

УДК 663.1

## Гидродинамика и теплообмен в условиях свободной конвекции жидкости

Д-р техн. наук **В.Б. Тишин**

д-р техн. наук **А.Г. Новоселов**, dekrsh@mail.ru

**А.А. Федоров**, alex2829735@yandex.ru

Университет ИТМО

191002, Россия, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9

Канд. техн. наук **А.В. Чеботарь**, anvik436@gmail.com

Санкт-Петербургский государственный технологический институт (Технический университет)

190013, Россия, Санкт-Петербург, Московский пр., 26

*Рассмотрено теоретическое решение задачи по установлению профиля скоростей при ламинарном движении жидкости в вертикальном цилиндрическом аппарате в условиях свободной конвекции, обусловленной различием плотности из-за изменения температур в объеме аппарата. Получены два уравнения, описывающие профиль локальной скорости по радиусу аппарата в восходящей и нисходящей зонах движения жидкости. Из условия равенства расходов жидкости в зонах предложен метод поиска радиуса  $r_0$ , определяющего границу между зонами. Показано, что ламинарный режим течения возможен при разности температур на стенке аппарата и в его центре  $\Delta T < 0,01$  град. Полученные зависимости касаются жидкостей с физическими свойствами близкими к воде при условии изменения температуры по радиусу аппарата по линейному закону. В реальных условиях режим течения будет турбулентным. Дано решение задачи теплообмена между стенкой аппарата и жидкостью, в которой развиваются дрожжевые клетки в условиях развитой турбулентности, полуэмпирическим методом, основанным на аналогии между переносом количества движения и теплоты и трехслойной модели турбулентного потока с использованием закона четвертой степени затухания турбулентных пульсаций в пристеночном слое. Для расчета динамической скорости предложено уравнение, в котором за определяющую величину взята удельная тепловая мощность, зависящая от скорости прироста биомассы. Представлена математическая зависимость скорости переноса количества движения и теплоты от скорости протекания биологических процессов в дрожжевых клетках. Полученные теоретические решения требуют дополнительных экспериментальных исследований с целью уточнения численного значения эмпирического коэффициента и профиля температур в поперечном сечении аппарата.*

**Ключевые слова:** свободная конвекция; цилиндрикоконический аппарат; ламинарный и турбулентный режим; профиль скорости; теплообмен; динамическая скорость; удельная мощность.

DOI: 10.17586/2310-1164-2016-9-3-24-31

## Hydrodynamics and heat transfer in free convection conditions

D.Sc. **Vyacheslav B. Tishin**

D.Sc. **Alexander G. Novoselov**, dekrsh@mail.ru

**Alexey A. Fedorov**, alex2829735@yandex.ru

ITMO University

191002, Russia, St. Petersburg, Lomonosov str., 9

Ph.D. **Anastasia V. Chebotar**, anvik436@gmail.com

St. Petersburg State Institute of technology

190013, Russia, St. Petersburg, Moskovsky ave., 26

*The article deals with a theoretical solution for the problem of determining the velocity profile in laminar fluid flow in a vertical cylindrical-conical device under conditions of free convection caused by the difference in density due to temperature changes in the volume of the device. Two equations describing the local velocity profile along the radius of the device in the upstream and downstream areas of fluid motion were obtained. From the condition of equality for the flow rate in the zones a radius search method defining the border between zones was proposed.*

*Computing experiment performed on the basis of these equations shows that the laminar flow regime is possible when the temperature difference on the side of the machine and in the center of is  $< 0.01^\circ$ . This applies to the physical properties of fluids close to water provided that temperature changes along the device radius linearly. The flow regime seems to be turbulent in the real world. To solve the problem of heat exchange between the device wall and the liquid, where yeast cells grow in the conditions of developed turbulence, semi-empirical method was chosen. The method is based on the analogy between the transfer of motion and heat and the turbulent flow three-layer model. For this purpose we used the fourth degree of the of turbulent fluctuations' attenuation in the boundary layer. Solution of heat exchange problems between the wall unit and the liquid in which yeast cells develop in the conditions of developed turbulence is obtained by a semi-empirical method. The method is based on the analogy between the transfer of momentum and heat, and a three-layer model of turbulent flow, using the law of the fourth degree of attenuation of turbulent fluctuations in the boundary layer. To calculate dynamic velocity an equation where specific heat power depending on biomass buildup rate is taken as definiens is used. A mathematical dependence of motion and heat transfer rate on the rate of biological processes in yeast cells is presented.*

*The proposed theoretical solutions require further experimental studies to clarify the numerical value of the empirical coefficient and the temperature profile in the cross section of the device.*

**Keywords:** gravitational convection; cylindrical-conical device; laminar and turbulent regime; velocity profile; heat exchange; dynamic speed; power density.

