УДК 665+602.1:519

Решение задачи механической очистки пищевых сред

Д.т.н. Вороненко Б.А., д.т.н. Пеленко В.В., аспирант Поляков С.В.

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

К.т.н. Марков В.Н.

Всероссийский научно-исследовательский институт жиров РАСХН

Представляет аналитическое решение интегрально-дифферинциального уравнения, являющегося математической моделью одного из процессов разделения двухфазных систем. Это решение может быть использовано, в частности, для инженерных расчётов механической очистки сырья при производстве кондитерского крема и первичной очистки нерафинированных растительных масел.

Ключевые слова: аналитическое решение, двухфазная система, механическая очистка, крем кондитерский, нерафинированное масло.

В технике широко распространен и используется для разделения двухфазных или многофазных систем (жидкость – твердое тело, газ – твердое тело, жидкость – жидкость, твердое тело – твердое тело, жидкость – газ – твердое тело и т.д.) гидромеханический процесс осаждения твердых (или жидких) частиц в жидкой (газовой) среде. Физические характеристики движения, например, твердых частиц в среде жидкости зависят от реологических свойств системы, от факторов, связанных с условиями обтекания [1]. В случае осаждения мелкодисперсных твердых частиц в жидкости или газе основной характеристикой процесса является скорость осаждения.

В молочной промышленности для механической очистки, являющейся составной частью водоподготовки при производстве крема кондитерского, применяется процесс отстоя, при котором частицы жира, как наиболее легкие, всплывают, выделяясь из молока. Физические закономерности, которым подчиняются процессы осаждения и отстоя, сходны и отличаются только направлением движения частиц, отделяемых от среды [2].

В производстве растительных масел важнейшим этапом очистки нерафинированных масел является первичная очистка – удаление примесей нежирового характера (мелких частиц жмыха, фосфолипидов, воскоподобных соединений) [3].

Движение твердых частиц в жидкости может быть описано с помощью уравнений Навье-Стокса.

При малых скоростях движения потока жидкости характерен ламинарный (слоистый) режим течения. При ламинарном движении слои жидкости скользят один относительно другого не перемешиваясь. В условиях установившегося (стационарного) движения скорость потока W при ламинарном режиме постоянна в каждой его точке, т.е. $W = f(x, y, z)$, где x, y, z - текущие координаты.

Ползущее течение, т.е. течение при очень малых скоростях, наблюдается при осаждении в жидкости частиц малых размеров. При значениях числа Рейнольдса $\mathrm{Re} = \frac{W_0 d\rho}{\mu} = \frac{W_0 d}{\nu} < 1$ (W_0 - скорость потока, обтекающего частицу (вдали от нее); d - диаметр частицы; ρ - плотность жидкости; μ - динамический коэффициент вязкости; ν - кинематический коэффициент вязкости), уравнения движения Навье-Стокса упрощаются и из них выводится в [1] формула полной кинетической силы сопротивления, проявляющаяся только в движущемся потоке:

$$F_k = 6\pi\mu R W_0, \qquad (1)$$

где R — радиус шарообразной частицы.

Уравнение (1) выражает закон Стокса.

Полная сила сопротивления при обтекании частицы (шара) пропорциональна импульсу (количеству движения) и площади лобового сечения *f*:

$$F_k = C\frac{\rho W_0^2}{2} f \quad \text{(формула Ньютона).} \qquad (2)$$

Отсюда коэффициент пропорциональности:

$$C = \frac{2F_k}{\rho W_0^2 f}. \qquad (3)$$

Учтя $f = \pi R^2$ и F_k из (1), получим [1]:

$$C = \frac{2 \cdot 6\pi R\mu W_0}{\rho W_0^2 \pi R^2} = \frac{12\mu}{\rho W_0 R} = \frac{24}{\mathrm{Re}} = \xi. \qquad (4)$$

Уравнение (4) выражает закон сопротивления среды при ламинарном режиме $(\mathrm{Re} < 1)$.

При этих условиях скорость осаждения частицы описывается формулой Стокса:

$$W_{oc} = \frac{d^2(\rho_{тв} - \rho)g}{18\mu}, \qquad (5)$$

которая справедлива для области $10^{-4} < \mathrm{Re}_{oc} < 2$ [1].

В (5) $\rho_{тв}$ — плотность частицы.

