УДК 637.523.27:536.25

Аналитическое решение задачи совместного тепломассопереноса при инфракрасном нагреве колбасных изделий

Д.т.н. Вороненко Б.А., д.т.н. Пеленко В.В., аспирант Стариков В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

Использование энергии инфракрасного излучения является одним из эффективных путей интенсификации тепловой обработки пищевых материалов, позволяющим значительно сократить длительность тепловой обработки и повысить качество готовых изделий. На основе предпосылок предложена математическая модель совместного тепломассопереноса тепловой обработки колбасного батона цилиндрической формы в коптильной установке с ИК-нагревом.

Ключевые слова: ИК-нагрев, тепломассоперенос, математическая модель, система дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия.

Технологический процесс тепловой обработки колбасных изделий как сложных капиллярно-пористых коллоидных тел, состоит из стадий подсушки, обжарки и варки. Интересующая нас первая стадия (подсушка) заключается в прогреве, главным образом, поверхности продукта (Н.С. Михеевой показано, что углубление поверхности испарения имеет место с начала процесса сушки [1]) в среде с низкой относительной влажностью (до 10%). При подсушке с поверхности колбасного изделия удаляется влага смачивания (механически удерживающаяся вода), что способствует равномерной прокраске поверхности и диффузии в продукт коптильных веществ при последующей обжарке.

Как известно [2-4], использование энергии электромагнитного поля инфракрасного (ИК) диапазона является одним из эффективных путей интенсификации тепловой обработки пищевых материалов, позволяющим значительно сократить длительность тепловой обработки и повысить качество готовых изделий.

При составлении математической модели процесса термической обработки колбасных изделий в коптильных установках с ИК-нагревом конвективным теплообменом от окружающего воздуха пренебрегаем, причем, чем выше температура источника радиационного излучения, тем обоснованнее эта предпосылка [2, 8].

Лучистый поток, проникая в продукт, затухает по экспоненциальному закону [5].

При толщине продукта ℓ > 10 мм и высоком значении коэффициента поглощения лучистый поток быстро затухает по мере проникновения в продукт

[1], и можно считать, что вся энергия отдается поверхности, а в нагреве внутренних слоев не участвует. В этом случае, особенно для периода постоянной скорости сушки — стадии подсушки (от начала процесса до времени τ_1), затухание лучистого потока, проникающего в продукт, может быть описано параболическим законом [6]:

$$w(r) = w_0 \frac{r^2 - \lambda_{np}^2}{R^2 - \lambda_{np}^2} \tag{1}$$

$$\left(0 < \lambda_{np} \le r \le R\right)$$

Принимаем колбасный батон за тело основной геометрической формы — бесконечный цилиндр, однородный и изотропный, теплофизические характеристики которого в процессе копчения остаются неизменными.

При ИК-облучении нагрев происходит с поверхности, а внутренним слоям колбасного батона теплота передается теплопроводностью и влагопроводностью. На основе многих экспериментальных данных [3] не будем учитывать процесс термодиффузии влаги, т.е. изменение влагосодержания за счет термовлагопроводности, и учтем также сравнительно медленное изменение влагосодержания со временем при ИК-нагреве [7].

В соответствии с указанными допущениями нагрев колбасного батона в коптильной установке с ИК-нагревом может быть описан следующей краевой задачей связанного тепло- и массопереноса: требуется решить систему дифференциальных уравнений в частных производных в цилиндрических координатах

