УДК 681.5

В. В. Григорьев, С. В. Быстров, А. К. Наумова,
Е. Ю. Рабыш, Н. А. Черевко

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ УСЛОВИЙ КАЧЕСТВЕННОЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Получены аналитические выражения оценок прямых показателей качества переходных процессов, позволяющие для непрерывных и дискретных систем, используя достаточные условия качественной экспоненциальной устойчивости, создать эффективные численные процедуры конструирования регуляторов.

***Ключевые слова:*** *экспоненциальная и качественная экспоненциальная устойчивость, оценки качества, конструирование регуляторов, непрерывные и дискретные системы.*

**Введение.** Наиболее сильные аттрактивные свойства положения равновесия системы обеспечиваются при условии экспоненциального затухания переходных процессов. Однако экспоненциальная устойчивость гарантирует только сходимость процессов к состоянию равновесия, но никак не связана с качеством их функционирования. Это обстоятельство обусловливает необходимость определения более локальных условий и понятий устойчивости, связанных с усилением ограничений на динамические свойства системы. Для этого было введено понятие качественной экспоненциальной устойчивости, тесно связанной с такими показателями качества функционирования процессов, как оценки быстродействия и перерегулирования. Это понятие является более узким, чем понятие экспоненциальной устойчивости благодаря введению дополнительных условий, ограничивающих фактически значения скорости изменения вектора состояния системы [1—5].

**Постановка задачи.** Предположим, что поведение непрерывной динамической системы описывается дифференциальным уравнением вида

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \tag{1}$$

а поведение дискретной системы — разностным уравнением вида

$$x(m+1) = Fx(m), \tag{2}$$

где $x \in R^n$ — вектор состояния динамической системы; $x(0) = x_0 \in R^n$ — вектор начальных состояний; $F$ — $n \times n$-матрица описания системы; $t \ge 0$ — время, $m = 0, 1, 2 \ldots$ — номер интервала дискретности.

Приведем определения качественной экспоненциальной устойчивости для непрерывных и дискретных динамических систем [2].

Определение 1. Непрерывная система (1) в положении равновесия $x = 0$ называется качественно экспоненциально $(\beta, r)$ устойчивой, если для любых траекторий движения системы, определяемых произвольными начальными условиями $x_0 \in R^n$, существуют такие параметры $\rho$ $(\rho \ge 1)$, $r$ $(r > 0)$ и $\beta$ $(\beta + r < 0)$, при которых в любой момент времени $t \ge 0$ выполняется условие

$$\left\| x(t) - e^{\beta t} x_0 \right\| \le \rho \left( e^{[\beta + r]t} - e^{\beta t} \right) \cdot \left\| x_0 \right\|, \tag{3}$$

где норма вектора задается соотношением

$$\|x\| = \left[ \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right]^{1/2}, \tag{4}$$

здесь $x_i$ — $i$-я координата вектора состояния $x$.

Определение 2. Дискретная система (2) в положении равновесия $x = 0$ называется качественно экспоненциально $(\beta, r)$ устойчивой, если для любых траекторий движения системы, определяемых произвольными начальными условиями $x_0 \in R^n$, существуют такие параметры $\rho$ $(\rho \ge 1)$, $r$ $(r > 0)$ и $\beta$ $(0 \le \beta < 1 - r)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \ge 0$ выполняется условие

$$\left\| x(m) - \beta^m x_0 \right\| \le \rho \left( (\beta + r)^m - \beta^m \right) \cdot \left\| x_0 \right\|. \tag{5}$$

Параметры $r$ и $\beta$ имеют следующий смысл: параметр $\beta$ подобен коэффициенту сноса и определяет среднюю скорость сходимости траекторий движения к положению равновесия, а параметр $r$ подобен коэффициенту диффузии и определяет отклонения траекторий движения от усредненной траектории.

