УДК 637.523.27:536.25

Математическое описание процессов тепло- и массопереноса в колбасных изделиях при их тепловой обработке

д.т.н. Вороненко Б.А., д.т.н. Пеленко В.В., аспирант Стариков В.В.

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

Для описания процессов тепло- и массообмена в продукте, представляющим собой дисперсную систему, рассмотрим колбасный батон не как совокупность отдельных дискретных частиц, а как сплошную среду, однородную и изотропную. На основе предпосылок предложена математическая модель совместного тепломассопереноса тепловой обработки колбасного батона цилиндрической формы.

Ключевые слова: капиллярно-пористые тела, тепловая обработка, тепломассоперенос, математическая модель, система дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия.

Основные способы массопереноса при созревании мясного фарша, сушке, варке, превращении его в готовый продукт, как и у всех пищевых продуктов животного происхождения, — это перенос вещества на молекулярном уровне (молекулярная диффузия) и перенос на макроуровне в результате движения жидкости и пара (конвективный перенос) [1].

Фаршевые мясопродукты относятся к коллоидным капиллярно-пористым телам, так как наряду с развитой системой пор и капилляров они содержат и коллоидные частицы, входящие в каркас стенок.

Удаление влаги из материала связано с преодолением сопротивления со стороны продукта. Сопротивления возникают как при переходе от одного элемента объема тела к другому, так и при изменении состояния влаги в теле, ее формы связи.

Изучение процессов пищевой технологии должно базироваться на комплексном математическом описании целого ряда превращений сырья с использованием современной вычислительной техники. При этом компьютер выступает как средство не только вычисления, но и моделирования возможных технологических ситуаций, предвидеть которые без применения современных подходов практически невозможно. Системный анализ позволяет представить сырье как сложную систему, состоящую из ряда взаимосвязанных элементов, а технологический процесс — как совокупность преобразований этой системы, протекающих на разных, но взаимосвязанных уровнях. Такого рода представления удобны для последующей формализации с использованием ЭВМ, прежде всего в виде кибернетических моделей. Сочетание системного анализа с аналитическим описанием процесса наиболее плодотворно, так как позволяет в качестве аппроксимирующих зависимостей использовать не случайные полиномиальные функции, а математические зависимости, вытекающие из фундаментальных законов природы, лежащих в основе математического описания тепловых и массообменных процессов [1].

Применительно к технологическим схемам производства мясных продуктов (варено-копченых колбас) отдельный батон можно считать биореактором, в котором последовательно и параллельно протекают гидромеханические, массообменные и тепловые процессы [1]. Для каждого продукта авторы выделяют ряд уровней, на каждом из которых сырье превращается в готовый продукт.

В производстве варено-копченых колбас основными процессами являются гидромеханические, массообменные и тепловые.

Колбасные батоны представляют собой твердообразные системы (частицы), содержащие элементы как исходных компонентов, в основном животных тканей, так и структуру, полученную при измельчении и смешивании компонентов. Эти частицы неоднородны по величине, структуре и физическим свойствам [2]. Поэтому для описания процессов тепло- и массообмена в продукте следовало бы написать дифференциальные уравнения для каждой отдельной частицы, что сделать невозможно. Однако размеры частиц и расстояния между ними ничтожно малы по сравнению с размерами массы материала, подвергаемого термообработке в коптильной камере (реакторе), что дает возможность колбасный батон, представляющий собою дисперсную систему, рассматривать не как совокупность отдельных дискретных частиц, а как сплошную среду, однородную и изотропную.

Анализ работы применяемых в промышленности камер Autotherm показал, что основным способом передачи теплоты является конвективно-радиационный. В этом случае, если считать колбасный батон, подвергаемый тепловой обработке в камере, телом, имеющим форму неограниченного цилиндра, условия взаимодействия которого с окружающей средой выражаются граничными условиями второго рода (экспериментально найденными функциональными зависимостями удельных потоков тепла и вещества на поверхности тела от времени), краевую задачу совместного тепломассопереноса (дифференциальные уравнения и условия однозначности) можно сформулировать следующим образом:

требуется решить систему дифференциальных уравнений в частных производных [3]

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_q \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon \rho}{c_q} \frac{\partial u}{\partial \tau}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + a_m \delta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right); \qquad (2)$$

$(0 < \tau < \tau_1; 0 < r < R)$

при следующих начальных

$$t(r,0) = f_1(r); \qquad (3)$$

$$u(r,0)=f_2(r) \tag{4}$$

и граничных условиях

$$\frac{\partial t(0,\tau)}{\partial r}=\frac{\partial u(0,\tau)}{\partial r}=0; \tag{5}$$

$$t(0,\tau)<\infty; u(0,\tau)<\infty; \tag{6}$$

$$-\lambda_q\frac{\partial t(R,\tau)}{\partial r}+q(\tau)-(1-\varepsilon)\rho q_m(\tau)=0; \tag{7}$$

$$a_m\gamma_0\frac{\partial u(R,\tau)}{\partial r}+a_m\gamma_0\delta\frac{\partial t(R,\tau)}{\partial r}+q_m(\tau)=0 . \tag{8}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$t=(r,\tau)-$ температура, К, °С; $t_o=const$ – частный случай начальной температуры; t_{mc} – максимальная температура среды; $t_{mc}-t_o=\Delta t$; $T(X,Fo)=\dfrac{t(x,\tau)-t_o}{t_{mc}-t_o}$ – безразмерная температура;

