ТЕПЛОВЫЕ РЕЖИМЫ И НАДЕЖНОСТЬ ПРИБОРОВ И СИСТЕМ

УДК 536.2

А. Н. Соколов, Н. Н. Тарновский

ТЕПЛОВЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ НЕРАЗЪЕМНЫХ СОЕДИНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

Приведены тепловые и математические модели соединений, в которых температурные поля деталей рассматриваются одномерными, коэффициенты теплопроводности материалов и теплообмена через прослойку от температуры и координат не зависят, теплообмен на наружных поверхностях деталей отсутствует. Получены точные и приближенные для частных случаев формулы, определяющие тепловые сопротивления соединений при одинаковых и противоположных направлениях тепловых потоков, поступающих в соединения и вытекающих из него.

Ключевые слова: *тепловое сопротивление, теплопередача, контактное сопротивление.*

Во многих объектах приборостроения встречаются соединения внахлест деталей, имеющих форму пластин и соосных колец. Детали могут быть соединены болтами или клеем, разделены слоем пасты или тонкой газовой прослойкой. Схематические изображения таких соединений представлены на рис. 1, 2 (*а* — при одинаковом, *б* — при противоположном направлениях потоков, протекающих в обеих пластинах и обоих кольцах — рис. 1 и 2 соответственно).

При выполнении тепловых расчетов приборов необходимо вычислять тепловые сопротивления подобных соединений деталей. Авторам известна одна работа, посвященная расчету теплового сопротивления штыревого электрического разъема [1], конструкция которого подобна соединению деталей, изображенному на рис. 1, *а*.

В настоящей работе рассмотрены тепловые и математические модели соединений внахлест двух пластин и двух колец, разделенных теплопроводящей прослойкой, в которых тепловые потоки протекают в одном или противоположных направлениях.

Получены соотношения, определяющие тепловое сопротивление между деталями с учетом теплообмена через прослойку.

Тепловая модель соединения. Поместим начало координат на торце пластины, на котором задан тепловой поток. Длина общего участка пластин в направлении оси x — L, ширина пластин — H, толщина пластин δ_1 и δ_2, пластины разделены тонкой теплопроводящей прослойкой (см. рис. 1). Для соединения двух колец толщиной δ_1 и δ_2 с внутренним r_1 и внешним радиусом r_2 начало координат поместим на общей оси соединения (см. рис. 2).

Сделаем следующие допущения:

— температурные поля пластин неравномерны только в направлении оси x ($\delta \ll L$, $L \ll H$), колец — только вдоль радиуса;

— наружные поверхности соприкасающихся пластин и колец теплоизолированы;

— коэффициент теплообмена k через прослойку, разделяющую детали, и коэффициенты теплопроводности λ_1 и λ_2 материалов пластин и колец не зависят ни от температуры, ни от координат.