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_q \left(\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon \rho}{c_q}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{w(r)}{c_q \gamma_0}; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right) \tag{3}$$

$$\left(0 < \tau < \tau_1; 0 < r < R\right)$$

при следующих условиях:

$$t(r,0) = t_0 = const; \tag{4}$$

$$u(r,0) = u_0 = const; \tag{5}$$

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial r} = \frac{\partial u(0,\tau)}{\partial r} = 0; \tag{6}$$

$$t(0,\tau) < \infty; u(0,\tau) < \infty; \tag{7}$$

$$-\lambda_q \frac{\partial t(R,\tau)}{\partial r} + q(\tau) - (1-\varepsilon) q_m(\tau) = 0; \tag{8}$$

$$a_m \gamma_0 \frac{\partial u(R,\tau)}{\partial r} + q_m(\tau) = 0 \tag{9}$$

Здесь: (2) — уравнение теплопереноса с внутренним источником тепла, определяемым зависимостью (1); (3) — уравнение влагопереноса; (4) и (5) — начальные условия, задающие равномерное распределение температуры и влагосодержания в теле в момент начала процесса нагрева; (6) и (7) — условия симметрии и физической ограниченности температуры и влагосодержания; (8) — граничное условие второго рода, задающее поток теплоты через поверхность тела; (9) — граничное условие второго рода, описывающее влагообмен тела с окружающей средой.

Аналитическое решение задачи (2) — (9) получено методом интегрального преобразования Лапласа в следующем безразмерном виде:

$$T(X,Fo)=\frac{t(r,\tau)-t_0}{t_{мс}-t_0}=2\Bigg\{1+\frac{Po}{2(1-X_{пр}^2)}\Bigg[\frac{13}{768}-\left(X_{пр}^2-\frac{1}{8}\right)Fo-\frac{1}{16}X^4+\frac{1}{32}X^2-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0(\mu_n X)}{\mu_n^4 J_0(\mu_n)}e^{-\mu_n^2 Fo}\Bigg]+\frac{\varepsilon KoLu}{2(1-Lu)}\left[\frac{\sqrt{Pd_2}\,J_0\left(\sqrt{Pd_2}\,X\right)}{J_1\sqrt{Pd_2}}-\frac{\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}\,J_0\left(\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}\,X\right)}{J_1\left(\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}\right)}\right]e^{-Pd_2Fo}-$$

$$-\frac{\sqrt{Pd_1}\,J_0\left(\sqrt{Pd_1}\,X\right)}{2J_1\sqrt{Pd_1}}e^{-Pd_1Fo}+\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg[\left(\frac{1}{1-\frac{\mu_n^2}{Pd_1}}-\frac{\varepsilon KoLu}{(1-Lu)\left(1-\frac{\mu_n^2}{Pd_2}\right)}\right)e^{-\mu_n^2 Fo}+$$

$$+\frac{\varepsilon KoLu}{(1-Lu)\left(1-\frac{\mu_n^2}{Pd_2}\right)}e^{-\mu_n^2 LuFo}\Bigg]\frac{J_0(\mu_n X)}{J_0(\mu_n)}\Bigg\} \qquad (10)$$

для Lu=1 ($a_m = a_q$)

$$T(X,Fo)=\frac{t(r,\tau)-t_0}{t_{мс}-t_0}=2\Bigg\{1+\frac{Po}{2(1-X_{пр}^2)}\Bigg[\frac{13}{768}-\left(X_{пр}^2-\frac{1}{8}\right)Fo-\frac{1}{16}X^4+\frac{1}{32}X^2-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2J_0(\mu_n X)}{\mu_n^4 J_0(\mu_n)}e^{-\mu_n^2 Fo}\Bigg]-\frac{\sqrt{Pd_1}\,J_0\left(\sqrt{Pd_1}\,X\right)}{J_1\left(\sqrt{Pd_1}\right)}e^{-Pd_1Fo}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n X)}{\left(1-\frac{\mu_n^2}{Pd_1}\right)J_0(\mu_n)}e^{-\mu_n^2 Fo}\Bigg\} \qquad (11)$$

$$\theta(X,Fo)=2\left[1-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}\,\frac{J_0\left(\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}\,X\right)}{J_1\left(\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}\right)}e^{-Pd_2Fo}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n X)}{\left(1-\frac{\mu_n^2 Lu}{Pd_2}\right)J_0(\mu_n)}e^{-\mu_n^2 Fo}\right]; \qquad (12)$$

