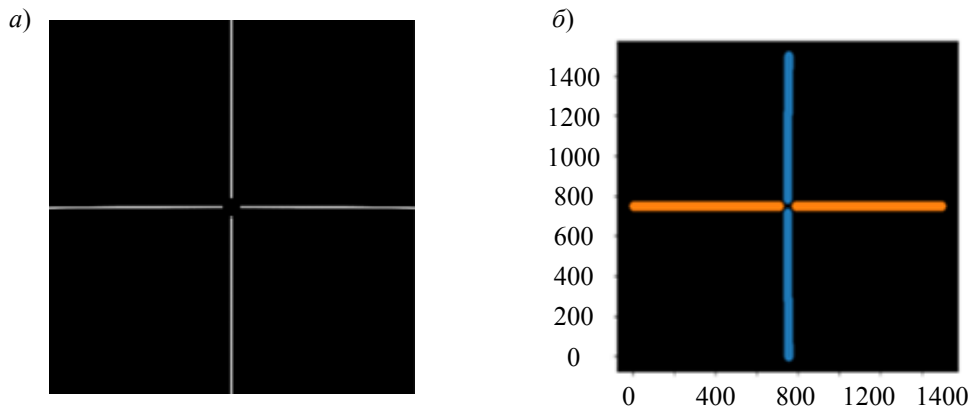


Рис. 6

Затем выполняется кластеризация данных DBSCAN. При использовании кластеризации k-means [16, 17] минимизируется среднее квадратическое отклонение точек от центроидов, и точки линии на изображении оказываются кластеризованы неправильно (при повороте линий часть точек, принадлежащих одной линии, оказываются отнесенными к другой). В отличие от k-means, DBSCAN [18] дает возможность при любом угле поворота определить принадлежность точек заданной линии (рис. 6, б). Применение кластеризации позволяет адаптировать алгоритм для работы с различными конфигурациями цилиндрических граней КЭ (в ситуации, когда изображение состоит больше чем из двух кривых), так как при кластеризации возможно анализировать каждую линию на изображении отдельно.

Следующим шагом является выбор линии для анализа и определения угла ее поворота. Как было описано выше, линия разбивается на пять фрагментов, в которых 10 000 раз выбираются случайные точки и вычисляется угол поворота, после чего выбирается наиболее часто встречающееся значение угла поворота. Данное значение и будет искомым.

**Анализ погрешности работы алгоритма.** При текущей конфигурации цилиндрической поверхности (одна поверхность, угол  $\alpha = 45^\circ$ , см. рис. 2, б) измерение угла  $\Theta_1$  невозможно, так как линии на изображении не поворачиваются. Поэтому рассмотрим зависимости для остальных углов. При измерении угла  $\Theta_3$  линии на изображении повернутся на такой же угол, на который повернут КЭ, так как ось Z перпендикулярна плоскости приемника оптического излучения.

На рис. 7, а приведена зависимость (номинальная) погрешности определения угла поворота  $\Theta_2$  от величины этого угла. Можно предположить, что зависимость аппроксимируется параболой, однако отклонения от параболической зависимости велики, в связи с чем было принято решение аппроксимировать данную зависимость полиномом 10-й степени. Полученная зависимость погрешности определения угла приведена на рис. 7, б. Она имеет случайный характер, так как точки для аппроксимации выбираются случайным образом, однако можно заметить, что разброс увеличивается по мере возрастания угла. Это связано с ошибкой аппроксимации, и для достижения таких значений была выбрана данная степень полинома, так как дальнейшее ее увеличение не приведет к значительным результатам.