---

## Введение

Движение жидкости при свободной конвекции обусловлено изменением ее плотности с изменением температуры. Такие течения возникают около поверхностей нагревательных элементов, отопительных приборов, в дымовых трубах и т.п. В пищевой и микробиологической промышленности эти явления имеют место в снабженных тепловой рубашкой аппаратах, в которых протекают процессы с выделением теплоты. В качестве примера можно привести процесс сбраживания пивного суслу в вертикальном цилиндроконическом бродильном аппарате, схематично представленном на рисунке 1.

В процессе брожения дрожжи потребляют субстрат, размножаются, выделяя продукты метаболизма, в частности диоксид углерода, и тепловую энергию, которую для поддержания требуемой температуры приходится постоянно отводить. Для этой цели аппарат снабжен распределенными по высоте несколькими теплообменными секциями (рубашками), в которые подается хладоноситель. Высота аппарата может достигать десяти метров. При таком уровне жидкости абсолютное давление в нижней части аппарата будет примерно в два раза больше, чем в верхней части. Соответственно будет меняться и количество растворенного в жидкости диоксида углерода. Следовательно, развитие дрожжей и протекание процесса брожения в целом по высоте аппарата будут различны. Все это в конечном итоге может отрицательно сказаться на качестве готового пива. Поэтому возникает необходимость в перемешивании среды для выравнивания концентраций продуктов метаболизма дрожжей по высоте аппарата. Перемешивание должно быть щадящим, т.е. без возникновения в среде больших касательных напряжений. Обеспечить такие условия при использовании механических мешалок или циркуляции жидкости насосом невозможно. Здесь более разумным будет применение свободной конвекции.

К сожалению, научные работы, экспериментально или теоретически решающие задачу гидродинамики и теплообмена между жидкостью и стенкой бродильного аппарата в условиях свободной конвекции, нами обнаружены не были. Известны лишь подходы к решению этой задачи, связанные большей частью с движением газов вдоль плоских нагретых поверхностей в условиях свободной конвекции [1, 2]. Отличие нашего решения заключается в том, что оно будет производиться применительно к цилиндрическому аппарату при свободной циркуляции жидкой среды, физические свойства которой в значительной степени отличаются от газообразной среды.

### Объекты и методы исследований

Объектом теоретического исследования будет служить цилиндрикоконический бродильный аппарат, в котором температура жидкости около стенки ниже, чем в центре. Источник тепловой энергии сосредоточим в нижней части аппарата. Им может быть, например, трубчатый электронагреватель, обеспечивающий стационарный нагрев жидкости. В этом случае жидкость, находящаяся около стенки будет двигаться вниз, а в центре аппарата – вверх (рисунок 1). Регулирование скорости движения жидкости по высоте можно осуществлять либо изменением температуры хладоносителя, либо изменением подачи его в теплообменные секции.

### Гидродинамика

В решении задачи по поиску уравнения, описывающего профиль локальных скоростей по радиусу аппарата, мы будем следовать работе [1, с. 305], приняв режим движения жидкости в аппарате ламинарным и распределение температуры по сечению аппарата линейным, т.е.

$$T = \bar{T} - \frac{1}{2} \Delta T \left( \frac{r}{R} \right), \tag{1}$$

где  $T$  и  $\bar{T} = \frac{T_1 + T_2}{2}$  – текущие и средние значения температур, °С соответственно;

$\Delta T = T_1 - T_2$ ,  $T_1$  и  $T_2$  – температуры в центре и на стенке аппарата, °С соответственно;

$r$  – текущий радиус, м;

$R$  – радиус аппарата, м.