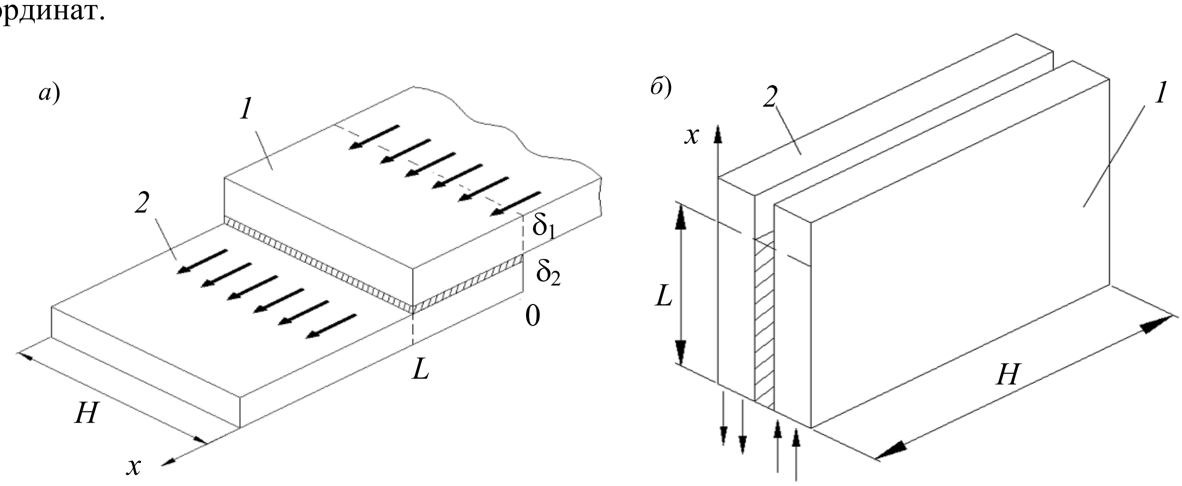

Рис. 1

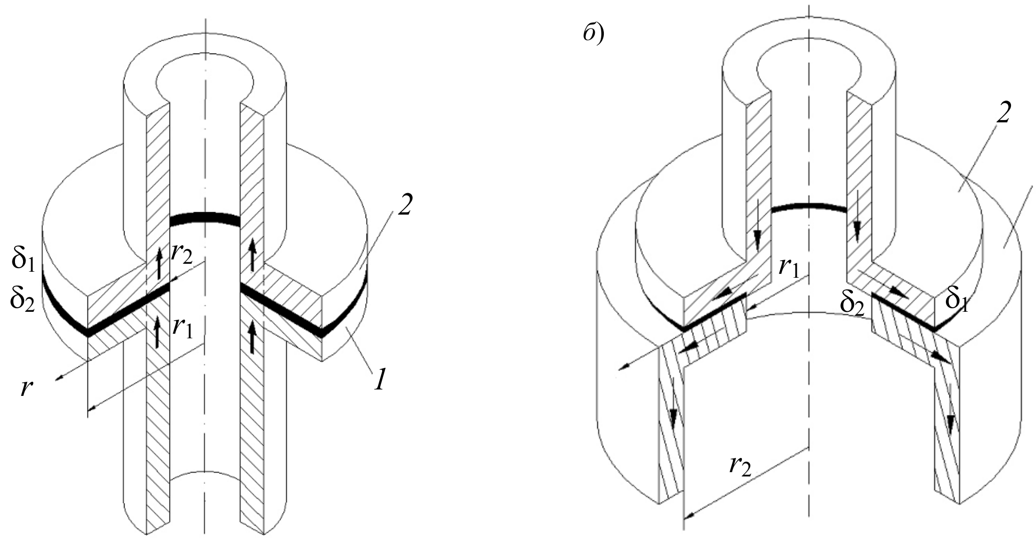

Рис. 2

Математическая модель соединения. Рассмотрев тепловой баланс бесконечно малого элемента соединения, получим систему двух уравнений теплопроводности, описывающих распределение температуры в пластинах и кольцах в области соединения, $t(\eta)$ и $u(\eta)$, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2 t(\eta) - b_1^2[t(\eta) - u(\eta)] = 0, \quad b_1^2 = \frac{k}{\lambda_1 \delta_1}, \\ &\nabla^2 u(\eta) - b_2^2[u(\eta) - t(\eta)] = 0, \quad b_2^2 = \frac{k}{\lambda_2 \delta_2}, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где η — обобщенная координата, которая изменяется в пределах $\eta_1 < \eta < \eta_2$; ∇ — оператор Гамильтона, который для декартовых координат равен $\nabla^2 = \dfrac{d^2}{d\eta^2}$ и $\nabla^2 = \dfrac{d^2}{d\eta^2} + \dfrac{1}{\eta}\dfrac{d}{d\eta}$ — для полярных координат; $t(\eta)$, $u(\eta)$ — распределение температуры в деталях, в которые тепловой поток поступает и из которых вытекает соответственно.

Общее решение системы уравнений (1), полученное операторным методом [2], имеет следующий вид для пластин:

$$t(\eta)=C_1e^{a\eta}+C_2e^{-a\eta}+C_3+C_4\eta,$$
$$u(\eta)=-C_1\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 e^{a\cdot\eta}-C_2\left(\frac{b_2}{b_1}\right)^2 e^{-a\eta}+C_3+C_4\eta, \tag{2}$$

а для колец

$$t(\eta)=A_1\ln(\eta)+A_2+A_3\left(\frac{b_1}{a}\right)^2 I_0(a\eta)+A_4\left(\frac{b_1}{a}\right)^2 K_0(a\eta),$$
$$u(\eta)=A_1\ln(\eta)+A_2-A_3\left(\frac{b_2}{a}\right)^2 I_0(a\eta)-A_4\left(\frac{b_2}{a}\right)^2 K_0(a\eta). \tag{3}$$

Здесь $a=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$; I_0, K_0 — функции Бесселя; C_i, A_i — произвольные постоянные.