μ_n — последовательные положительные корни уравнения

$$J_1(\mu)=0. \qquad (13)$$

Анализ полученных решений (1) и (12) показывает, что благодаря быстрому увеличению абсолютной величины последовательного ряда значений характеристических корней μ_n (уравнение (13)),

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots,$$

а, следовательно, быстрого уменьшения экспоненциальных сомножителей $e^{-\mu_n^2 Fo}$, бесконечные суммы, входящие в решения, сходятся достаточно быстро. Поэтому, начиная с определенного значения числа Фурье, с заранее заданной степенью точности из всего ряда разложения можно удовлетвориться одним-двумя первыми членами. Такое упрощение имеет большое практическое значение из-за существенного сокращения объема расчетной работы и возможности представления общих решений в удобной для практического применения форме.

Так, формулой удобной для инженерных расчетов полей потенциала влагопереноса, будет следующее выражение, полученное из (12) при n = 1:

$$\frac{u(r,\tau)}{u_0} = 1 - 2\left[\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}\,\frac{J_0\left(\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}X\right)}{J_0\left(\sqrt{\frac{Pd_2}{Lu}}\right)}e^{-Pd_2Fo} + \frac{2J_0(\mu_1 X)}{\left(1-\frac{\mu_1^2 Lu}{Pd_2}\right)J_0(\mu_1)}e^{-\mu_1^2 Fo}\right]. \tag{14}$$

Среднее значение безразмерной величины потенциала переноса влаги для упрощенного выражения Θ(X, Fo) при n = 1

$$\bar{\theta}(Fo) = \frac{u_0 - \bar{u}(\tau)}{u_0} = 2\int_0^1 X\,\theta(X, Fo)\,dx = 2\left(1 - e^{-Pd_2Fo}\right). \tag{15}$$

Ограничиваясь одним первым членом ряда, получаем приближенно формулу для расчета времени, необходимого для достижения нагреваемым телом определенного влагосодержания:

$$\tau = \frac{\bar{\theta}}{2k_2}. \tag{16}$$

Среднее значение безразмерного потенциала температуры для упрощенного выражения T(X, Fo) при n = 1

$$\bar{T}(Fo) = 2\int_0^1 X\,T(X, Fo)\,dx = \frac{t(x,\tau) - t_0}{t_{мс} - t_0} = \frac{Po}{\left(1 - X_{пр}\right)^2} + 2Pd_1Fo. \tag{17}$$

Для нахождения времени доведения продукта до необходимой средней объемной температуры, запишем в следующем виде:

$$\tau = \frac{1}{2k_1\left(t_{мс} - t_0\right)}\left(\bar{t} - t_0 - \frac{w_0 R^2}{\lambda_q\left(1 - \frac{\lambda_{пр}^2}{R^2}\right)}\right). \tag{18}$$

Выводы

Поставлена и аналитически решена задача совместного тепло- и массопереноса при инфракрасном нагреве колбасного батона цилиндрической формы.

Полученные решения позволяют рассчитать поля температуры и влагосодержания, усредненные значения соответствующих потенциалов переноса, темп нагрева, расход тепла в процессе теплообмена, а также получить формулы, удобные для инженерных расчетов.

Разработанные аналитические решения дают возможность определить время, необходимое для достижения нагреваемым продуктом определенной температуры и влагосодержания.

Обозначение

t(r, τ) — температура, К, °С; $t_0 -$ начальная температура; $t_{ж} -$ максимальная температура среды в камере; $\Delta t = t_{ж} - t_0$; $T(X,Fo) = {(t(x,\tau)-t_0)}/{(t_{ж}-t_0)}$ – безразмерная температура; u(r, τ) – влагосодержание, кг влаги/кг абс. сух. вещества; $u_0 -$ начальное влагосодержание;

$\theta(X,Fo) = {(u_0 - u(r,\tau))}/{u_0}$ – безразмерное влагосодержание; r – текущая координата, м; X = r/R – безразмерная координата; R – радиус поперечного сечения цилиндрического колбасного батона, м;