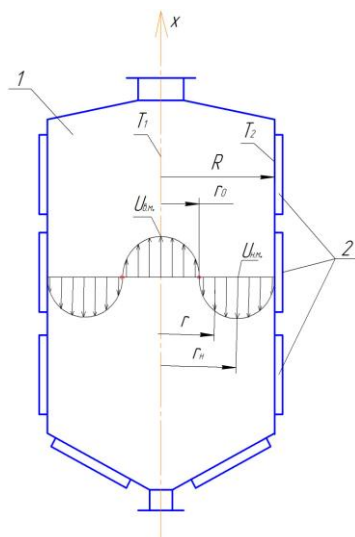


Рисунок 1 – Схема цилиндрикоконического бродильного аппарата:  
1 – бродильный аппарат; 2 – теплообменные секции

Сразу же отметим, что принятие условий ламинарного течения и линейности профиля температуры по живому сечению аппарата на данном этапе вызвано лишь стремлением упростить решение задачи. Следует иметь в виду, что температура в центре аппарата будет определяться мощностью теплового источника, находящегося внутри потоков жидкости. Этим источником являются дрожжевые клетки. В этой связи температурный профиль в аппарате следует искать из уравнения Фурье-Кирхгофа [1, 3] для варианта с движением жидкости при наличии внутреннего источника энергии.

Однако для этого необходимо иметь уравнение, описывающее профиль локальных скоростей по сечению аппарата. Для его вывода воспользуемся уравнением Навье-Стокса. В случае установившегося осесимметричного движения гомогенной жидкости вдоль оси  $x$  под действием массовой силы, силы трения и сил давления оно в цилиндрических координатах будет иметь вид:

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = \frac{dp}{dx} + \rho g, \tag{2}$$

где  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости жидкости, Па·с;

$p$  – гидростатическое давление, Па;

$u_x$  – значение локальной скорости жидкости в направлении движения  $x$ , м/с;

$g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

В уравнении (2) плотность жидкости  $\rho$  является функцией температуры и вычисляется по уравнению:

$$\rho = \bar{\rho}(1 - \beta(T - \bar{T})), \quad (3)$$

где  $\bar{\rho}$  – среднее значение плотности жидкости в аппарате;

$\beta$  – коэффициент объемного расширения жидкости.

Изменение давления по оси  $x$  происходит в результате изменения гидростатического давления, т.е.:

$$\frac{dp}{dx} = -\bar{\rho}g$$

С учетом последнего выражения и равенства (3) уравнение (2) примет вид

$$\mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = -\bar{\rho}g + \bar{\rho}g(1 - \beta(T - \bar{T})). \quad (4)$$

Определив из уравнения (1) разность температур и, подставив ее, в уравнение (4), после несложных преобразований получим

$$d \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = \frac{\bar{\rho}g\beta\Delta T}{2R\mu} r^2 dr. \quad (5)$$

Представим уравнение (5) в следующем виде

$$d \left( r \frac{du_x}{dr} \right) = Ar^2 dr, \quad (6)$$

где:

$$A = \frac{\bar{\rho}g\beta\Delta T}{2\mu R}. \quad (7)$$

Для нахождения профилей локальных скоростей движения жидкости по радиусу аппарата необходимо проинтегрировать равенство (6) дважды при следующих граничных условиях:  $u_x = 0$  при  $r = r_0$  и  $r = R$ ;  $du_x/dx = 0$  при  $r = 0$  и  $r = r_m$ . В результате интегрирования получим два уравнения, описывающие профили локальных скоростей в восходящем и нисходящем потоках (рисунок 1 и 2):

в восходящем потоке

$$u_{xв} = \frac{A}{9} (r_0^3 - r^3), \quad (8)$$

в нисходящем потоке

$$u_{xн} = \frac{A}{9} (r^3 - R^3) + \frac{A}{3} r_m^3 \ln \frac{R}{r}. \quad (9)$$

В уравнениях (8) и (9) необходимо знать значения радиусов  $r_0$  и  $r_m$ .

Нетрудно доказать, что

$$r_m = \frac{R + r_0}{2}. \quad (10)$$

Радиус  $r_0$  находится из условия равенства объемных расходов жидкости в восходящем и нисходящем потоке.

Так как расход жидкости через любое сечение определяется известным уравнением

$$Q = \int_S u_x dS,$$

то после подстановки в него уравнения (8) или (9), значения  $dS$  и соответствующих пределов интегрирования запишем:

$$Q_B = 2\pi \int_0^{r_0} u_{xв} r dr = 2\pi \frac{A}{9} \int_0^{r_0} (r_0^3 - r^3) r dr, \tag{11}$$

$$Q_H = 2\pi \int_{r_0}^R u_{xн} r dr = 2\pi \frac{A}{9} \int_{r_0}^R \left( (r^3 - R^3) + r_m^3 \ln \frac{R}{r} \right) r dr. \tag{12}$$

Значения средних скоростей каждого из потоков находим из уравнения неразрывности потока: для нисходящего потока –  $w_H = Q_H / S_H$ , для восходящего потока –  $w_B = Q_B / S_B$ , где  $S_H$  и  $S_B$  – площади сечений нисходящего и восходящих потоков.