Из определений 1 и 2 непосредственно следуют оценки динамических показателей качества систем. Отметим, что эти оценки вводятся для оценочных трубок, определяемых условиями качественной экспоненциальной устойчивости, в которых и расположены все траектории движения системы.

Для оценки быстродействия непрерывных и дискретных динамических систем соответственно введем в рассмотрение параметр $\delta_п$, характеризующий некоторую относительную $\delta_п$-окрестность $(\delta_п \le 0,05)$ положения равновесия:

$$\left\| x(t) \right\| \le \delta_п \cdot \left\| x_0 \right\|, \; t \ge t_п; \tag{6}$$

$$\left\| x(m) \right\| \le \delta_п \cdot \left\| x_0 \right\|, \; m \ge t_п / T, \tag{7}$$

а временем переходного процесса непрерывных и дискретных динамических систем соответственно будем называть такой момент времени $t_п$, начиная с которого все траектории движения системы, определяемые начальными условиями $\left\| x_0 \right\|$, лежат в заданной $\delta_п$-окрестности установившегося значения для любого момента времени $t \ge t_п$, т.е. выполняются соотношения (6) и (7) соответственно, где $T$ — интервал квантования.

Под оценкой значения перерегулирования непрерывных и дискретных динамических систем будем понимать величины $\sigma$, определяемые соответственно уравнениями

$$\sigma = \frac{-\min_{t\in[0,\, t_п]} x_м(t)}{\|x_0\|}; \tag{8}$$

$$\sigma = \frac{-\min_{m\in[0,\, t_п/T]} x_м(m)}{\|x_0\|}, \tag{9}$$

где $x_м$ — миноранта $\|x\|$, т.е. функция, ограничивающая снизу текущие значения нормы вектора состояния, так что $x_м \le \|x\|$; перерегулирование косвенно характеризует колебательность процессов в динамической системе.

Ставится задача на основе достаточных условий качественной экспоненциальной устойчивости (3) и (5) для непрерывных и дискретных динамических систем, задаваемых уравнениями (1) и (2) соответственно, определения оценок динамических показателей качества (времени переходного процесса и перерегулирования), которые позволят создать эффективные процедуры аналитического конструирования регуляторов

**Основные результаты.** Для оценки динамических процессов будем использовать квадратичную функцию Ляпунова вида

$$V(x) = x^T P x, \tag{10}$$

где $P = P^T$ — положительно-определенная $n \times n$-матрица.

Для этой функции справедливо соотношение Рэлея:

$$c_1 \|x\|^2 \le V(x) \le c_2 \|x\|^2, \tag{11}$$

где $c_1$ и $c_2$ — минимальное и максимальное собственные числа матрицы $P$ соответственно.

**Теорема 1.** Непрерывная система (1) качественно экспоненциально $(\beta, r)$ устойчива в положении равновесия $x = 0$, если для любых траекторий движения системы, определяемых произвольными начальными условиями $x_0 \in R^n$, существуют такая квадратичная функция Ляпунова $V(x(t))$ и такие параметры $r$ $(r > 0)$ и $\beta$ $(\beta + r < 0)$, при которых в любой момент времени $t \ge 0$ выполняется условие

$$V\left(\frac{d}{dt}x(t) - \beta x(t)\right) \le r^2 V(x(t)). \tag{12}$$

**Теорема 2.** Дискретная система (2) качественно экспоненциально $(\beta, r)$ устойчива в положении равновесия $x = 0$, если для любых траекторий движения системы, определяемых произвольными начальными условиями $x_0 \in R^n$, существуют такая квадратичная функция Ляпунова $V(x(t))$ и такие параметры $r$ $(r > 0)$ и $\beta$ $(0 \le \beta < 1 - r)$, при которых для любого номера интервала дискретности $m \ge 0$ выполняется условие

$$V(x(m+1) - \beta x(m)) \le r^2 V(x(m)). \tag{13}$$

Из теорем 1 и 2 следуют оценки (3) и (5) соответственно [3], при этом

$$\rho = \sqrt{c_2/c_1}\,. \tag{14}$$

***Утверждение 1.*** Оценки показателей качества непрерывных систем имеют следующий вид:

$$t_п = \frac{1}{\beta + r} \ln\left(\frac{\delta_п}{\rho}\right), \tag{15}$$

$$\sigma = \rho e^{\left(\frac{\beta+r}{r}\right)\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right)} - (\rho+1) e^{\left(\frac{\beta}{r}\right)\ln\left(\frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)}\right)}. \tag{16}$$