Для нестационарных условий (неустановившемся движении) и при движении твердых тел в жидкости близкой плотности формула Стокса (1) заменяется для силы сопротивления движущемуся в жидкости телу формулой Буссинеска [4-8]:

$$\overrightarrow{F_{conp}}(t) = -6\pi\mu R\vec{W}(t) - \frac{2}{3}\pi\rho R^3\frac{d\vec{W}(t)}{dt} - 6\pi\mu R\left[\frac{R}{\sqrt{\pi\nu}}\int_0^t \frac{d\vec{W}(\tau)}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - \frac{2R^2}{\sqrt{\pi\nu t}}\vec{W}(o)\right] \qquad (6)$$

где t — время.

(В [4] и в предыдущих изданиях монографии [5] под знаком интеграла ошибочно указана скорость $\vec{W}$, а не ускорение $\dfrac{d\vec{W}(\tau)}{d\tau}$ (или $\vec{W}'$); решение уравнения (6) дано только в [4] для ошибочного случая).

Предполагается, что вдали от частицы жидкость неподвижна.

В формуле Буссинеска первый член представляет собой стационарную формулу Стокса (силу сопротивления Стокса) (1), второй – инерционную составляющую силы сопротивления, учитывающую присоединенную массу жидкости (шара) [Движение шара в жидкости можно рассматривать как происходящее в пустоте, если только к массе шара присоединить дополнительную массу, равную половине массы жидкости в объеме шара], третье слагаемое – так называемая сила Бассе. Сила Бассе обычно включается в выражение для силы сопротивления движущейся частице, если сила межфазного взаимодействия зависит от предыстории движения частиц при их нестационарном движении. Иногда слагаемыми типа силы Бассе пренебрегают [6], что значительно упрощает описание движения дисперсной частицы, однако при этом величина относительной погрешности при вычислении скорости осаждения твердой частицы может достигать 20% [8].

Из формулы Буссинеска (6) следует, что при $t = 0$ и $\vec{W}(o) \neq 0$ сила сопротивления становится бесконечной: невозможно шару, погруженному в вязкую жидкость, мгновенно сообщить конечную скорость. Поэтому следует принять $\vec{W}(o) = 0$.

В случае шара, приведенного импульсивно из состояния покоя в состояние поступательного, прямолинейного и равномерного движения со скоростью $\vec{W}(o)$, из (6) следует величина силы сопротивления, равная [5]:

$$F_{conp} = 6\pi\mu R W_0\left(1 + \frac{R}{\sqrt{\pi\nu t}}\right), \tag{7}$$

из которой при $t \to \infty$ вновь получается формула Стокса [1].

При вертикальном падении частицы в форме шара уравнение его движения будет (основной закон динамики – второй закон Ньютона):

$$\vec{F}_{conp} + m\vec{g} + \vec{F_A} = m\frac{d\vec{W}}{dt} \tag{8}$$

или

$$\frac{4}{3}\pi\rho_1 R^3 \frac{d\vec{W}}{dt} = \vec{F}_{conp} + \frac{4}{3}\pi(\rho_1 - \rho)R^3\vec{g}\ , \tag{9}$$

где $\vec{F_A}$ — выталкивающая сила (сила Архимеда); ρ_1 — плотность материала шара; g — ускорение свободного падения; $m\vec{g}$ — сила тяжести.

Проектируя (6) на направление движения с учетом (8), получим интегро-дифференциальное уравнение [4]:

$$\frac{dW(t)}{dt} + \alpha^2 W(t) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{dW(t)}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = f_0, \tag{10}$$

где введены следующие обозначения:

$$\alpha^2 = \frac{9\mu}{2R^2\left(\rho_1 + \frac{\rho}{2}\right)}; \quad 2\beta = \frac{9\sqrt{\mu\rho}}{2R\left(\rho_1 + \frac{\rho}{2}\right)}; \quad f_0 = \frac{g(\rho_1 - \rho)}{\rho_1 + \frac{\rho}{2}}.$$

Для решения уравнения (10) применим один из методов операционного исчисления – метод интегрального преобразования Лапласа. Он заключается в том, что изучается не сама функция (оригинал), а её видоизменение (изображение). Это видоизменение – преобразование – производится при помощи умножения на некоторую экспоненциальную функцию и интегрирования в определённых пределах.