### Результаты и их обсуждение

Рассмотрим конкретный пример движения жидкости в условиях свободной конвекции в аппарате радиусом  $R = 1,5$  м, при разности температур  $\Delta T = 0,25^\circ\text{C}$ . Жидкость обладает следующими физическими свойствами:  $\beta = 0,1 \cdot 10^{-3}$  град $^{-1}$ ,  $\rho = 1000$  кг/м $^3$ ,  $\mu = 1,3 \cdot 10^{-3}$  Па·с.

Для определения радиуса  $r_0$  воспользуемся программой MathCad и подпрограммой:

$$\begin{aligned} r_0 &= 0,0001 \\ \text{Given} \\ 0 &= Q_B \cdot r_0 - Q_H \cdot r_0 \\ r_0 &= \text{MinErr } r_0 \\ r_0 &= 0,927. \end{aligned}$$

Результаты расчетов, представленные на рисунке 2 в виде графического изображения профиля скорости по радиусу аппарата, позволяют сделать определенные выводы.

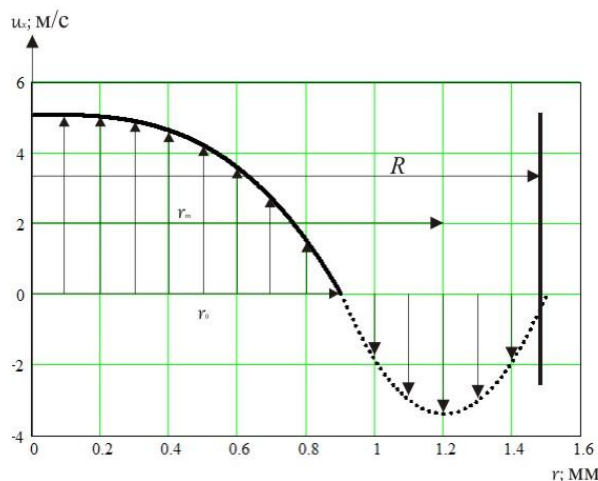


Рисунок 2 – Изменение локальных скоростей по радиусу аппарата  
Линии соответствуют: — уравнению (8); ·· уравнению (9)

Во-первых, средние значения скоростей движения жидкости в восходящем и нисходящем потоках различны ( $w_B = 3,33$  м/с,  $w_H = 2,076$  м/с) и они настолько высоки, что течение не может быть ламинарным. Ламинарный режим возможен при очень малых значениях  $\Delta T$ .

Во-вторых, при турбулентном режиме движения жидкости профиль скорости по сечению потока отличается от профиля при ламинарном течении. Турбулентные потоки, согласно двухслойной модели Прандтля, делятся на две зоны, в которых профили скоростей описываются системой двух уравнений [1, 3]

$$а) \phi = \eta \text{ при } \eta \leq 11,5; \tag{13}$$

$$б) \phi = 5,5 + 2,5 \ln \eta \text{ при } \eta > 11,5,$$

где  $\phi = u_x / u_*$  – безразмерная скорость,  $\eta = r \cdot u_* / \nu$  – безразмерный радиус,  $u_*$  – динамическая скорость.

В связи с указанными обстоятельствами температура по сечению потока не может изменяться по линейному закону. Линейное изменение ее можно принять только в пристенном слое. В турбулентном ядре она изменяется мало, также как и локальная скорость.

В-третьих, при турбулентном режиме движения не будет четкой границы между восходящим и нисходящим потоком, как это предполагается при ламинарном. Здесь мы имеем дело с так называемой свободной турбулентностью, в условиях которой будет постоянно происходить обмен турбулентными вихрями между противоположно направленными потоками. С решением задач процессов переноса при свободной турбулентности рекомендуется обратиться к работе [2, с. 649–675].

Указанные обстоятельства приводят к тому, что радиус  $r_0$ , устанавливающий границу между потоками, будет постоянно меняться. Найти можно лишь его некое усредненное значение  $\bar{r}_0$ . Решение задачи по его определению сильно усложняется. Мы не будем пытаться ее сейчас решать, а наметим лишь путь решения.