***Утверждение 2.*** Оценки показателей качества дискретных систем имеют следующий вид:

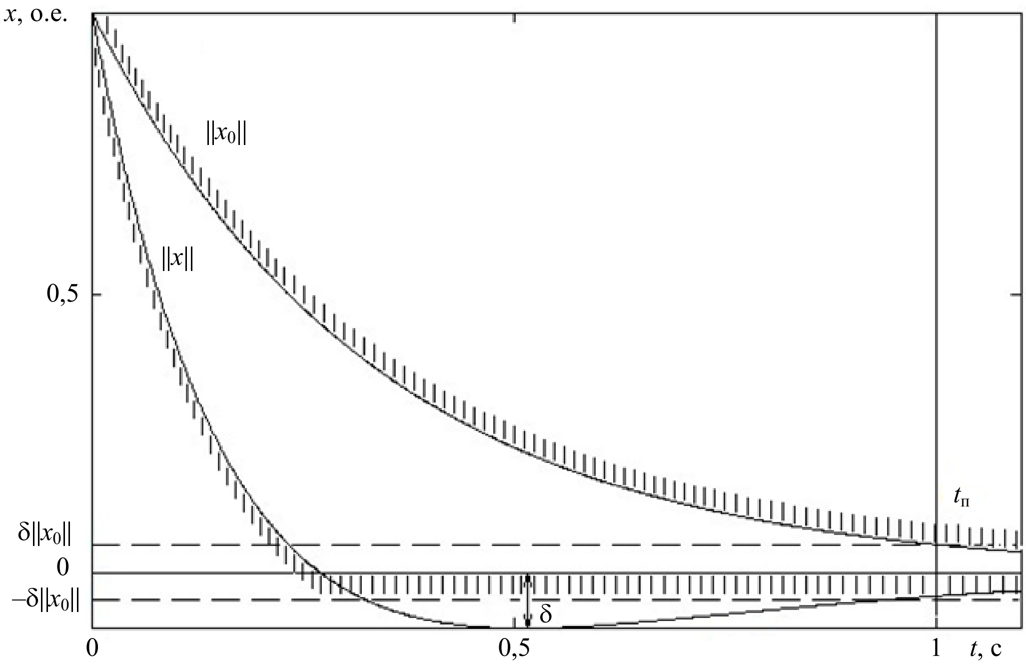
$$t_п = T \log_{(\beta+r)}\left(\frac{\delta_п}{\rho}\right), \tag{17}$$

$$\sigma = \rho(\beta + r)^a - (\rho+1)\beta^a, \tag{18}$$

где $a = \log_{((\beta+r)/r)}\left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta+r)}\right)$.

Доказательство утверждений 1 и 2 см. в Приложении.

**Пример.** При заданных параметрах $\sigma = 0,05,\ t_п = 1,\ \delta_п = 0,05,\ \rho = 1$ исходя из условий качественной экспоненциальной $(\beta, r)$ устойчивости задаются оценочные трубки, вид которых представлен на рисунке. Все траектории системы, исходящие из области начальных значений вектора состояния, лежат внутри оценочных трубок.




