УДК 519.725
DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-7-568-575

ФОРМИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВ ТРОИЧНЫХ ГОЛД-ПОДОБНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ ПЕРЕДАЧИ И ОБРАБОТКИ ЦИФРОВОЙ ИНФОРМАЦИИ

В. Г. Стародубцев*, В. В. Мышко

Военно-космическая академия им. А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург, Россия,
**vgstarod@mail.ru*

Аннотация. Представлены наборы векторов индексов децимации троичных М-последовательностей (МП) с проверочными полиномами $h_{\text{МП}}(x)$ для периодов $N = 3^S – 1 < 20000$, сформированных в конечных полях $GF(3^S)$ ($S = 3, 5, 7, 9$). Наборы включают как известные индексы децимации, так и вновь полученные, позволяющие формировать множества троичных Голд-подобных последовательностей с объемом $N+2$ и низким уровнем значений периодической взаимно корреляционной функции. Для значения $S = 5$ к пяти известным индексам децимации дополнительно получено 4 индекса, для $S = 7$ к семи известным индексам получено 10 индексов децимации, а для $S = 9$ к девяти известным дополнительно получено 9 индексов децимации.

Ключевые слова: *конечные поля, примитивные полиномы, корреляционная функция, М-последовательности, индексы децимации*

Ссылка для цитирования: *Стародубцев В. Г., Мышко В. В.* Формирование множеств троичных Голд-подобных последовательностей для систем передачи и обработки цифровой информации // Изв. вузов. Приборостроение. 2023. Т. 66, № 7. С. 568—575. DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-7-568-575.

FORMATION OF SETS OF TERNARY GOLD-LIKE SEQUENCES FOR DIGITAL INFORMATION TRANSMISSION AND PROCESSING SYSTEMS

V. G. Starodubtsev*, V. V. Myshko

A. F. Mozhaisky Military Space Academy, St. Petersburg, Russia
**vgstarod@mail.ru*

Abstract. Sets of vectors of decimation indices $\mathbf{I_S}(i_{d1}, i_{d2}, ..., i_{dn})$ of ternary M-sequences (MS) with verification polynomials $h_{MP}(x)$ for periods $N = 3^S–1 < 20000$ formed in finite fields $GF(3^S)$ for $S = 3, 5, 7, 9$ are presented. The sets include both the well–known decimation indices and the newly obtained indices that allow formatting sets of ternary Gold-like sequences (GLS) with a volume of N+2 and a low level of values of the periodic cross-correlation function. For the value S = 5, four additional indices were obtained to five known decimation indices, for S = 7, ten decimation indices were added to seven known indices, and for S = 9, nine decimation indices were additionally obtained to nine known indices.

Keywords: finite fields, primitive polynomials, correlation function, M-sequences, decimation indices

For citation: Starodubtsev V. G., Myshko V. V. Formation of sets of ternary Gold-like sequences for digital information transmission and processing systems. *Journal of Instrument Engineering.* 2023. Vol. 66, N 7. P. 568—575 (in Russian). DOI: 10.17586/0021-3454-2023-66-7-568-575.

В современных системах передачи и обработки цифровой информации для повышения помехозащищенности по отношению к преднамеренным помехам широко используются как двоичные, так и недвоичные фазоманипулированные сигналы с расширенным спектром (СРС), формируемые на основе псевдослучайных последовательностей [1, 2]. В системах связи с кодовым многостанционным доступом в настоящее время применяются фазоманипулированные сигналы на основе двоичных последовательностей Голда (ПГ), Касами и др. [3—5].

Переход от двоичных к недвоичным фазоманипулированным СРС на основе троичных Голд-подобных последовательностей (ГПП) определяется тем, что данные конструкции характеризуются увеличением числа множеств сигналов с эквивалентными корреляционными свойствами при сопоставимых периодах. Например, в поле GF(2^6) имеется 6 примитивных полиномов, 6 предпочтительных пар М-последовательностей (МП), для которых можно сформировать 6 множеств ПГ с периодом $N = 63$ и максимальным значением модуля взаимной корреляционной функции (ПВКФ) $|R_{\max}| = 17$. В поле GF(3^4) имеется 8 примитивных полиномов, для которых формируются 8 множеств троичных ГПП с периодом $N = 80$ и $|R_{\max}| = 17$. В поле GF(2^8) для 16 примитивных полиномов можно сформировать 16 множеств ПГ с периодом $N = 255$ и $|R_{\max}| = 31$, а в поле GF(3^5) для 22 примитивных полиномов формируются уже 99 множеств троичных ГПП с периодом $N = 242$ и $|R_{\max}| = 28$.