Преобразование Лапласа функции $y = f(\tau)$ (оригинала) состоит в умножении ее на $e^{-s\tau}$ и интегрировании в пределах от 0 до ∞ [4, 9]:

$$\int_0^\infty f(\tau) e^{-s\tau} d\tau = F(s),$$

$$(f(\tau) \xrightarrow{L} F(s)$$

где $s = \xi + i\eta$ - некоторая комплексная величина; $i = \sqrt{-1}$; $F(s)$ - изображение функции $f(\tau)$.

Преобразованное уравнение (например, дифференциальное, интегро-дифференциальное) в области изображений значительно проще исходного, часто это обычные алгебраические уравнения. Затем находят искомую функцию в изображениях и затем совершают обратный переход (по обратному преобразованию Лапласа) к оригинальной искомой функции.

Если $$W(t) \xrightarrow{L} V_L(s),$$

то $$\frac{dW(\tau)}{dt} \xrightarrow{L} sW_L(s) - W(0);$$

поскольку $W(0) = 0$, то $$\frac{dW(t)}{dt} \to sW_L(s) = sW_L;$$

$$\int_0^t \frac{dW(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \xrightarrow{L} sW_L \cdot \frac{1}{\sqrt{s}} = \sqrt{s}W_L$$

[по теореме умножения изображений (теореме Бореля):

$$\int_0^t \varphi(t) f(t-\tau) d\tau = \int_0^t \varphi(t-\tau) f(\tau) d\tau = f * \varphi \xrightarrow{L} F(s) \cdot \Phi(s),$$

где $f * \tau$ - свёртка непрерывных функций $f(t)$ и $\varphi(t)$; $F(s)$ и $\Phi(s)$ - изображения функций $f(t)$ и $\varphi(t)$].

Таким образом, после применения к уравнению (10) преобразования Лапласа, получим изображающее уравнение:

$$sW_L + \alpha^2 W_L + 2\beta\sqrt{s}W_L = \frac{f_0}{s}, \tag{11}$$

откуда задача сводится к разысканию искомой функции для изображения скорости:

$$W_L = \frac{f_0}{s\left(s + 2\beta\sqrt{s} + \alpha^2\right)}. \quad (12)$$

Обозначим $\sqrt{s} = x$ и разложим дробь (12) на простейшие методом неопределенных коэффициентов. В результате получим:

$$W_L = \frac{f_0}{x^2\left(x^2 + 2\beta x + \alpha^2\right)} = \frac{f_0}{x^2(x - x_1)(x - x_1)} =$$

$$= \frac{f_0}{\alpha^4}\left[\frac{\alpha^2}{x^2} - \frac{2\beta}{x} + \frac{-2\beta^2 + 2\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \alpha^2}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}(x - x_1)} + \frac{2\beta^2 + 2\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \alpha^2}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}(x - x_2)}\right], \quad (13)$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $x^2 + 2\beta x + \alpha^2$:

$$x_1 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\,; \;\; x_2 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\,.$$

Здесь возможны два случая.

При $\beta > \alpha$, т.е. $\rho > 1{,}6\rho_1$, оба корня x_1 и x_2 действительны и отрицательны, плотность жидкости больше плотности тела (газовые пузырьки).

В этом случае

$$W_L(s) = \frac{f_0}{\alpha^4}\left[\frac{\alpha^2}{s} - \frac{2\beta}{\sqrt{s}} + \frac{-2\beta^2 + 2\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \alpha^2}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\left(\sqrt{s} - x_1\right)} + \frac{2\beta^2 + 2\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \alpha^2}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\left(\sqrt{s} - x_2\right)}\right]. \quad (14)$$

По обратному преобразованию Лапласа (используя соответствующие таблицы изображений функций [9, 10]) получаем окончательное решение для скорости движения газового пузырька:

$$W(t) = \frac{f_0}{\alpha^4}\left[\alpha^2 - \frac{2\beta}{\sqrt{\pi t}} + \frac{-2\beta^2 + 2\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \alpha^2}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + x_1 e^{x_1 t} erfc\left(-x_1\sqrt{t}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\beta^2 - 2\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \alpha^2}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} + x_2 e^{x_2 t} erfc\left(-x_2\sqrt{t}\right)\right)\right] =$$

$$= \frac{f_0}{\alpha^4}\left(\alpha^2 - \frac{2\beta}{\sqrt{\pi t}} - \frac{\alpha^2 + 2\beta\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - 2\beta^2}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}\sum_{i=1}^{2}(-1)^i x_i e^{x_i t} erfc\left(-x_i\sqrt{t}\right)\right), \quad (15)$$

где

$$erfz = 1 - erfz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^\infty e^{-z^2}\,dz\,;$$

$$erfz = \frac{2}{\pi}\int_0^z e^{-z^2}\,dz = \Phi(z) \quad (16)$$

— функция ошибок Гаусса [11].