Чтобы получить частные решения уравнений пластин (2) и колец (3), рассмотрим граничные условия для двух случаев. В первом случае тепловой поток, входящий в соединение через поперечное сечение первой детали, распространяется вдоль нее, перетекает через границу раздела во вторую деталь и покидает соединение в том же направлении через противоположное сечение второй детали.

Во втором случае тепловой поток, входящий в соединение через поперечное сечение первой детали, распространяется вдоль нее, перетекает через границу раздела во вторую деталь и покидает соединение через сечение второй детали в направлении, противоположном направлению входящего теплового потока.

Граничные условия для пластин и колец запишем в виде:

$$-\lambda_1F_1\left.\frac{dt}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_1}=\Phi,\quad \left.\frac{dt}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_2}=0,\quad \left.\frac{du}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_1}=0,\quad u|_{\eta=\eta_2}=u_0, \tag{4}$$

$$-\lambda_1F_1\left.\frac{dt}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_1}=\Phi,\quad \left.\frac{dt}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_2}=0,\quad \left.\frac{du}{d\eta}\right|_{\eta=\eta_2}=0,\quad u|_{\eta=\eta_1}=u_0, \tag{5}$$

где u_0 — температура на торце; Φ — тепловой поток, поступающий в деталь.

Выражения для C_i, A_i ($i=1,\ 2,\ 3,\ 4$) имеют громоздкий вид, поэтому здесь не приводятся.

Тепловое сопротивление соединения пластин и колец определим как отношение разности температуры торцов, через которые тепловой поток поступает в соединение и вытекает из него, к величине теплового потока, поступающего в соединение.

Для граничных условий, соответствующих двум указанным случаям, тепловые сопротивления определим по формулам:

$$R_{\mathrm{I}}=\frac{t(\eta_1)-u(\eta_2)}{\Phi}, \tag{6}$$

$$R_{\mathrm{II}}=\frac{t(\eta_1)-u(\eta_1)}{\Phi}. \tag{7}$$

При определении значений R_{I} и R_{II} соединений пластин необходимо воспользоваться следующими соотношениями: $\eta = x$, $\eta_1 = 0$, $\eta_2 = L$, $F_1 = \delta_1 H$; для соединений колец $\eta = r$, $\eta_1 = r_1$, $\eta_2 = r_2$, $F_1 = 2\pi\delta_1 r_1$.

Тепловое сопротивление соединения пластин. Выражение для теплового сопротивления соединения пластин при граничных условиях (4), полученное из уравнений (2) и (6), имеет вид:

$$R_{\mathrm{I}} = \frac{L}{\lambda_2 \delta_2 H} \frac{1}{1+\xi} \left[\frac{1}{aL\xi \mathrm{sh}(aL)} \left(\mathrm{ch}(aL) + \xi^2 \mathrm{ch}(aL) + 2\xi \right) + 1 \right]. \tag{8}$$

Выражение для теплового сопротивления соединения пластин при встречном направлении тепловых потоков и граничных условиях (5), вычисленное из уравнений (2) и (7), имеет вид:

$$R_{\mathrm{II}} = \frac{1+\xi}{\lambda_1 \delta_1 H a} \mathrm{cth}(aL). \tag{9}$$

В выражениях (8) и (9) параметр $\xi = \dfrac{b_2^2}{b_1^2} = \dfrac{\lambda_1 \delta_1}{\lambda_2 \delta_2}$ представляет собой отношение удельных тепловых сопротивлений пластин, преодолеваемых тепловым потоком, протекающим вдоль оси *x*.