Также достоинство троичных фазоманипулированных сигналов заключается в том, что при сдвиге на 120° данные сигналы представляют собой эквидистантную систему сигналов [1, 2].

Вопросам формирования множеств двоичных и недвоичных последовательностей с низким уровнем взаимной корреляции посвящено большое количество публикаций [6—13]. Основополагающей является работа [6], в которой представлены результаты по формированию множеств двоичных ПГ с периодом $N = 2^S–1$, трехуровневой ПВКФ с максимальным значением модуля для нечетных S:

$$|R_{\max}| = 2^{1/2}(N+1)^{1/2}+1, \tag{1}$$

и четырехуровневой ПВКФ с максимальным значением модуля для четных S:

$$|R_{\max}| = 2(N+1)^{1/2}+1. \tag{2}$$

В [7] для полей GF(p^S) при нечетных значениях S получены выражения для индексов децимации i_{dk} ($k = 1, 2, 3…$) недвоичных МП, на основе которых определяются предпочтительные пары МП при формирования множеств ГПП с верхней границей взаимной корреляции

$$|R_{\max}| = 1+p^{(S+e)/2}, \tag{3}$$

где e = НОД(S, k) — наибольший общий делитель параметров S и k.

Рассмотрены два варианта вычисления индексов децимации:

$$i_{1dk} = (p^{2k}+1)/2, \tag{4}$$

$$i_{2dk} = p^{2k}–p^k+1. \tag{5}$$

В работе [8] для полей GF(3^S) при простом нечетном S приведено выражение для индекса децимации при формировании множеств ГПП с верхней границей взаимной корреляции $|R_{\max}| = 1+p^{(S+1)/2}$:

$$i_{3d} = 2p^{(S–1)/2}+1. \tag{6}$$

Наряду с поиском предпочтительных пар недвоичных МП большое внимание уделяется вопросам формирования множеств последовательностей, для которых выполняется условие НОД(i_d, $p^S–1$) = 2. В [9, 10] для нечетных значений S и индексов децимации определены верхняя граница для значений взаимной корреляции $|R_{\max}| = 1+(p+1)p^{S/2}/2$ и мощность полученных множеств последовательностей. В [11—13] для четных значений S и индексов децимации, для которых НОД(i_d, $p^S–1$) > 2, также определены мощности множеств и максимальные значения взаимной корреляции. Данные работы позволяют с более общих позиций подойти к формированию недвоичных ГПП.

Целью настоящей статьи — определение в полях GF(3^S) при $S = 3, 5, 7, 9$ полных наборов индексов децимации i_d для формирования множеств ГПП с корреляционными свойствами, удовлетворяющими граничным оценкам, полученным в [7, 8].

Множества троичных ГПП, так же как и множества двоичных ПГ, формируются на основе предпочтительных пар МП. Троичные МП с периодом $N = 3^S – 1$ формируются над конечными полями GF(3^S). Символы d_i, $i = 0…N–1$, МП в каноническом виде определяются выражением [3, 8, 12]

$$d_i = \mathrm{tr}_{S1}(\alpha^i)\,, \tag{7}$$

где $\mathrm{tr}_{S1}(\alpha)$ — функция следа примитивного элемента α из поля GF(3^S) в поле GF(3).

Рассмотрим формирование ГПП для нечетных значений $S = 3, 5, 7, 9$.

Троичные последовательности для $S = 3$ с периодом $N = 3^3–1 = 26$ формируются в конечном поле GF(3^3) с примитивным полиномом $f(x) = x^3+2x+1$. В поле GF(3^3) имеется четыре примитивных полинома $h_1(x) = x^3+2x+1$, $h_5(x) = x^3+2x^2+x+1$, $h_7(x) = x^3+x^2+2x+1$, $h_{17}(x) = x^3+2x^2+1$.