**Заключение.** Использование полученных аналитических выражений оценок динамических показателей качества непрерывных и дискретных динамических систем — времени переходных процессов и перерегулирования — совместно с достаточными условиями качественной экспоненциальной устойчивости позволяет создать эффективные процедуры аналитического конструирования регуляторов.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

***Доказательство утверждения 1.*** Согласно определениям условием качественной экспоненциальной $(\beta, r)$ устойчивости (3) непрерывных систем является соотношение

$$\left\| x(t) - e^{\beta t} x_0 \right\| \le \rho \left( e^{[\beta+r]t} - e^{\beta t} \right) \cdot \| x_0 \| . \tag{19}$$

В соответствии со свойствами нормы

$$\left| \| x(t) \| - \left\| e^{\beta t} x_0 \right\| \right| \le \left\| x(t) - e^{\beta t} x_0 \right\| ; \quad \left\| e^{\beta t} x_0 \right\| = e^{\beta t} \| x_0 \| ,$$

откуда, учитывая условие (19), получаем

$$\left| \| x(t) \| - e^{\beta t} \| x_0 \| \right| \le \rho \left( e^{[\beta+r]t} - e^{\beta t} \right) \cdot \| x_0 \| .$$

Отсюда следуют неравенства

$$\| x(t) \| - e^{\beta t} \| x_0 \| \le \rho \left( e^{[\beta+r]t} - e^{\beta t} \right) \cdot \| x_0 \| ; \tag{20}$$

$$\| x(t) \| - e^{\beta t} \| x_0 \| \ge -\rho \left( e^{[\beta+r]t} - e^{\beta t} \right) \cdot \| x_0 \| , \tag{21}$$

получив из которых мажоранту и миноранту соответственно, с учетом условия (6) имеем

$$\delta_{\text{п}} - e^{\beta t} = \rho \left( e^{[\beta+r]t} - e^{\beta t} \right), \tag{22}$$

$$-\delta_{\text{п}} - e^{\beta t} = -\rho \left( e^{[\beta+r]t} - e^{\beta t} \right). \tag{23}$$

Решив уравнение (22) относительно $e^{\beta t}$ и подставив его в (23), получим

$$t_{\text{п}} = t = \frac{1}{\beta + r} \ln \left( \frac{\delta_{\text{п}}}{\rho} \right). \tag{24}$$

Рассмотрим миноранту из неравенства (21):

$$\min_t x_{\text{м}}(t) - e^{\beta t_\sigma} \| x_0 \| = -\rho \left( e^{[\beta+r]t_\sigma} - e^{\beta t_\sigma} \right) \cdot \| x_0 \| , \tag{25}$$

где

$$t_\sigma = \frac{1}{r} \ln \left( \frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)} \right) \tag{26}$$

по сути является временем экстремума функции (25), т.е. временем перерегулирования системы. Подставив уравнения (25) и (26) в выражение (8), получим

$$\sigma = \rho e^{\left(\frac{\beta+r}{r}\right) \ln \left( \frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)} \right)} - (\rho+1) e^{\left(\frac{\beta}{r}\right) \ln \left( \frac{(\rho+1)\beta}{\rho(\beta+r)} \right)} . \tag{27}$$

Равенства (24), (27) соответствуют равенствам (15), (16), что и требовалось доказать.

***Доказательство утверждения 2.*** Согласно определениям условием качественной экспоненциальной $(\beta, r)$ устойчивости (3) для дискретных систем является соотношение

$$\left\| x(m) - \beta^m x_0 \right\| \le \rho \left( (\beta+r)^m - \beta^m \right) \cdot \| x_0 \| . \tag{28}$$

В соответствии со свойствами нормы

$$\left| \| x(m) \| - \left\| \beta^m x_0 \right\| \right| \le \left\| x(m) - \beta^m x_0 \right\| ; \quad \left\| \beta^m x_0 \right\| = \beta^m \| x_0 \| \text{ при } \beta \ge 0 ,$$

откуда, учитывая условие (28), получаем

$$\left| \| x(m) \| - \beta^m \| x_0 \| \right| \le \rho \left( (\beta+r)^m - \beta^m \right) \cdot \| x_0 \| .$$