Также как и при ламинарном режиме движения,  $\bar{r}_0$  находится из условия равенства расходов  $Q_v$  и  $Q_n$ . Однако входящие в уравнения (11) и (12) значения локальных скоростей  $u_{xv}$  и  $u_{xn}$  следует находить из уравнений (13). Но здесь возникает другая сложность, связанная с определением динамической скорости  $u_*$ . В данном случае можно воспользоваться уравнением [4, с. 68].

$$u_* = \chi \left( \frac{\mu E}{\rho_j^2} \right)^{0,25}, \tag{14}$$

где  $\chi$  – коэффициент пропорциональности, определяемый экспериментально;

$E$  – удельная мощность, Вт/м<sup>3</sup>.

Динамическая скорость является мерой интенсивности турбулентных пульсаций [2, с. 527] и зависит от источника их возникновения. В рассматриваемом нами аппарате источников турбулентности два: касательные напряжения на стенке и относительная скорость движения восходящего и нисходящего потока. Но интенсивность этих источников (при заданной температуре теплообменной поверхности) определяется разностью температур  $\Delta T$ . Последняя, в свою очередь, зависит от удельной тепловой энергии  $E_k$ , выделяемой дрожжевыми клетками в единицу времени в процессе сбраживания суслу. Она рассчитывается по имеющимся в литературе уравнениям.

Например, при культивировании пекарских дрожжей, по данным работы [5], общее количество биологической теплоты, отнесенной к единице массы прироста клеток  $q_m$ , составляет примерно  $4,17 \cdot 10^6$  Дж/кг. Для этого частного случая уравнение для расчета  $E_k$  будет иметь вид:

$$E_k = 4,17 \cdot 10^6 \frac{dx}{dt}. \tag{15}$$

Выбор уравнения для вычисления производной в уравнении (15) зависит от выбора кинетической модели прироста клеток. Если принять экспоненциальный закон развития клеток, то скорость прироста биомассы выразится уравнением

$$\frac{dx}{dt} = x_n \mu_k e^{\mu_k t}, \tag{16}$$

где  $\mu_k$  – удельная скорость прироста биомассы (клеток), зависящая от многих факторов [6, 7];

$x$  – текущая концентрация биомассы в жидкости, кг/м<sup>3</sup>;

$x_n$  – начальное значение концентрация биомассы в жидкости, кг/м<sup>3</sup>;

$t$  – время, ч.

Для пивных дрожжей численный коэффициент в уравнении (15) должен быть иной и определяться экспериментально.

Исходя из указанных соображений, динамическую скорость вычислим по уравнению (14), заменив в нем  $E$  на  $E_k$ . В итоге получим

$$u_* = \chi \left( \frac{\mu E_k}{\rho_{ж}^2} \right)^{0,25} \tag{17}$$

### Теплообмен

Аналитическое решение задачи по теплообмену между стенкой аппарата и жидкостью при естественной конвекции представляет значительные трудности, поэтому в литературе приводятся уравнения для расчета коэффициентов теплообмена в условиях естественной конвекции в критериальном виде [1, с. 308; 3, с. 243]

$$Nu = C(GrPr)^n, \tag{18}$$

где  $C$  и  $n$  – коэффициенты, определяемые экспериментально, приведены в таблице

Таблица – Экспериментально определяемые коэффициенты

Режим движения	$GrPr$	$C$	$n$
ламинарный	500	1,18	0,125
переходный	500 – $2 \cdot 10^7$	0,54	0,25
турбулентный	более $2 \cdot 10^7$	0,135	0,33

В уравнении (18)  $Nu = \bar{\alpha}d_a / \lambda$  – число Нуссельта,  $Gr = g\rho R^2\beta\Delta T / \mu^2$  – критерий Грасгофа, который связан с критерием Рейнольдса зависимостью  $Gr = B \cdot Re$ , коэффициент  $B$  от формы поперечного сечения канала.

Для решения задачи теплообмена между стенкой аппарата и жидкостью при турбулентном режиме движения нами был использован полуэмпирический метод, основанный на трехслойной модели турбулентного потока и закона четвертой степени затухания турбулентных пульсаций в пристеночном слое [3, с. 26]. В критериальном виде конечное уравнение для расчета коэффициента теплоотдачи имеет вид [8, с. 125]:

$$Nu = 0,18\eta_m^{0,95} Pr^{0,33} \tag{19}$$

В уравнении (19) величина максимального масштаба турбулентности  $\eta_m$  рассчитывается по следующему уравнению [8, с. 121]

$$\eta_m = \frac{u_* d_a \rho}{2\mu} \tag{20}$$

Из уравнения (15), (17), (19) и (20) наглядно видна связь гидродинамических условий в аппарате, с коэффициентом теплообмена  $\alpha$  и скоростью выделения дрожжевыми клетками теплоты  $E_k$  в условиях естественной конвекции.