Нижние индексы в полиномах $h_i(x)$ здесь и далее соответствуют минимальным показателям степени корней данных полиномов и равны индексам децимации i_{di} базисной МП с $h_{МП}(x) = h_1(x)$. Все МП в поле GF(3^3) могут быть получены путем децимации символов базисной МП по данным индексам.

Базисная МП с $h_1(x) = x^3+2x+1$ в каноническом виде, т.е. с начальным состоянием $d_0 = \mathrm{tr}_{3,1}\alpha^0 = 0$, $d_1 = \mathrm{tr}_{3,1}\alpha^1 = 0$, $d_2 = \mathrm{tr}_{3,1}\alpha^2 = 2$, формируемая в соответствии с (6), может быть представлена в виде матрицы размерности [8×10]

$$\mathbf{F}_{МП} = \left|\begin{array}{cccccccccc} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|, \tag{8}$$

в которой МП записывается последовательно по строкам.

В табл. 1 приведены значения ПВКФ (и число этих значений на одном периоде) базисной МП вида (8) с полиномом $h_1(x)$ и остальных МП с $h_i(x)$, формируемых путем децимации базисной МП по соответствующим индексам децимации i_{di}.

Таблица 1

Полиномы $h_1(x) – h_i(x)$	Число n значений ПВКФ МП$_1$ и МП$_i$ с периодом N=26 при $R(\tau)$ и $r(\tau)$*									
	–13	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14
	–0,50	–0,38	–0,27	–0,15	–0,04	0,08	0,19	0,31	0,42	0,54
$h_1(x) – h_5(x)$		3			17			6		
$h_1(x) – h_7(x)$		3			17			6		
$h_1(x) – h_{17}(x)$		1	3	6	3	6	3	4		

* Величине $R(\tau)$ соответствуют значения в верхней строке, $r(\tau)$ — в нижней.

Трехуровневой ПВКФ обладают две пары МП: $h_1(x)$ — $h_5(x)$ и $h_1(x)$ — $h_7(x)$. Данные пары называются предпочтительными и могут быть использованы для формирования множеств ГПП [7]. Индекс децимации $i_{d1} = 5$ соответствует выражению (4), а $i_{d2} = 7$ — выражениям (5) и (6).

При замене $h_1(x)$ на $h_5(x)$ и $h_7(x)$ можно получить еще две предпочтительные пары: $h_5(x)$ — $h_{17}(x)$ и $h_7(x)$ — $h_{17}(x)$. Все предпочтительные пары обладают ПВКФ, которая принимает три значения:

$$R(\tau) = [–10(3); –1(17); 8(6)]. \tag{9}$$

На рис. 1 показан график ПВКФ предпочтительной пары МП с $h_5(x)$ — $h_{17}(x)$.

Таким образом, при $S = 3$ вектор индексов децимации для формирования множеств троичных ГПП имеет вид

$$\mathbf{I}_S(i_{d1}, i_{d2}) = \mathbf{I}_3(5, 7),$$

что соответствует результатам, полученным в [7, 8].

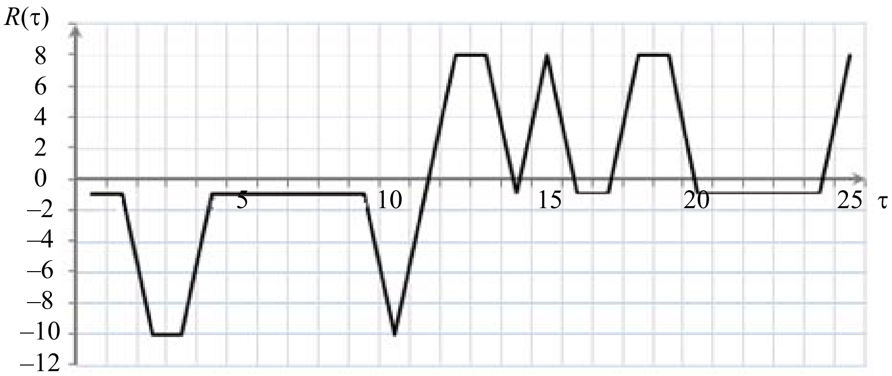

Рис. 1

Для каждой из четырех МП с периодом $N = 3^3–1 = 26$ можно сформировать по два множества ГПП объемом $V_S = V_3 = 28$ с трехуровневой ПВКФ. Число уровней при вычислении взаимной корреляции различных последовательностей множества ГПП может отличаться от значений в выражении (9).