Разложение в ряд функции $\Phi(z)$ для малых значений $z = -x_i\sqrt{t}$ (i = 1, 2) будет:

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{n!}dz = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{n!(2n+1)} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1!3} + \frac{z^5}{2!5} - \ldots\right), \qquad (17)$$

для больших значений z:

$$\Phi(z) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2z^3} + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot z^5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3\cdot z^7} + \ldots\right). \qquad (18)$$

При $\rho < 1{,}6\rho_1$, т.е. $\alpha > \beta$ (плотность жидкости меньше плотности тела) выражение для скорости осаждения частиц имеет вид (соответствует поставленной задаче удаления нежировых примесей):

$$W(t) = \frac{f_0}{\alpha^2}\left[1 + e^{-\alpha^2\left(1-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2\right)t}\cdot\left(\left(\frac{1-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}}A_1 + \frac{2\beta}{\alpha^2}A_2\right)\cos\left(2\beta\sqrt{t}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{2\beta}{\alpha^2}A_1 - \frac{1-2\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}{\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}}A_2\right)\sin\left(2\beta\sqrt{t}\right)\right)\right], \qquad (19)$$

где

$$A_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\beta^2 t}\left(\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\varphi_1 + \beta\varphi_2\right) - \alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\,erfc\left(\beta\sqrt{t}\right);$$

$$A_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\beta^2 t}\left(\beta\varphi_1 - \alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}\varphi_2\right) - \beta\, erfc\left(\beta\sqrt{t}\right);$$

$$\varphi_1 = \int_0^{\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 t}} e^{y^2}\sin\left(2\beta\sqrt{t}\,y\right)dy; \qquad \varphi_2 = \int_0^{\alpha\sqrt{1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 t}} e^{y^2}\cos\left(2\beta\sqrt{t}\,y\right)dy.$$

Выводы

Различные процессы пищевой промышленности, например, такие, как очистка сырья и компонентов при производстве крема кондитерского и первичная очистка нерафинированных растительных масел, обладают общностью, математическое описание которой недостаточно разработано.

Для нестационарных условий и при движении твердых частиц в жидкости близкой плотности, что имеет место в исследуемых процессах, выбрана формула Буссинеска для силы сопротивления движущемуся в жидкости телу.

Преобразованное интегро-дифференциальное уравнение решено методами математической физики. Полученное аналитическое решение является математической моделью одного из процессов разделения двухфазных систем, что может быть, в частности, использовано для инженерных расчетов механической очистки сырья при производстве кондитерского крема и первичной очистки нерафинированных растительных масел.

Список литературы

1. Романков П.Г., Курочкина М.И. Гидромеханические процессы химической технологии. –Л.: Химия, 1982. –288 с.
2. Кук Г.А. Процессы и аппараты молочной промышленности. –М.: Пищевая промышленность, 1973. –768 с.
3. Вороненко Б.А., Марков В.Н., Кунилова Т.М. Аппаратурное оформление процесса первичной очистки растительных масел// Межвузовский сб.науч.трудов «Теория и практика разработки ресурсосберегающего пищевого оборудования», СПб: ГОУ ВПО «СПбГУНиПТ», 2006. –С.51-56.
4. Лурье А.И. Операционное исчисление и его приложение к задачам механики. –М. –Л.: Гостехиздат, 1950. –432 с.
5. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. Учеб. для вузов. –7-е изд. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
6. Протодьяконов И.О., Чесноков Ю.Г. Гидромеханические основы процессов химической технологии. –Л.: Химия, 1987. – 360 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред. –М.: Гостехиздат, 1953. –788 с.
8. Наумов В.А. Влияние силы Бассе на динамику твердых частиц в придонном слое. // Сб.науч.трудов «Теоретические и практические аспекты применения инженерной физико-химической механики с целью совершенствования и интенсификации технологических процессов пищевых производств», Моск.госуд.университет прикладной биотехнологии, -М.: 2002. – С.257-260.
9. Мартыненко В.С. Операционное исчисление.–К.:Высш.шк.,1990.–359 с.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. –М.: Высшая шк., 1967. –600 с.
11. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. –М.: Физматгиз, 1963. –1100 с.