Выражения для тепловых сопротивлений пластин (8) и (9) можно представить в иной форме, используя соотношение для теплового сопротивления плоской стенки и следующие обозначения:

$$R_1 = \frac{L}{\lambda_1 F_1}, \quad R_2 = \frac{L}{\lambda_2 F_2}, \quad \sigma_k = kS, \tag{10}$$

где $F_1 = \delta_1 H$, $F_2 = \delta_2 H$ — площадь перпендикулярных оси $0x$ поперечных сечений деталей 1 и 2 соответственно; $S = LH$ — площадь соприкосновения деталей.

Параметры R_1 и R_2 определяют тепловые сопротивления пластин между торцами при отсутствии теплообмена на образующих поверхностях; $\sigma_k = \dfrac{1}{R_k}$ определяет тепловую проводимость прослойки между образующими поверхностями пластин.

С учетом (10) выражения (8) и (9) будут иметь вид:

$$R_{\mathrm{I}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \left[\frac{\mathrm{cth}\left(\sqrt{\sigma_k (R_1 + R_2)}\right)}{\sqrt{\sigma_k (R_1 + R_2)}} \left(\left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{R_2}{R_1} \right) + 2\mathrm{sch}\left(\sqrt{\sigma_k (R_1 + R_2)}\right) \right) + 1 \right], \tag{11}$$

$$R_{\mathrm{II}} = (R_1 + R_2) \frac{\mathrm{cth}\left(\sqrt{\sigma_k (R_1 + R_2)}\right)}{\sqrt{\sigma_k (R_1 + R_2)}}. \tag{12}$$

В инженерной практике часто встречаются случаи, когда либо тепловое сопротивление одной пластины много больше сопротивления другой ($R_1 >> R_2$), либо тепловые сопротивления пластин одинаковы ($R_1 = R_2$), либо тепловое сопротивление прослойки мало по сравнению с суммарным тепловым сопротивлением пластин ($R_1 + R_2 >> R_k$). В этих случаях формулы для тепловых сопротивлений можно упростить, их вид приведен в табл. 1.

Таблица 1

Частный случай	R_{I}	R_{II}
$R_1 = R_2 = R_0$	$\dfrac{R_0}{2}\left[\dfrac{\mathrm{cth}\left(\sqrt{\sigma_k \frac{R_0}{2}}\right)}{\sqrt{\sigma_k \frac{R_0}{2}}}+1\right]$	$\sqrt{\dfrac{2R_0}{\sigma_k}}\mathrm{cth}\left(\sqrt{2\sigma_k R_0}\right)$
$R_1 >> R_2$	$\sqrt{\dfrac{R_1}{\sigma_k}}\mathrm{cth}\left(\sqrt{\sigma_k R_1}\right)$	$\sqrt{\dfrac{R_1}{\sigma_k}}\mathrm{cth}\left(\sqrt{\sigma_k R_1}\right)$
$R_1 + R_2 >> R_k$	$\dfrac{1}{R_1+R_2}\left[\dfrac{R_1^2+R_2^2}{\sqrt{\sigma_k\left(R_1+R_2\right)}}+R_1R_2\right]$	$\sqrt{\dfrac{R_1+R_2}{\sigma_k}}$

Приведенные в табл. 1 выражения для тепловых сопротивлений значительно упрощаются в случае, если $\mathrm{cth}(y)=1$, что имеет место при $y>3$.

Формулы, приведенные для случая равенства тепловых сопротивлений пластин, являются точными, для остальных случаев — приближенными.

Тепловое сопротивление соединения колец. Выражения для тепловых сопротивлений соединений колец, R_{I} и R_{II}, в соответствии с формулами (6) и (7) при граничных условиях соответственно (4) и (5) имеют вид:

$$R_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2\pi\lambda_2\delta_2}\frac{1}{1+\xi}\left[\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{1}{aZ}\left(\frac{1}{\xi}\frac{B_1}{r_1}+\frac{2}{ar_1r_2}+\xi\frac{B_2}{r_2}\right)\right],\quad R_{\mathrm{II}}=\frac{a}{2\pi kr_1}\frac{B_1}{Z}, \tag{13}$$