Всего можно сформировать $M_S = M_3 = 4$ множества ГПП с проверочными полиномами $h_{\text{ГПП1}}(x) = h_1(x)\cdot h_5(x)$, $h_{\text{ГПП2}}(x) = h_1(x)\cdot h_7(x)$, $h_{\text{ГПП3}}(x) = h_5(x)\cdot h_{17}(x)$, $h_{\text{ГПП4}}(x) = h_7(x)\cdot h_{17}(x)$.

Реализация устройств формирования множеств троичных ГПП может быть осуществлена как аппаратным, так и программным способом.

При аппаратном способе устройство формирования представляет собой совокупность двух регистров сдвига с линейной обратной связью (РС ЛОС), сумматоры и умножители по mod 3 в цепи обратной связи которых расставляются в соответствии с коэффициентами примитивных полиномов. Ячейками регистра сдвига являются устройства, которые могут находиться в трех состояниях. В одном регистре выставляется фиксированное ненулевое начальное состояние, а во втором регистре для получения всех последовательностей множества поочередно выставляются все возможные начальные состояния. Выходные сигналы регистров поступают на сумматор по mod 3, являющийся выходом устройства. Например, для полинома $h_{\text{ГПП3}}(x) = h_5(x)\cdot h_{17}(x)$ первый регистр формируется в соответствии с полиномом $h_5(x) = x^3+2x^2+x+1$, а второй — в соответствии с $h_{17}(x) = x^3+2x^2+1$.

При программном способе произвольная последовательность множества, например последовательность с $h_{\text{ГПП3}}(x) = h_5(x)\cdot h_{17}(x)$, также образуется посредством суммирования двух МП. Первая МП формируется путем децимации базисной МП с $h_1(x)$ вида (8) по индексу $i_{d1} = 5$ с ее произвольного символа, а вторая МП образуется путем децимации базисной МП по индексу $i_{d2} = 17$ поочередно с ее различных символов. В результате могут быть получены все 28 последовательностей множества троичных ГПП.

В общем случае выражения для ПВКФ и объема множеств ГПП для нечетных значений S имеют следующий вид:

$$R_{\text{ГПП}}(\tau) = [(-3^{(S+1)/2} - 1); -1; (3^{(S+1)/2} - 1)], \tag{10}$$

$$V_S = 3^S+1 = N+2. \tag{11}$$

Троичные последовательности с периодом $N = 3^5–1 = 242$ формируются в конечном поле GF(3^5) с примитивным полиномом $f(x) = h_1(x) = x^5+2x+1$. В поле GF(3^5) имеется 22 примитивных полинома, на основе которых могут быть получены все МП путем децимации базисной МП по индексам: 5, 7, 13, 17, 19, 23, 25, 31, 35, 41, 43, 47, 49, 53, 61, 67, 71, 79, 125, 131, 161.

В соответствии с (4) определены известные индексы децимации $i_{d1} = 5$, $i_{d2} = 41$; в соответствии с (5) — $i_{d3} = 7$, $i_{d4} = 35$, а в соответствии с (6) — $i_{d5} = 19$.

На основе анализа взаимно корреляционных свойств всевозможных пар МП с периодом $N = 242$ были получены 4 новых индекса децимации, позволяющие формировать множества ГПП с трехуровневой ПВКФ и верхней границей взаимной корреляции, удовлетворяющей (3): $i_{d6} = 17$, $i_{d7} = 49$; $i_{d8} = 61$, $i_{d9} = 67$.

