УДК 681.5.015
DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-6-514-518

УПРОЩЕННЫЙ АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОЙ ЛИНЕЙНОЙ РЕГРЕССИИ, СОДЕРЖАЩЕЙ СТЕПЕННЫЕ ФУНКЦИИ ОТ НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА

В. С. Воробьев*, А. А. Бобцов

Университет ИТМО, Санкт-Петербург, Россия
**v.s.vorobyev@yandex.ru*

Аннотация. Рассмотрено классическое линейное регрессионное уравнение, содержащее в левой и правой частях: измеряемый сигнал и сумму из *n* слагаемых, состоящих из произведения неизвестных параметров и известных функций (регрессоров). Отличительной особенностью рассматриваемого уравнения, по сравнению с классическим, является допущение о том, что неизвестные параметры являются нелинейными комбинациями от одного, а именно: каждый из неизвестных параметров является числом, полученным при возведении в степень одного неизвестного параметра. Предлагается новая упрощенная процедура поиска неизвестного параметра, позволяющая, в отличие от широко распространенного метода градиентного спуска, с одной стороны, существенно упростить алгоритм идентификации, а с другой — расширить допущения на регрессоры.

Ключевые слова: *идентификация параметров, линейная регрессия, степенная функция параметра*

Благодарности: статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, грант 2019-0898.

Ссылка для цитирования: *Воробьев В. С., Бобцов А. А.* Упрощенный алгоритм идентификации для классической линейной регрессии, содержащей степенные функции от неизвестного параметра // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 6. С. 514—518. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-6-514-518.

SIMPLIFIED IDENTIFICATION ALGORITHM FOR CLASSICAL LINEAR REGRESSION CONTAINING POWER FUNCTIONS OF UNKNOWN PARAMETER

V. S. Vorobyev*, A. A. Bobtsov

ITMO University, St. Petersburg, Russia
**v.s.vorobyev@yandex.ru*

Abstract. The classical linear regression equation is considered, containing the measured signal in the left part and the sum of terms consisting of the product of unknown parameters and known functions (regressors) in the right part. A distinctive feature of the considered equation from the classical one is the assumption that the unknown parameters are non-linear combinations of one. Namely, each of the unknown parameters is obtained by raising one unknown parameter to a power. The article proposes a new simplified procedure for searching for the unknown parameter, which, unlike the widely used gradient descent method, allows, on the one hand, to significantly simplify the identification algorithm, and, on the other hand, to expand the assumptions for regressors.

Keywords: identification of parameters, linear regression, exponential function of parameter

Acknowledgment: The article was prepared with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, grant 2019-0898.

For citation: Vorobyev V. S., Bobtsov A. A. Simplified identification algorithm for classical linear regression containing power functions of unknown parameter. *Journal of Instrument Engineering.* 2023. Vol. 66, N 6. P. 514—518 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-6-514-518.

Введение. В статье рассматривается задача идентификации неизвестного параметра для линейного регрессионного уравнения вида

$$q(t) = \theta\psi_1(t) + \theta^2\psi_2(t) + \theta^3\psi_3(t) + \cdots + \theta^n\psi_n(t), \tag{1}$$

где θ — неизвестный параметр, $\psi_i(t)$ и $q(t)$ — известные функции времени.

Ставится задача синтеза алгоритма идентификации $\hat{\theta}(t)$, обеспечивающего выполнение целевого условия вида

$$\lim_{t\to\infty}\left|\hat{\theta}(t)-\theta\right|=0. \tag{2}$$

Эта задача может быть решена с использованием классического, хорошо себя зарекомендовавшего, метода градиентного спуска (см., например, [1]):

$$\dot{\hat{\vartheta}}=-\gamma\left(\phi\phi^T\hat{\vartheta}-\phi q\right), \tag{3}$$

где коэффициент или матрица $\gamma>0$, $\phi=\mathrm{col}\{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_n\}$, $\hat{\vartheta}$ — оценка вектора неизвестных параметров $\vartheta=\mathrm{col}\left\{\theta,\theta^2,\cdots,\theta^n\right\}$.

Хорошо известно (см., например, [2—4]), что выражение (2) для алгоритма (3) будет выполнено, если вектор $\phi(t)$ является предельно интегрально невырожденным или удовлетворяет условию незатухающего возбуждения. Поэтому при синтезе алгоритма идентификации $\hat{\theta}(t)$ будем допускать, что $\phi(t)$ удовлетворяет условию незатухающего возбуждения. Также хорошо известно, что метод градиентного спуска не позволяет дать четких методических рекомендаций по выбору γ для обеспечения заданного качества переходных процессов. Иными словами, увеличение γ для векторного случая, с одной стороны, может приводить к ускорению процессов параметрической сходимости, но одновременно с этим возрастает колебательность, и для некоторых $\gamma>\gamma_0$ быстродействие падает с ростом γ.