τ – время, с; $\tau_1 -$ время окончания первого периода термической обработки – подсушки; $a_q -$ коэффициент температуропроводности, м²/с; ε – коэффициент фазового перехода (0 < ε < 1); ρ – удельная теплота фазового перехода, Дж/кг; $c_q -$ удельная теплоемкость, Дж/(кг·К); $a_m -$ коэффициент потенциало- (влаго-) проводности, м²/с; $\lambda_m -$ предельная глубина проникновения инфракрасного излучения в материал, м; $\lambda_q -$ коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

$q(\tau) = k_1 c_q \gamma_0 R \Delta t e^{-k_1 \tau} + R k_2 \rho \gamma_0 u_0 e^{-k_2 \tau}$ – экспериментально найденная плотность теплового потока на поверхности тела, Вт/м²; $q_m(\tau) = k_2 \gamma_0 u_0 R e^{-k_2 \tau}$ – экспериментально установленная плотность потока массы вещества через поверхность тела, кг/(м²·с); γ_0 – плотность абсолютно сухого вещества, кг/м³;

k_1 - коэффициент, характеризующий убывание температуры поверхности тела по экспоненциальному закону, 1/с; k_2 - коэффициент сушки, 1/с; $Fo = {a_q \tau}/{R^2} -$ критерий гомохронности (число Фурье); $Lu = {a_m}/{a_q} -$ критерий (число Лыкова) взаимосвязи массо- и теплопереноса; $Ko = {r \Delta u}/{(c_q \Delta t)} -$ число

Коссовича; $Pd_1 = {k_1 R^2}/{a_q}, Pd_1 = {k_2 R^2}/{a_q}$ - числа Предводителева (теплообменное и массообменное); $J_0(z)$ и $J_1(z)$ - функции Бесселя от вещественного аргумента z первого рода и нулевого порядка соответственно; $w_0 -$ мощность ИК-источника, Вт/м³.

Литература

1. Гинзбург А.С. Основы теории и техники сушки пищевых продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1973. – 528 с.
2. Гинзбург А.С. Инфракрасная техника в пищевой промышленности. – М.: Пищевая промышленность, 1966. – 376 с.
3. Рогов И.А., Некрутман С.В. СВЧ и ИК-нагрев пищевых продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1976. – 210 с.
4. Ильясов С.Г., Красников В.В. Физические основы инфракрасного излучения пищевых продуктов. – М.: Пищевая промышленность, 1978. – 359 с.
5. Лыков А.В. Тепло и массообмен в процессах сушки. – М.: Госэнергоиздат, 1956. – 464 с.
6. Белобородов В.В., Вороненко Б.А. Решение задачи нагрева тел в электромагнитном поле сверхвысоких частот //Журнал прикладной химии АН СССР, «Наука» - Ленинградское отделение, № 10, 1984. – С. 2276-2282.
7. Вороненко Б.А., Пеленко В.В., Стариков В.В. Постановка задачи тепломассопереноса процесса горячей сушки рыбы // Межвузовский сборник научных трудов «Ресурсосберегающие технологии и оборудование пищевой промышленности», СПб, СПбГУНиПТ, 2006. – С. 71- 75.
8. Стариков В.В., Вороненко Б.А. Применение ИК-нагрева при копчении // Межвузовский сборник научных трудов «Теория и практика разработки и эксплуатации пищевого оборудования», СПб, СПбГУНиПТ, 2007. – С. 12-17.

Analytical solution of a combined heat and mass transfer problem for infrared heating of sausage goods

B.A. Voronenko DSc, V.V.Pelenko DSc, V.V.Starikov graduate student

Saint-Petersburg State University of Refrigeration & Food Engineering

Use of infrared radiant energy is an effective way to enhance heat treatment of food materials, allowing both to curtail heat treatment period and to upgrade finished product quality. On the basis of prerequisites a mathematical model of combined heat and mass transfer is proposed for heat treatment of a long cylinder sausage loaf in an IR-heated smoker.

Key words: IR-heating, heat and mass transfer, mathematical model, differential equation set, initial and boundary conditions.