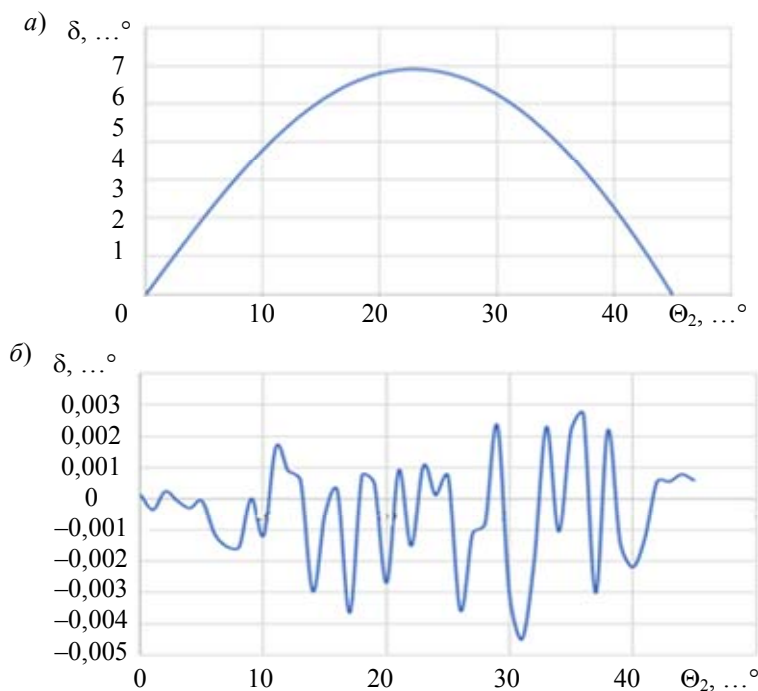


Рис. 7

Следует отметить, что эта зависимость была определена для идеальных условий (точками для вычисления угла поворота являлись координаты, полученные из математической модели КЭ). Рассмотрим теперь погрешность определения углов  $\Theta_2$  и  $\Theta_3$  при работе алгоритма.

На рис. 8 приведены зависимости погрешности измерения углов от их величины. Среднеквадратическое значение погрешности при определении угла  $\Theta_3$  равно  $0,034^\circ$  (а), а при  $\Theta_2$  —  $0,024^\circ$  (б).

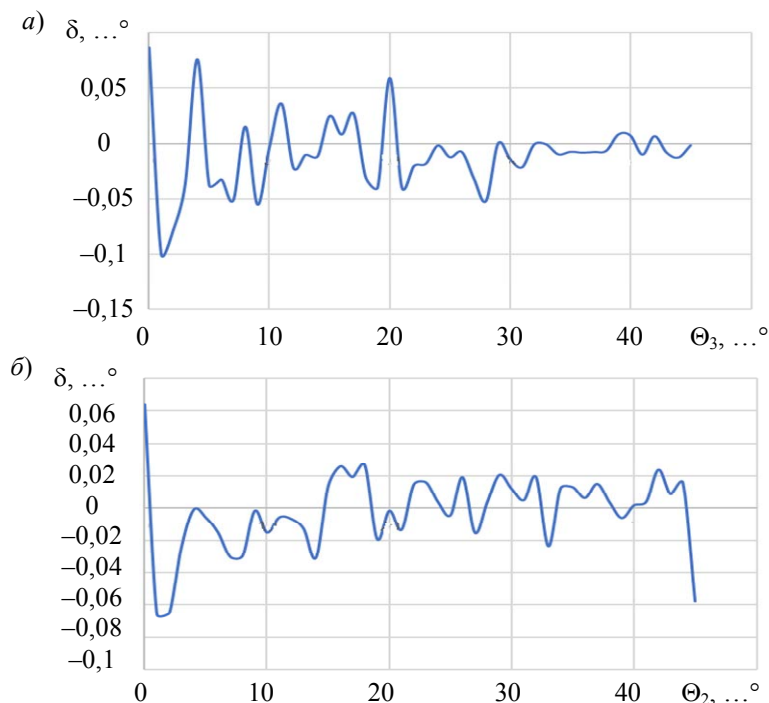


Рис. 8

Для угла  $\Theta_3$  погрешность убывает с его увеличением. Это связано с тем, что при повороте линии ее толщина уменьшается, как это было описано выше. Причина, по которой не наблюдается такой же эффект при измерении угла  $\Theta_2$ , связана с тем, что при определении данного угла также присутствует погрешность аппроксимации.