Однако следует заметить, что подобные проблемы актуальны только для векторного случая, т.е. когда число членов в уравнении (1) два и более. Подобной проблемы удалось избежать с появлением метода DREM (см. [5—7]). Этот метод позволяет из одного уравнения с n неизвестными получить n уравнений с одним неизвестным. В этом случае возможно применение метода градиентного спуска и наращивание быстродействия за счет увеличения γ. Чтобы получить n уравнений с одним неизвестным, в методе DREM использованы $n-1$ специальных операторов (например, оператор $\frac{k}{p+k}$, где $p=\frac{d}{dt}$ и $k>0$), которые позволили получить вместо одного уравнения (1) n уравнений с n неизвестными параметрами. Далее было произведено так называемое микширование, или смешивание, результатом которого стали n уравнений с одним неизвестным параметром.

В подходе, предлагаемом в настоящей статье, показано, что из системы (1), содержащей n неизвестных параметров, за счет ее специфики можно получить уравнение с одним неизвестным параметром θ с меньшим количеством преобразований, по сравнению с методом DREM. Последнее, в свою очередь, позволяет избежать вычислительных затрат на реализацию алгоритма идентификации.

Замечание 1. Может создаваться впечатление, что кажущаяся исключительно математической задача поиска неизвестного параметра θ для уравнения (1) не имеет практического смысла. Однако это не так. В статьях [8, 9] было показано, что модель вида (1) может быть получена при синтезе наблюдателя переменных состояния для магнитной левитационной системы на основе метода PEBO (Parameter Estimation Based Observer [10]). Таким образом, решение поставленной в статье задачи имеет прикладное значение.

Основной результат. Для вывода основного результата рассмотрим уравнение (1), содержащее три неизвестных параметра

$$q_1=\psi_{11}\theta+\psi_{12}\theta^2+\psi_{13}\theta^3. \tag{4}$$

Замечание 2. Следует отметить, что общая методика идентификации n неизвестных параметров выглядит достаточно рутинной и несодержательной. Однако вывод алгоритма идентификации для трех неизвестных параметров с методической точки зрения (обеспечивающей понимание процедуры) кажется наиболее удачным.

Для преобразования уравнения (4) к скалярному (т.е. содержащему только один неизвестный параметр θ) потребуется выполнить два шага.

Шаг № 1. Применим к уравнению (4) оператор $\frac{k}{p+k}$

$$q_2 = \frac{k}{p+k} q_1 = \psi_{21}\theta + \psi_{22}\theta^2 + \psi_{23}\theta^3, \tag{5}$$

где $\psi_{2i} = \frac{k}{p+k}\psi_{1i}$.

Введем новую переменную $\xi_1 = \frac{q_1}{q_2}$, тогда

$$\xi_1 = \frac{q_1}{q_2} = \frac{\psi_{11}\theta + \psi_{12}\theta^2 + \psi_{13}\theta^3}{\psi_{21}\theta + \psi_{22}\theta^2 + \psi_{23}\theta^3} = \frac{\psi_{11} + \psi_{12}\theta + \psi_{13}\theta^2}{\psi_{21} + \psi_{22}\theta + \psi_{23}\theta^2}. \tag{6}$$

Умножив в (6) левую часть на знаменатель правой, получим

$$\xi_1\psi_{21} + \xi_1\psi_{22}\theta + \xi_1\psi_{23}\theta^2 = \psi_{11} + \psi_{12}\theta + \psi_{13}\theta^2. \tag{7}$$

Теперь перенесем в левую часть все известные слагаемые. Тогда для (7) имеем

$$\xi_1\psi_{21} - \psi_{11} = \left(-\xi_1\psi_{22} + \psi_{12}\right)\theta + \left(-\xi_1\psi_{23} + \psi_{13}\right)\theta^2. \tag{8}$$

Поскольку $\xi_1 = \frac{q_1}{q_2}$, то:

$$q_1\psi_{21} - q_2\psi_{11} = \left(-q_1\psi_{22} + q_2\psi_{12}\right)\theta + \left(-q_1\psi_{23} + q_2\psi_{13}\right)\theta^2, \tag{9}$$

Обозначив

$$q_3 = q_1\psi_{21} - q_2\psi_{11},$$
$$\psi_{31} = -q_1\psi_{22} + q_2\psi_{12},$$
$$\psi_{32} = -q_1\psi_{23} + q_2\psi_{13},$$