здесь введены следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}B_1&=K_1(ar_2)I_0(ar_1)+I_1(ar_2)K_0(ar_1),\\ B_2&=K_1(ar_1)I_0(ar_2)+I_1(ar_1)K_0(ar_2),\\ Z&=K_1(ar_1)I_1(ar_2)-I_1(ar_1)K_1(ar_2).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Отметим, что при выводе соотношений (13) использовано следующее свойство определителя Вронского W для функций $I_0(ar)$ и $K_0(ar)$ [3]:

$$W\left(I_0(ar),\ \ K_0(ar)\right)=-1/r\,.$$

Выражения для тепловых сопротивлений колец, соединенных внахлест, выразим через критерий Био, которые, следуя [4], определим по формулам:

$$\mathrm{Bi}_1=\frac{k}{\lambda_1\delta_1}r_2^2\,,\quad \mathrm{Bi}_2=\frac{k}{\lambda_2\delta_2}r_2^2\,,\quad \mathrm{Bi}_s=\mathrm{Bi}_1+\mathrm{Bi}_2\,.$$

Преобразуем формулы (13):

$$R_{\mathrm{I}}=\frac{\mathrm{Bi}_1}{2\pi\lambda_2\delta_2\mathrm{Bi}_s}\left[\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{r_2}{Z\sqrt{\mathrm{Bi}_s}}\left(\frac{\mathrm{Bi}_1}{\mathrm{Bi}_2}\frac{B_1}{r_1}+\frac{2}{r_1\sqrt{Bi_s}}+\frac{\mathrm{Bi}_2}{\mathrm{Bi}_1}\frac{B_2}{r_2}\right)\right],\quad R_{\mathrm{II}}=\frac{\sqrt{\mathrm{Bi}_s}}{2\pi kr_1r_2}\frac{B_1}{Z}; \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= K_1\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\right) I_0\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\,\frac{r_1}{r_2}\right) + I_1\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\right) K_0\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\,\frac{r_1}{r_2}\right), \\ B_2 &= K_1\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\,\frac{r_1}{r_2}\right) I_0\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\right) + I_1\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\,\frac{r_1}{r_2}\right) K_0\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\right), \\ Z &= K_1\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\,\frac{r_1}{r_2}\right) I_1\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\right) - I_1\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\,\frac{r_1}{r_2}\right) K_1\left(\sqrt{\mathrm{Bi}_s}\right). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Некоторые частные случаи тепловых сопротивлений колец сведены в табл. 2, при этом коэффициенты B_1, B_2, Z определяются по формулам (16), где $\mathrm{Bi}_s = 2\mathrm{Bi}$.

Таблица 2

Частный случай	R_{I}	R_{II}
$\mathrm{Bi}_1 = \mathrm{Bi}_2 = \mathrm{Bi}$	$\dfrac{1}{4\pi\lambda_2\delta_2}\left[\ln\dfrac{r_2}{r_1} + \dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{Bi}}}\dfrac{r_2}{r_1}\dfrac{B_1}{Z} + \dfrac{r_2}{r_1}\dfrac{1}{Z\mathrm{Bi}} + \dfrac{1}{\sqrt{2\mathrm{Bi}}}\dfrac{B_2}{Z}\right]$	$\dfrac{1}{\pi r_1\sqrt{2\lambda_1\delta_1 k}}\dfrac{B_1}{Z}$
$\mathrm{Bi}_2 >> \mathrm{Bi}_1$ $\mathrm{Bi}_2 > 50$	$\dfrac{1}{2\pi k r_2^2}\left(\mathrm{Bi}_1 \ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right) + \sqrt{\mathrm{Bi}_2}\right)$	$\dfrac{1}{2\pi r_1\sqrt{\lambda_2\delta_2 k}}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Методика расчета теплового сопротивления штыревых электрических разъемов / *Сушко В. Ю., Кораблев В. А., Шарков А. В.* // Изв. вузов. Приборостроение. 2005. Т. 48, № 9. С. 51—54.

2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1961.

3. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.

4. *Дульнев Г. Н., Семяшкин Э. М.* Теплообмен в радиоэлектронных аппаратах. Л., 1969.

Сведения об авторах

Антон Николаевич Соколов — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга; E-mail: dioux@rambler.ru

Николай Николаевич Тарновский — канд. техн. наук; Комета, Санкт-Петербург; ст. научный сотрудник

Рекомендована кафедрой
компьютерной теплофизики
и энергофизического мониторинга

Поступила в редакцию
29.05.08 г.