**Вывод.** В настоящей статье предложен алгоритм измерения угла поворота линии на изображении, позволяющий определить трехмерное угловое положение КЭ автоколлимационной системы. Главным недостатком такого подхода является то, что рассматриваемая модель КЭ позволяет определить только два угла поворота. Для определения третьего угла необходима иная конфигурация цилиндрических поверхностей (состоящая из двух граней и изменяющая изображение так, что на нем появляется еще одна линия, по которой можно измерять угол поворота  $\Theta_1$ ). Однако, как было описано в статье, алгоритм может работать с любым количеством линий, соответственно предложенная модель позволит определить полное трехмерное положение КЭ. А также алгоритм может определять углы поворота вплоть до максимальных значений (согласно [19], при угле поворота порядка  $20^\circ$  облученность картины падает до 30 %, а алгоритм способен измерять углы поворота до  $45^\circ$ ). При сравнении с диапазоном измерения углов трехкоординатного автоколлиматора [9], который составляет  $0,27^\circ$ , становится очевидным преимущество разрабатываемой системы. Перспективным подходом дальнейшей разработки является использование „скелетонизации“ изображения для повышения точности.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аникст Д. А., Костантинович К. М., Меськин И. В., Панков Э. Д. Высокоточные угловые измерения. М.: Машиностроение, 1987. 480 с.
2. Arakantsev K. G., Konyakhin I. A., and Timofeev A. N. Inner-base optoelectronic system for the control of linear displacements // Key Engineering Materials. 2010. N 437. P. 237—241.
3. Коняхин И. А., Мусеева А. А., Хоанг В. Оптико-электронный автоколлиматор для двухкоординатных угловых измерений // Изв. вузов. Приборостроение. 2016. Т. 59, № 7. С. 563—570.
4. Konyakhin I. A., Timofeev A. N., Usik A. A., and Zhukov D. V. Optic-electronic systems for measuring the angle deformations and line shifts of the reflecting elements at the rotatable radio-telescope // Proc. SPIE. 2011. Vol. 8082. P. 80823R.
5. Дефекты и способы контроля направляющих // Оборудование и Ремонт [Электронный ресурс]: <<http://www.webrarium.ru/korpys-remont-napravlayshih.html>>.
6. Ivanov A. V., Ostrun A. B. Improved universal method for a size calculation of centered optical systems // J. of Optical Technology. 2015. Vol. 79. P. 285—288.
7. Wenchang Y., Zhiqian W., Chengwu S., Yusheng L., Shaojin L., Qinwen L., Wen D., and Zhuoda S. Research on Focal Length Measurement Scheme of Self-Collimating Optical Instrument Based on Double Grating // Sensors (Basel). 2020. Vol. 20, N 9. P. 2718. DOI: 10.3390/s20092718.
8. Пат. 2650432 РФ, G 01 B 11/26, G 02 B 27/30. Трехкоординатный фотоэлектрический автоколлиматор / Е. Р. Маламед, М. Н. Сокольский. Заяв. № 20171103573. Опубл. 13.04.2018. Бюл. № 11.
9. Yanhe Y., Sheng C., and Yanfeng Q. Design, fabrication, and verification of a three-dimensional autocollimator // Applied Optics. 2016. Vol. 55, N 35. DOI: 10.1364/AO.55.00998.
10. Okoshi T., Yano A., and Fukumori Y. Curved triple-mirror screen for projection-type three-dimensional display // Applied Optics. 1971. Vol. 10, N 3. P. 482—489.
11. Ханох Б. Ю. Оптические отражатели тетраэдрического типа в активных системах. Мн.: Изд-во БГУ, 1982. 160 с.
12. Konyakhin I. A., Timofeev A. N., Konyakhin A. I. Three-axis optic-electronic autocollimation system for the inspection of large-scale objects // Proc. of SPIE. 2013. Vol. 8788. P. 87882C.
13. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Под ред. И. Г. Арамановича. М.: Наука, 1973. 832 с.
14. Никитин М. М. Проектирование оптико-электронной системы измерения координат точек объекта методом пространственного раstra // Аннотированный сборник научно-исследовательских выпускных квалификационных работ среди бакалавров и специалистов Университета ИТМО. СПб: Университет ИТМО, 2019. С. 217—223.
15. Никитин М. М. Исследование параметров и характеристик автоколлимационной системы при использовании отражателя с цилиндрической гранью // Сб. тр. IX конгр. молодых ученых. СПб, 15—18 апреля 2020 г. 2021. Т. 2. С. 278—283.



16. Старовойтов В. В., Голуб Ю. И. Получение и обработка изображений на ЭВМ. Мн.: БНТУ, 2018. 204 с. ISBN 978-985-550-770-4.
17. Arthur D., Vassilvitskii S. k-means++: The advantages of careful seeding // Proc. of the 18th annual ACM-SIAM symp. on Discrete algorithms. Society for Industrial, Applied Mathematics. 2007. P. 1027—1035.
18. Ester M., Kriegel H.-P., Sander J., and Xu X. A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise // Proc. Intern. Conf. Knowl. Discovery Data Mining. 1996. Vol. 96, N 34. P. 226—231.
19. Vanderverf D. Applied prismatic and reflective optics. Bellingham: SPIE Press, 2010. 296 p.

#### Сведения об авторах

- Михаил Михайлович Никитин** — Университет ИТМО, инженерно-исследовательский факультет; инженер; E-mail: nikitinmm96@gmail.com
- Фёдор Германович Добрых** — Университет ИТМО, факультет цифровых трансформаций; E-mail: d.fedor97@gmail.com
- Игорь Алексеевич Коняхин** — д-р техн. наук, профессор; Университет ИТМО, инженерно-исследовательский факультет; E-mail: igor@grv.ifmo.ru

Поступила в редакцию 10.12.21; одобрена после рецензирования 18.01.22; принята к публикации 28.02.22.