получим новую регрессию

$$q_3 = \psi_{31}\theta + \psi_{32}\theta^2. \tag{10}$$

Шаг №2. Аналогично шагу № 1 применим к уравнению (10) оператор $\frac{k}{p+k}$

$$q_4 = \frac{k}{p+k} q_3 = \psi_{41}\theta + \psi_{42}\theta^2. \tag{11}$$

Введем новую переменную $\xi_2 = \frac{q_3}{q_4}$, тогда

$$\xi_2 = \frac{q_3}{q_4} = \frac{\psi_{31}\theta + \psi_{32}\theta^2}{\psi_{41}\theta + \psi_{42}\theta^2} = \frac{\psi_{31} + \psi_{32}\theta}{\psi_{41} + \psi_{42}\theta}. \tag{12}$$

Выполнив аналогичные шагу № 1 манипуляции для выражения (12), получим новое уравнение, содержащее один неизвестный параметр

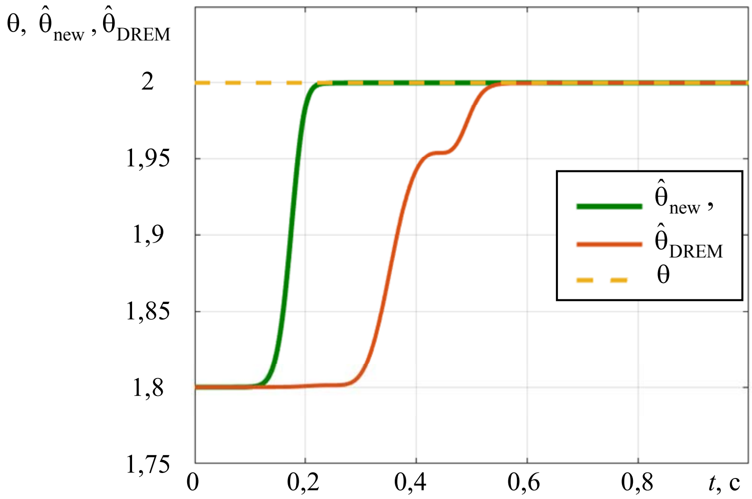
$$\xi_2\psi_{41} - \psi_{31} = \left(-\xi_2\psi_{42} + \psi_{32}\right)\theta \tag{13}$$

или

$$q_5 = \psi_{51}\theta\,, \tag{14}$$

где $q_5 = q_3\psi_{41} - q_4\psi_{31}$, $\psi_{51} = -q_3\psi_{42} + q_4\psi_{32}$.

Пример. Для иллюстрации работоспособности предлагаемого алгоритма идентификации и сравнения его с наиболее успешными аналогами рассмотрим численное моделирование в пакете прикладных программ MatLab. Новый подход к оцениванию неизвестного параметра регрессионной модели (4) сравнивается с методом DREM (см. [5]). Параметры при моделировании выбраны следующим образом: $\psi_{11} = 10\sin 20t$, $\psi_{12} = 7\sin t$, $\psi_{13} = 5$, $\theta = 2$, $\hat{\theta}(0) = 1{,}8$ для обоих методов. В предлагаемом подходе в шагах № 1 и 2 применяется фильтр $\dfrac{1}{p+1}$. В методе DREM используются операторы $\dfrac{3}{p+3}$ и $\dfrac{5}{p+5}$. Оценивание неизвестного параметра в двух подходах производится с помощью метода градиентного спуска (1) с коэффициентом $\gamma = 1$ в обоих случаях. На рисунке представлены результаты оценивания параметра θ регрессии (4): $\hat{\theta}_{\text{new}}$ — предлагаемым в работе алгоритмом идентификации, $\hat{\theta}_{\text{DREM}}$ — методом DREM.



Как видно из графиков переходных процессов, представленных на рисунке, оба метода позволяют достаточно быстро оценить неизвестный параметр $\theta = 2$. Однако можно зафиксировать тот факт, что при одинаковых коэффициентах $\gamma > 0$ (в нашем случае $\gamma = 1$) новый подход дает оценку $\theta = 2$ быстрее чем в два раза. На взгляд авторов, повышение быстродействия происходит за счет использования меньшего количества преобразований (использования фильтров и операторов), в сравнении с методом DREM.