Отсюда следуют неравенства

$$\left\|x(m)\right\|-\beta^m\left\|x_0\right\|\le\rho\left((\beta+r)^m-\beta^m\right)\cdot\left\|x_0\right\|; \tag{29}$$

$$\left\|x(m)\right\|-\beta^m\left\|x_0\right\|\ge-\rho\left((\beta+r)^m-\beta^m\right)\cdot\left\|x_0\right\|, \tag{30}$$

получив из которых мажоранту и миноранту соответственно, с учетом условия (6) имеем

$$\delta_{\text{п}}-\beta^m=\rho\left((\beta+r)^m-\beta^m\right), \tag{31}$$

$$-\delta_{\text{п}}-\beta^m=-\rho\left((\beta+r)^m-\beta^m\right). \tag{32}$$

Решив уравнение (31) относительно $\beta^m$ и подставив его в (32), с учетом $t=mT$ получим

$$t_{\text{п}}=t=T\cdot\log_{(\beta+r)}\left(\frac{\delta_{\text{п}}}{\rho}\right). \tag{33}$$

Рассмотрим миноранту из неравенства (30):

$$\min_m x_{\text{м}}(m)-\beta^m\left\|x_0\right\|=-\rho\left((\beta+r)^{m_\sigma}-\beta^{m_\sigma}\right)\cdot\left\|x_0\right\|, \tag{34}$$

где

$$m_\sigma=\log_{((\beta+r)/r)}\left(\frac{(\rho+1)\ln\beta}{\rho\ln(\beta+r)}\right)=a \tag{35}$$

по сути является временем экстремума функции (34), т.е. временем перерегулирования системы. Подставив уравнения (34) и (35) в выражение (9), получим

$$\sigma=\rho(\beta+r)^a-(\rho+1)\beta^a. \tag{36}$$

Равенства (33), (36) соответствуют равенствам (17), (18), что и требовалось доказать.

Исследования по рассматриваемой тематике выполнены при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 09-08-00857-а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Григорьев В. В., Дроздов В. Н., Лаврентьев В. В., Ушаков А. В.* Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. Л: Машиностроение, 1983. 245 с.

2. *Григорьев В. В.* Качественная экспоненциальная устойчивость непрерывных и дискретных динамических систем // Изв. вузов. Приборостроение. 2000. Т. 43, № 1—2.

3. *Бойков В. И., Григорьев В. В., Мансурова О. К., Михайлов С. В.* Качественная экспоненциальная стохастическая устойчивость дискретных систем // Там же. 1998. Т. 41, № 7. С. 5—8.

4. *Бобцов А. А., Быстров С. В., Григорьев В. В.* и др. Качественная устойчивость и неустойчивость непрерывных и дискретных динамических систем // Тр. 2-й Рос. мультиконференции по проблемам управления. СПб: ЦНИИ „Электроприбор“, 2008.

5. *Григорьев В. В.* Качественная экспоненциальная устойчивость динамических систем // Тез. Междунар. конф. „Нелинейные науки на рубеже тысячелетий“. СПб: СПбГУ ИТМО, 1999.

***Сведения об авторах***

***Валерий Владимирович Григорьев*** — д-р техн. наук, профессор; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: grigvv@yandex.ru

***Сергей Владимирович Быстров*** — канд. техн. наук, доцент; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики;
E-mail: sbystrov@mail.ru

***Алла Константиновна Наумова*** — канд. техн. наук, доцент; Северо-Западный государственный заочный технический университет, Санкт-Петербург

***Евгений Юрьевич Рабыш*** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: Rabysh@yandex.com

***Николай Александрович Черевко*** — аспирант; Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, кафедра систем управления и информатики; E-mail: epostbox1@mail.ru

Рекомендована кафедрой
систем управления и информатики СПбГУ ИТМО

Поступила в редакцию
18.01.11 г.