Таким образом, при $S = 5$ общий вектор индексов децимации для формирования множеств троичных ГПП имеет вид

$$\mathbf{I}_S(i_{d1}, i_{d2}, ..., i_{d9}) = \mathbf{I}_5(5, 7, 17, 19, 35, 41, 49, 61, 67). \quad (12)$$

Для каждой из 22 МП с периодом $N = 242$ можно сформировать по 9 множеств ГПП объемом $V_5 = 244$, ПВКФ которых принимает три значения:

$$R_{\text{ГПП}}(\tau) = [-28; -1; 26]. \quad (13)$$

Всего можно сформировать $M_S = M_5 = 99$ множеств ГПП с проверочными полиномами $h_{\text{ГПП}i}(x) = h_j(x)\cdot h_k(x)$, где индексы j и k соответствуют индексам примитивных полиномов. Например, если $h_{\text{ГПП}1}(x) = h_1(x)\cdot h_5(x)$, то при замене полинома $h_1(x)$ на произвольный примитивный полином $h_{125}(x) = x^5+x^4+x^2+x+1$, получим проверочный полином десятой степени множества ГПП $h_{\text{ГПП}2}(x) = h_{125}(x)\cdot h_{5\cdot 125 \bmod 242}(x) = h_{125}(x)\cdot h_{141}(x) = h_{125}(x)\cdot h_{47}(x)$. В поле GF($3^5$) выполняется равенство $h_{141}(x) = h_{47}(x) = x^5+2x^3+2x^2+x+1$, так как оба полинома имеют одинаковые корни α^{47}, α^{141}, α^{181}, α^{59}, α^{177}, являющиеся p-сопряженными элементами. Взаимно корреляционная функция двух последовательностей множества ГПП с $h_{\text{ГПП}2}(x)$=$h_{125}(x)\cdot h_{47}(x)$ показана на рис. 2.

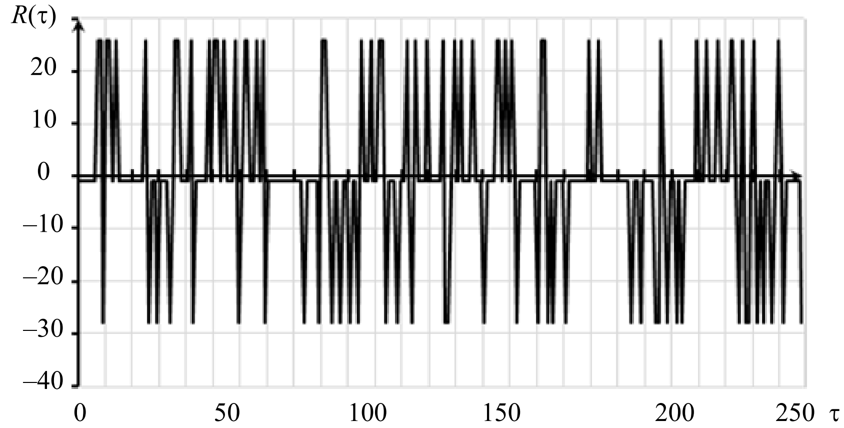

Рис. 2

В общем виде выражения для ПВКФ и объема множеств ГПП с периодом $N = 242$ удовлетворяют выражениям (10) и (11).

Троичные последовательности с периодом $N = 3^7–1 = 2186$ формируются в конечном поле GF(3^7) с полиномом $f(x) = h_1(x) = x^7+x^2+2x+1$. В поле GF($3^7$) имеется 156 примитивных полиномов, на основе которых могут быть получены МП путем децимации базисной МП по соответствующим индексам. В качестве примера приведено по 20 начальных и конечных индексов: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, … 647, 673, 689, 691, 697, 701, 713, 715, 719, 725, 727, 1097, 1103, 1121, 1133, 1187, 1205, 1211, 1367, 1457.

В соответствии с (4) для формирования множеств ГПП определены известные индексы децимации $i_{d1} = 5$, $i_{d2} = 41$, $i_{d3} = 365$, в соответствии с (5) — $i_{d4} = 7$, $i_{d5} = 73$, $i_{d6} = 107$, а в соответствии с (6) — $i_{d7} = 55$.

Анализ взаимно корреляционных свойств различных МП с периодом $N = 2186$ позволил получить 10 новых индексов децимации, на основе которых можно сформировать дополнительные множества ГПП с трехуровневой ПВКФ и верхней границей взаимной корреляции, удовлетворяющей (3). Это индексы 11, 53, 61, 199, 227, 347, 391, 439, 547, 551.

