УДК 519.853.4

А. В. Сысоев

О ПОСТРОЕНИИ СЕМЕЙСТВА МНОЖЕСТВЕННЫХ РАЗВЕРТОК НА ОСНОВЕ КРИВЫХ ПЕАНО ДЛЯ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ГЛОБАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОГО ПОИСКА

Предложена схема построения модифицированной множественной развертки на основе кривых Пеано. Схема позволяет многократно увеличить число используемых процессоров для параллельного решения задач глобально-оптимального поиска.

Ключевые слова: *кривые Пеано, множественная развертка, параллельные вычисления, задачи глобальной оптимизации, модифицированная множественная развертка.*

Отображения, называемые *кривыми* (*развертками*) *Пеано*, сопоставляют любой липшицевой в гиперкубе $P=\left\{v\in R^N:\,-2^{-1}\le v_i\le 2^{-1},\ 1\le i\le N\right\}$ функции $\varphi(y)$ одномерную функцию $\varphi(y(x))$, удовлетворяющую на отрезке [0, 1] равномерному условию Гельдера с показателем $1/N$.

Алгоритм вычисления кривой Пеано с любой заданной точностью подробно описан, например, в работе [1]. Требуемая точность указывается целым числом M (*номер разбиения*), которое определяет допустимую максимальную погрешность оценки каждой координаты кривой $y(x)$ для любого заданного значения аргумента x, равную $2^{-(M+1)}$. Значения точек кривой сопоставляют равномерной с шагом 2^{-NM} сетке на отрезке [0, 1] равномерную с шагом 2^{-M} сетку в гиперкубе P.

Редукция многомерных задач глобальной оптимизации к одномерным с помощью разверток сохраняет непрерывность и равномерную ограниченность разностей при ограниченной вариации аргумента, однако теряет часть информации о близости точек в многомерном пространстве, поскольку у точки x на отрезке [0, 1] имеются две соседние точки, тогда как у соответствующей ей точки $y(x)\in P$ — соседние по 2^N направлениям.

Возможен следующий способ учета этой информации [2]. Вводится гиперкуб

$$P_0=\left\{v\in R^N:\,-2^{-1}\le v_i\le 3\cdot 2^{-1},\ 1\le i\le N\right\} \qquad (1)$$

с длиной ребра, равной двум, и семейство гиперкубов

$$P_l=\left\{v\in R^N:\,-2^{-1}\le v_i+2^{-l}\le 3\cdot 2^{-1},\ 1\le i\le N\right\},1\le l\le L, \qquad (2)$$

где гиперкуб P_{l+1} получается путем сдвига гиперкуба P_l вдоль главной диагонали на шаг -2^{-l} по каждой координате, и для каждого гиперкуба P_l, $0\le l\le L$, вводится своя развертка $y_l(x)$

типа кривой Пеано, отображающая отрезок [0, 1] на этот гиперкуб. Приближенное построение развертки $y_l(x)$ для точности, соответствующей разбиению с номером $M + 1$, порождает в гиперкубе P_l равномерную сетку с шагом 2^{-M} по каждой координате.

Построенная *множественная развертка* позволяет естественным образом организовать параллельную схему поиска глобального оптимума, используя для расчетов с каждой из L разверток отдельный процессор. Однако масштабируемость в этом случае ограничена условием, которое накладывает приближенное построение каждой отдельной развертки, – $L + 1 <= M$. Это означает, что при точности построения развертки $M = 10$ возможно использование только десяти разверток, а значит, только десяти процессоров. Это ограничение существенно сужает возможности применения параллельных вычислений. Для его преодоления в настоящей работе *предложена модификация исходной схемы*, позволяющая строить *семейство множественных разверток*.

Рассмотрим двумерный случай. Левый нижний угол гиперкуба P_0 совпадает с левым нижним углом гиперкуба P. Построим еще три множественные развертки, в каждой из которых положение базового гиперкуба P_0 выбирается так, чтобы у него с гиперкубом P совпадал один из трех оставшихся углов. Нетрудно показать, что все четыре множественные развертки будут обладать одной, и только одной, общей разверткой, задаваемой в каждой из них гиперкубом

$$P_1 = \left\{ v \in R^N : -1 \le v_i \le 1,\ 1 \le i \le N \right\}. \tag{3}$$

Дадим общее описание правила построения каждой множественной развертки для произвольного N. Введем двоичную нумерацию множественных разверток, состоящую из N разрядов:

$$\alpha = \left(\alpha_0, ..., \alpha_{N-1} \right),\ \alpha_i = 0,1. \tag{4}$$

Пусть исходная множественная развертка имеет двоичный номер, в котором все разряды равны нулю. Для построения каждой множественной развертки достаточно задать описание базового гиперкуба P_0 и правила сдвига гиперкубов.

Базовый гиперкуб P_0 для множественной развертки с двоичным номером α будет задаваться как

$$P_0 = \left\{ v \in R^N : -2^{-1} - \alpha_i \le v_i + 2^{-l} \le 3 \cdot 2^{-1} - \alpha_i,\ 1 \le i \le N \right\}, \tag{5}$$

т.е. по тем разрядам, в которых в двоичном номере множественной развертки стоит единица, базовый гиперкуб будет иметь по соответствующим переменным границы $(-3—1) \cdot 2^{-1}$, а по разрядам, равным нулю, границы по переменным будут $(-1—3) \cdot 2^{-1}$.

Смещение остальных гиперкубов $P_1, \ldots, P_L$ в множественной развертке с номером α будет описываться вектором

$$\beta = \left(-2^{-l} \cdot (-1)^{\alpha_0}, ..., -2^{-l} \cdot (-1)^{\alpha_{N-1}} \right), \tag{6}$$

т.е. по переменным, которым в двоичном номере множественной развертки соответствует единица, сдвиг будет выполняться на 2^{-l}, а по остальным на -2^{-l}.

Предложенная в работе модифицированная множественная развертка значительно повышает потенциал использования параллелизма в процессе поиска глобального оптимума. Так, уже для трехмерных задач при точности построения приближения развертки $M = 10$ общее число доступных разверток в семействе множественных разверток составит $M \cdot 2^3 - 1 = 79$. В общем случае для задач размерности N при точности приближенного построения кривых Пеано M максимальное число разверток в семействе множественных разверток равно $M \cdot 2^N - 1$.

Работа выполнена в рамках ФЦП „Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2007—2012 гг.“ и „Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009—2013 гг.“.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Стронгин Р. Г.* Поиск глобального оптимума. М.: Знание, 1990.

2. *Стронгин Р. Г.* Параллельная многоэкстремальная оптимизация с использованием множества разверток // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991. Т. 31, № 8. С. 1173—1185.

Сведения об авторе

Александр Владимирович Сысоев — Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, кафедра математического обеспечения ЭВМ; ассистент; E-mail: sysoyev@vmk.unn.ru

Рекомендована НИИ НКТ

Поступила в редакцию 15.05.11 г.