#### REFERENCES

1. Anikst D.A., Kostantinovich K.M., Meskin I.V., Pankov E.D. *Vysokotochnyye uglovyye izmereniya* (High Precision Angle Measurements), Moscow, 1987, 480 p. (in Russ.)
2. Arakantsev K.G., Konyakhin I.A., and Timofeev A.N. *Key Engineering Materials*, 2010, no. 437, pp. 237–241.
3. Konyakhin I.A., Moiseeva A.A., Hoang V. *Journal of Instrument Engineering*, 2016, no. 7(59), pp. 563–570 (in Russ.)
4. Konyakhin I.A., Timofeev A.N., Usik A.A., and Zhukov D.V. *Proc. SPIE*, 2011, vol. 8082, pp. 80823R.
5. <http://www.webrarium.ru/korpys-remont-napravlayshih.html>. (in Russ.)
6. Ivanov A.V., and Ostrun A.B. *J. of Optical Technology*, 2015, vol. 79, pp. 285–288.
7. Wenchang Y., Zhiqian W., Chengwu S., Yusheng L., Shaojin L., Qinwen L., Wen D., and Zhuoda S. *Sensors (Basel)*, 2020, no. 9(20), pp. 2718, DOI:10.3390/s20092718.
8. Patent RU 2650432, G 01 B 11/26, G 02 B 27/30, *Trekhkoordinatnyy fotoelektricheskiy avtokollimator* (Three-coordinate Photoelectric Autocollimator), E.R. Malamed, M.N. Sokolsky, Patent application no. 20717103573, Published 13.04.2018, Bulletin 11. (in Russ.)
9. Yanhe Y., Sheng C., and Yanfeng Q. *Applied Optics*, 2016, no. 35(55), DOI: 10.1364/AO.55.00998.
10. Okoshi T., Yano A., and Fukumori Y. *Applied Optics*, 1971, no. 3(10), pp. 482–489.
11. Khanoh B.Yu. *Opticheskiye otrazhateli tetraedricheskogo tipa v aktivnykh sistemakh* (Optical Reflectors of Tetrahedral Type in Active Systems), Minsk, 1982, 160 p. (in Russ.)
12. Konyakhin I.A., Timofeev A.N., Konyakhin A.I. *Proceedings of SPIE*, 2013, vol. 8788, pp. 87882C.
13. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* (Handbook of Mathematics for Scientists and Engineers), Moscow, 1973, 832 p. (in Russ.)
14. Nikitin M.M. *Annotirovannyi sbornik nauchno-issledovatel'skikh vypusknnykh kvalifikatsionnykh robot sredi bakalavrov i spetsialistov Universiteta ITMO* (Annotated Collection of Research Final Qualification Papers among Bachelors and Specialists of ITMO University), St. Petersburg, 2019, pp. 217–223. (in Russ.)
15. Nikitin M.M. *Sbornik trudov IX kongressa molodykh uchenykh* (Proceedings of the IX Congress of Young Scientists), St. Petersburg, April 15–18, 2020, 2021, vol. 2, pp. 278–283. (in Russ.)
16. Starovoitov V.V., Golub Yu.I. *Polucheniye i obrabotka izobrazheniy na EVM* (Obtaining and Processing Images on a Computer), Minsk, 2018, 204 p., ISBN 978-985-550-770-4. (in Russ.)
17. Arthur D., Vassilvitskii S. *Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, Society for Industrial, Applied Mathematics, 2007, pp. 1027–1035.
18. Ester M., Kriegel H.-P., Sander J., and Xu X. *Proc. Intern. Conf. Knowl. Discovery Data Mining*, 1996, no. 34(96), pp. 226–231.
19. Vanderverf D. *Applied prismatic and reflective optics*, Bellingham, SPIE Press, 2010, 296 p.

#### Data on authors

- Mikhail M. Nikitin** — ITMO University, Faculty of Engineering Research; Engineer; E-mail: nikitinmm96@gmail.com
- Fedor G. Dobrykh** — ITMO University, Faculty of Digital Transformations; E-mail: d.fedor97@gmail.com
- Igor A. Konyakhin** — Dr. Sci, Professor; ITMO University, Faculty of Engineering Research; E-mail: igor@grv.ifmo.ru

Received 10.12.21; approved after reviewing 18.01.22; accepted for publication 28.02.22.