Таким образом, при $S = 7$ общий вектор индексов децимации для формирования множеств троичных ГПП имеет вид

$$\mathbf{I}_S(i_{d1}, i_{d2}, ..., i_{d17}) = \mathbf{I}_7(5, 7, 11, 41, 53, 55, 61, 73, 107,\\ 199, 227, 347, 365, 391, 439, 547, 551). \quad (14)$$

Для каждой из 156 МП с периодом $N = 2186$ можно сформировать по 17 множеств ГПП объемом $V_7 = 2188$, ПВКФ которых принимает три значения:

$$R_{\text{ГПП}}(\tau) = [-82; -1; 80]. \quad (15)$$

Всего можно сформировать $M_S = M_7 = 1326$ множеств троичных ГПП. В качестве примера для $i_{d16} = 547$ приведем полином $h_{\text{ГПП}1}(x) = h_1(x) \cdot h_{547}(x)$ и полином $h_{\text{ГПП}2}(x) = h_{1187}(x) \cdot h_{1187 \cdot 547 \bmod 2186}(x) = h_{1187}(x) \cdot h_{47}(x)$, который получается при замене $h_1(x)$ на произвольный примитивный полином $h_{1187}(x)$.

В общем виде выражения для ПВКФ и объема множеств ГПП с периодом $N = 2186$ также удовлетворяют соотношениям (10) и (11).

Троичные последовательности с периодом $N = 3^9-1 = 19682$ формируются в конечном поле GF(3^9) с полиномом $f(x) = h_1(x) = x^9+x^4+x^2+1$. В поле GF($3^9$) имеется 1008 примитивных полиномов. В качестве примера приведено также по 20 начальных и конечных индексов: 5, 7, 11, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 35, 37, 41, 43, 47, 49, 53, 55, 59, 61, 67, …, 9935, 9953, 9959, 10097, 10115, 10121, 10169, 10175, 10193, 10601, 10607, 10655, 10661, 10691, 10853, 10925, 10931, 12365, 12383, 13121.

В соответствии с (4) были определены известные индексы децимации $i_{d1} = 5$, $i_{d2} = 41$, $i_{d3} = 365$, $i_{d4} = 3281$, в соответствии с (5) — $i_{d5} = 7$, $i_{d6} = 73$, $i_{d7} = 323$, $i_{d8} = 703$, а в соответствии с (6) — $i_{d9} = 163$.

На основе анализа взаимно корреляционных свойств МП получено 9 новых индексов децимации, позволяющих формировать множества ГПП с верхней границей взаимной корреляции, удовлетворяющей (3): i_{di} =19, 161, 1151, 2813, 3047, 3361, 3515, 3937, 4921 ($i = 10, \ldots, 18$), и трехуровневой ПВКФ

$$R_{\text{ГПП}1}(\tau) = [-244; -1; 242]. \quad (16)$$

Отметим, что на основе известных индексов децимации $i_{d3} = 365$ и $i_{d8} = 703$, полученных в соответствии с (4) и (5) при $S = 9$, $k = 3$ и НОД $(S, k) = 3$, формируются множества последовательностей с увеличенным значением $|R_{\max}| = 730$ и трехуровневой ПВКФ, удовлетворяющей (3):

$$R_{\text{ГПП}2}(\tau) = [-730; -1; 728]. \quad (17)$$

Кроме того, было получено 7 новых индексов децимации: 547, 679, 835, 1049, 1979, 2627, 3227, позволяющих формировать множества ГПП с $|R_{\max}| = 728$ и четырехуровневой ПВКФ

$$R_{\text{ГПП}3}(\tau) = [-244; -1; 242, 728]. \quad (18)$$

Таким образом, при $S = 9$ множества троичных ГПП в соответствии с ПВКФ вида (16)—(18) можно разделить на три типа.

Первому типу с ПВКФ вида (16) соответствует вектор индексов децимации

$$\mathbf{I}_{S1}(i_{d1}, i_{d2}, \ldots, i_{d16}) = \mathbf{I}_{9,1}(5, 7, 19, 41, 73, 161, 163, 323, 1151, 2813, \\ 3047, 3281, 3361, 3515, 3937, 4921). \quad (19)$$

Для каждой из 1008 МП с периодом $N = 19682$ можно сформировать по 16 множеств ГПП объемом $V_9 = 19684$, всего можно сформировать 8064 множества ГПП первого типа.