Заключение. В статье рассмотрена задача синтеза алгоритма идентификации для линейного регрессионного уравнения вида (1). Специфика уравнения (1) позволила предложить новую упрощенную процедуру синтеза алгоритма идентификации неизвестного параметра θ, содержащую меньшее число вычислений, по сравнению с методом DREM. Для упрощения понимания процедуры синтеза был рассмотрен случай с $n = 3$, т.е. регрессионная модель вида (4). За два шага уравнение (4), содержащее три неизвестных параметра (θ, θ^2, и θ^3), было преобразовано к скалярному выражению (14), включающему в себя только θ. Компьютерное моделирование продемонстрировало достижение цели (2). Сравнительный анализ переходных процессов показал, что предложенный подход при аналогичных коэффициентах превосходит метод DREM по быстродействию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sastry S., Bodson M.* Adaptive control: stability, convergence, and robustness. Prentice Hall, 1989.
2. *Fradkov A. L., Miroshnik I. V., Nikiforov V. O.* Nonlinear and adaptive control of complex systems. Springer Science & Business Media, 2013. Vol. 491.
3. *Ljung L*. System Identification: Theory for User. New Jersey: Prentice Hall, 1987.
4. *Ioannou P. A., Sun J.* Robust adaptive control. Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice-Hall, 1996. Vol. 1.
5. *Aranovskiy S*. et al. Performance Enhancement of Parameter Estimators via Dynamic Regressor Extension and Mixing // IEEE Transactions on Automatic Control. 2017. Vol. 62, N 7. P. 3546—3550.
6. *Ortega R*. et al. New results on parameter estimation via dynamic regressor extension and mixing: Continuous and discrete-time cases // IEEE Transactions on Automatic Control. 2020. Vol. 66, N 5. P. 2265—2272.
7. *Wang J.* et al. Fixed-time estimation of parameters for non-persistent excitation // European Journal of Control. 2020. Vol. 55. P. 24—32.
8. *Bobtsov A., Pyrkin A., Ortega R., Vedyakov A., Sinetova M.* Sensorless control of the levitated ball // IFAC-PapersOnLine. 2019. Vol. 52, N 29. P. 274—279.
9. *Vorobev V., Vedyakov A., Bespalov V., Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R.* State Observer with Relaxed Excitation Conditions with Application to MagLev System // 2021 29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED). IEEE, 2021. P. 1185—1190.
10. *Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S.* A parameter estimation approach to state observation of nonlinear systems // Systems & Control Letters. 2015. Vol. 85. P. 84—94.

Сведения об авторах

Владимир Сергеевич Воробьев — аспирант; Национальный исследовательский университет ИТМО, факультет систем управления и робототехники; E-mail: v.s.vorobyev@yandex.ru

Алексей Алексеевич Бобцов — д-р техн. наук, профессор; Национальный исследовательский университет ИТМО, мегафакультет компьютерных технологий и управления; директор мегафакультета компьютерных технологий и управления Профессор факультета систем управления и робототехники Руководитель Международного научного центра «Нелинейные и адаптивные системы управления»; E-mail: bobtsov@itmo.ru

Поступила в редакцию 06.03.2023; одобрена после рецензирования 14.03.2023; принята к публикации 27.04.2023.

REFERENCES

1. Sastry S., Bodson M. *Adaptive control: stability, convergence, and robustness*, Prentice Hall, 1989.
2. Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. *Nonlinear and adaptive control of complex systems*, Springer Science & Business Media, 2013, vol. 491.
3. Ljung L. *System Identification: Theory for User*, New Jersey, Prentice Hall, 1987.
4. Ioannou P.A., Sun J. *Robust adaptive control*, Upper Saddle River, NJ, PTR Prentice-Hall, 1996, vol. 1.
5. Aranovskiy S. et al. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017, no. 7(62), pp. 3546–3550.
6. Ortega R. et al. IEEE Transactions on Automatic Control, 2020, no. 5(66), pp. 2265–2272.
7. Wang J. et al. *European Journal of Control*, 2020, vol. 55, pp. 24–32.
8. Bobtsov A., Pyrkin A., Ortega R., Vedyakov A., Sinetova M. *IFAC-PapersOnLine*, 2019, no. 29(52), pp.. 274–279.
9. Vorobev V., Vedyakov A., Bespalov V., Pyrkin A., Bobtsov A., Ortega R. *29th Mediterranean Conference on Control and Automation (MED)*, IEEE, 2021, pp. 1185–1190.
10. Ortega R., Bobtsov A., Pyrkin A., Aranovskiy S. *Systems & Control Letters*, 2015, vol. 85, pp. 84–94.

Data on authors

Vladimir S. Vorobev — Post-Graduate Student; ITMO University, Faculty of Control Systems and Robotics; E-mail: v.s.vorobyev@yandex.ru

Alexey A. Bobtsov — Dr. Sci., Professor; ITMO University, School of Computer Technologies and Control, Head of the School; Faculty of Control Systems and Robotics, Professor at the Faculty; International Laboratory of Adaptive and Nonlinear Control Systems, Head of the Lab; E-mail: bobtsov@itmo.ru

Received 06.03.2023; approved after reviewing 14.03.2023; accepted for publication 27.04.2023.