### Выводы

Решена задача по описанию профиля локальных скоростей по радиусу аппарата из условия допущения ламинарного режима движения по высоте аппарата. Предложен путь решения аналогичной задачи в условиях турбулентного режима движения жидкости в условиях свободной конвекции. В этой связи требуются дополнительные исследования как теоретического, так и экспериментального характера: по теплообмену с целью уточнения коэффициента пропорциональности  $\chi$  (в первом приближении его можно принять равным 1,9) в уравнении (17); по уточнению уравнения (19). Данные уравнения наиболее сложны, поскольку связаны не только с исследованием гидродинамики, но и установлением кинетических

закономерностей протекания биологических процессов при брожении. Здесь и гидродинамические, и теплообменные, и массообменные, и биологические процессы взаимосвязаны самым тесным образом.

### *Литература*

1. Коган В.Б. Теоретические основы типовых процессов химической технологии. Л.: Химия, 1977. 591 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
3. Фролов В.Ф. Лекции по курсу «Процессы и аппараты химической технологии». СПб.: Химиздат, 2003, 607 с.
4. Соколов В.Н. Доманский И.В. Газожидкостные реакторы. Л.: Машиностроение, 1976. 278 с.
5. Шишацкий Ю. И., Фёдоров В.А., Остриков С.В. Современные конструкции дрожжерастильных аппаратов и пути повышения эффективности их работы // Дрожжевая промышленность. М.: ЦНИИТЭИпищепром, 1977. 20 с.
6. Арзамасцев А.А. Андреев А.Н. О возможности использования различных моделей кинетики биосинтеза // Биофизика. 2001. Т. 46. № 6. С. 1048–1061.
7. Басканьян И.А. Бирюков В.А., Крылов Ю.М. Математическое описание основных кинетических закономерностей процесса культивирования микроорганизмов // Микробиология. М., 1976. Т. 5, С. 5–75.
8. Тишин В.Б. Культивирование микроорганизмов: кинетика, гидродинамика, тепломассообмен. СПб.: РАПП, 2012. 181 с.

### *References*

1. Kogan V.B. *Teoreticheskie osnovy tipovykh protsessov khimicheskoi tekhnologii* [Theoretical foundations of chemical engineering unit operations]. Leningrad, Himiya Publ., 1977. 591 p.
2. Shlikhting G. *Teoriya pogranchnogo sloya* [The theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 711 p.
3. Frolov V.F. *Lektsii po kursu «Protsessy i apparaty khimicheskoi tekhnologii»* [Lectures on "Processes and devices of chemical technology"]. St. Petersburg, Himizdat Publ., 2003, 607 p.
4. Sokolov V.N. Domanskii I.V. *Gazozhidkostnyye reaktory* [The gas-liquid reactors]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1976, 278 p.
5. Shishatskii Yu. I., Fedorov V.A., Ostrikov S.V. *Sovremennyye konstruktssii drozhzherastil'nykh apparatov i puti povysheniya effektivnosti ikh raboty* [Modern design yeast devices and ways to improve the effectiveness of their work]. *Drozhzhevaya promyshlennost'*. Moscow, TsNIITEI pishcheprom Publ., 1977, 20 p.
6. Arzamastsev A.A. Andreev A.N. *O vozmozhnosti ispol'zovaniya razlichnykh modelei kinetiki biosinteza* [On the possibility of the use of different models of the kinetics of the biosynthesis]. *Biofizika*. 2001, V. 46, no. 6, pp. 1048–1061.
7. Baskan'yan I.A. Biryukov V.A., Krylov Yu.M. *Matematicheskoe opisanie osnovnykh kineticheskikh zakonovnostei protsessa kul'tivirovaniya mikroorganizmov* [The mathematical description of the main genetic patterns of microbial cultivation process. Moscow]. *Mikrobiologiya*. Moscow, 1976, V. 5, pp. 5–75.
8. Tishin V.B. *Kul'tivirovanie mikroorganizmov: kinetika, gidrodinamika, teplomassoobmen* [Cultivation of microorganisms: kinetics, hydrodynamics, heat and mass transfer]. St. Petersburg, RAPP Publ., 2012. 181 p.

*Статья поступила в редакцию 9.08.2016*