Второму типу с ПВКФ (17) соответствует вектор индексов децимации

$$\mathbf{I}_{S2}(i_{d17}, i_{d18}) = \mathbf{I}_{9,2}(365, 703). \quad (20)$$

Для каждой МП можно сформировать по 2 множества ГПП объемом $V_9 = 19684$, всего можно сформировать 1008 множеств ГПП второго типа.

Третьему типу с ПВКФ (18) соответствует вектор индексов децимации

$$\mathbf{I}_{S3}(i_{d19}, i_{d20}, \ldots, i_{d25}) = \mathbf{I}_{9,3}(547, 679, 835, 1049, 1979, 2627, 3227). \quad (21)$$

Для каждой МП можно сформировать по 7 множеств ГПП, всего можно построить 3528 множеств ГПП третьего типа.

Основные корреляционные и мощностные характеристики множеств ГПП для нечетных значений параметра S приведены в табл. 2.

Таблица 2

S	N	Индексы децимации		$\lvert R_{\max}\rvert$	Значения уровней ПВКФ	V_S	M_S
		известные	новые				
3	26	5, 7		10	–10, –1, 8	28	4
5	242	5, 7, 19, 35, 41	17, 49, 61, 67	28	–28, –1, 26	244	99
7	2186	5, 7, 41, 55, 73, 107, 365	11, 53, 61, 199, 227, 347, 391, 439, 547, 551	82	–82, –1, 80	2188	1326
9	19682	5, 7, 41, 73, 163, 323, 3281	19, 161, 1151, 2813, 3047, 3361, 3515, 3937, 4921	244	–244, –1, 242	19684	8064
9	19682	365, 703		730	–730, –1, 728	19684	1008
9	19682		547, 679, 835, 1049, 1979, 2627, 3227	728	–244, –1, 242, 728	19684	3528

Таким образом, в работе получены полные наборы индексов децимации i_{di} для формирования множеств троичных ГПП с корреляционными свойствами, удовлетворяющими граничным оценкам, полученным в [7, 8]. Наборы, представленные в виде векторов индексов децимации $\mathbf{I}_S(i_{di})$ в соответствии с выражениями (12), (14), (19)—(21), включают как известные, так и вновь полученные индексы, позволяющие формировать новые множества троичных ГПП как с трехуровневой, так и четырехуровневой ПВКФ.

Полученные множества троичных ГПП могут быть использованы в системах передачи и обработки цифровой информации в режиме кодового многостанционного доступа при формировании троичных эквидистантных фазоманипулированных сигналов наряду с двоичными сигналами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. М.: Изд. дом „Вильямс“, 2003. 1104 с.
2. *Ипатов В. П.* Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов. Принципы и приложения / Пер. с англ.; Под ред. *В. П. Ипатова*. М.: Техносфера, 2007. 488 с.
3. *Golomb S. W., Gong G.* Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography and Radar. Cambridge Univ. Press, 2005. 438 p.
4. CDMA: прошлое, настоящее, будущее / Под ред. *Л. Е. Варакина* и *Ю. С. Шинакова.* М.: МАС, 2003. 608 с.
5. *Yang Y., Tang X.* Generic Construction of Binary Sequences of Period 2N with Optimal Odd Correlation Magnitude Based on Quaternary Sequences of Odd Period N // IEEE Trans. Inform. Theory. 2018. Vol. 64, N 1. P. 384.
6. *Gold R.* Maximal recursive sequences with 3-valued recursive cross-correlation functions // IEEE Trans. Inform. Theory. 1968. Vol. 14, N 1. P. 154.
7. *Trachtenberg H. M.* On the cross-correlation functions of maximal recurring sequences: Ph.D. Dissertation Theses. Univ. Southern California, Los Angeles, CA, 1970.
8. *Dobbertin H., Helleseth T., Kumar P. V., Martinsen H.* Ternary M-sequences with three-valued cross-correlation function: New decimations of Welch and Niho type //IEEE Trans. Inform. Theory. 2001. Vol. 47, N 4. P. 1473.
9. *Muller E. N.* On the cross-correlation of sequences over GF(p) with short periods // IEEE Trans. Inform. Theory. 1999. Vol. 45, N 1. P. 289.
10. *Hu Z., Li X., Mills D., Muller E., Sun W., Williems W., Yang Y., Zhang Z.* On the cross-correlation of sequences with the decimation factor $d=(p^n+1)/(p+1)-(p^n-1)/2$ // Applicable Algebra Eng. Commun. Comput. 2001. Vol. 12. P. 255.
11. *Seo E. Y., Kim Y. S., No J. S., Shin D. J.* Cross-correlation distribution of p-ary m-sequence of period $p^{4k}–1$ and its decimated sequences by $((p^{2k}+1)/2)$ // IEEE Trans. Inform. Theory. 2008. Vol. 54, N 7. P. 3140.

12. *Seo E. Y., Kim Y. S., No J. S., Shin D. J.* Cross-correlation distribution of p-ary m-sequence and its (p+1) decimated sequences with shorter period // IEICE Trans. Fund. Electron., Commun. Comput. Sci. 2007. Vol. E90-A, N 11. P. 2568.

13. *Jang J. W., Kim Y. S., No J. S., Helleseth T.* New family of p-ary sequences with optimal correlation property and large linear span // IEEE Trans. Inform. Theory. 2004. Vol. 50, N 8. P. 1839.

Сведения об авторах

Виктор Геннадьевич Стародубцев — канд. техн. наук, доцент; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра технологий и средств автоматизации обработки и анализа информации космических средств; преподаватель, E-mail: vgstarod@mail.ru

Василий Васильевич Мышко — канд. техн. наук, доцент; ВКА им. А. Ф. Можайского, кафедра технологий и средств автоматизации обработки и анализа информации космических средств; ст. преподаватель, E-mail: vka@mail.ru

Поступила в редакцию 17.03.2023; одобрена после рецензирования 27.03.2023; принята к публикации 31.05.2023.

REFERENCES

1. Sklar B. *Digital Communications: Fundamentals and Applications*, Prentice Hall, 2 edition, 2001, 1079 p.
2. Ipatov V.P. *Spread Spectrum and CDMA. Principles and Applications*, NY, John Wiley and Sons Ltd., 2005, 488 p.
3. Golomb S.W., Gong G. *Signal Design for Good Correlation for Wireless Communication, Cryptography and Radar,* Cambridge University Press, 2005, 438 p.
4. Varakin L.E. and Shinakov Yu.S., ed., *CDMA: proshloye, nastoyashcheye, budushcheye* (CDMA: Past, Present, Future), Moscow, 2003, 608 p. (in Russ.)
5. Yang Y., Tang X. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2018, no. 1(64), pp. 384.
6. Gold R. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1968, no. 1(14), pp. 154.
7. Trachtenberg H.M. *On the cross-correlation functions of maximal recurring sequences*, Candidate's thesis, Univ. Southern California, Los Angeles, CA, 1970.
8. Dobbertin H., Helleseth T., Kumar P.V., Martinsen H. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2001, no. 4(47), pp. 1473.
9. Muller E.N. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 1999, no. 1(45), pp. 289.
10. Hu Z., Li X., Mills D., Muller E., Sun W., Williems W., Yang Y., Zhang Z. *Applicable Algebra Eng. Commun. Comput.*, 2001, vol. 12, p. 255.
11. Seo E.Y., Kim Y.S., No J.S., Shin D.J. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2008, no. 7(54), pp. 3140.
12. Seo E.Y., Kim Y.S., No J.S., Shin D.J. *IEICE Trans. Fund. Electron., Commun. Comput. Sci.,* 2007, no. 11(E90-A), pp. 2568.
13. Jang J.W., Kim Y.S., No J.S., Helleseth T. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 2004, no. 8(50), pp. 1839.

Data on authors

Victor G. Starodubtsev — PhD, Associate Professor; A. F. Mozhaisky Military Space Academy, Department of Technologies and Means of Automation of Processing and Analysis of Space Facilities Information; Lecturer, E-mail: vgstarod@mail.ru

Vasiliy V. Myshko — PhD, Associate Professor; A. F. Mozhaisky Military Space Academy, Department of Technologies and Means of Automation of Processing and Analysis of Space Facilities Information; Senior Lecturer,
E-mail: vka@mail.ru

Received 17.03.2023; approved after reviewing 27.03.2023; accepted for publication 31.05.2023.