$u=(r,\tau)-$ влагосодержание, кг влаги/кг абс. сух. вещества; $u_o=const$ – частный случай начального влагосодержания; $\theta(X,Fo)=\dfrac{u_o-t(x,\tau)}{u_o}$ – безразмерное влагосодержание; r - текущая координата, м; R - радиус цилиндра, м; $X={r}/{R}$ - безразмерная координата; τ - время, с;

τ_1 - время окончания первого периода термической обработки – прогрева и периода постоянной скорости сушки; $f_1(r)$ и $f_2(r)$ распределение температуры и влагосодержания в материале соответственно; a_q - коэффициент температуропроводности, м²/с; ε - коэффициент фазового перехода (0 < ε < 1); ρ - удельная теплота испарения, Дж/кг; c_q - удельная теплоемкость материала, Дж/(кг·К); a_m - коэффициент потенциало- (влаго-) проводности м²/с;

δ - термоградиентный коэффициент, 1/К; λ_q - коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);

q(τ) - плотность теплового потока – количество тепла, подводимого к единице площади поверхности твердого тела в единицу времени, Вт/м²; $q_m(\tau)-$плотность потока массы вещества кг/(м²·с); γ_0 – плотность абсолютно сухого вещества, кг/м³;

(1) – уравнение теплопереноса; (2) – уравнение массо- (влаго-) переноса; равенства (3) и (4) – начальные условия; (5) и (6) – условия симметрии и физической ограниченности температуры и влагосодержания.

Граничное условие (7) является уравнением баланса тепла: подведенное тепло к поверхности тело $\vec{q}(\tau)$ расходуется на испарение жидкости $\rho\overrightarrow{q_m}(\tau)$ и на нагрев тела $\left(-\lambda_q\dfrac{\partial t(R,\tau)}{\partial r}\right)$.

Граничное условие (8) – уравнением баланса массы вещества – условие сушки влажных дисперсных сред в данном случае.

Коэффициенты системы уравнений и граничных условий – постоянные (усредненные) величины, различные для различных этапов процесса.

Для определения зависимости потока массы вещества от времени в заводских условиях был поставлен эксперимент по протеканию процесса термической обработки колбасных изделий под действием радиационного нагрева. В результате аналитической обработки была получена следующая зависимость удельного потока массы вещества от времени:

$$q_m(\tau) = k_2 u_0 R \gamma_0 \, \mathrm{e}^{-k_2(\tau)}, \qquad (9)$$

где k_2 – эмпирическая постоянная – коэффициент сушки, 1/с.

Аналогично была найдена зависимость q(τ).

Поставленная краевая задача (1) – (8) решена методом последовательного применения конечного интегрального преобразования Ханкеля [3-5] и интегрального преобразования Лапласа [3].

Распределения полей температуры и влагосодержания в безразмерном виде при отмеченных допущениях получены в следующем виде:

$$T(X,Fo) = 2\left[\int_0^1 XF_1(X)J_0(\mu X)dx + 1 - e^{-Pd_1 Fo}\right] + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\mu_n X)}{J_0(\mu_n)}\left\{\frac{Pd_1}{\mu_n^2 - Pd_1}\left(e^{-Pd_1 Fo} - e^{-\mu_n^2 Fo}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon KoPd_2\mu_n^2\left(\mu_n^2 - \frac{Pd_1}{Lu}\right)}{\left(\mu_n^2 - Pd_2\right)\left(\mu_n^2 - \frac{Pd_2}{Lu}\right)}e^{-Pd_2 Fo} + \frac{\varepsilon KoPd_2}{Lu-1}\left(\frac{e^{-\mu_n^2 LuFo}}{\mu_n^2 - \frac{Pd_2}{Lu}} - \frac{Lue^{-\mu_n^2 Fo}}{\mu_n^2 - Pd_2}\right)\right\}; \qquad (10)$$

$$\theta(X,Fo) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_i}{\nu_2^2 - \nu_1^2}e^{-Lu\mu_n^2\nu_i^2 Fo}, \qquad (11)$$

где

$Fo = \frac{a_q\tau}{R^2}$ – критерий гомохронности (число Фурье); $Lu = \frac{a_m}{a_q}$ – критерий (число Лыкова) взаимосвязи массо- и теплопереноса; $Ko = \frac{r\Delta u}{c_q\Delta t}$ – число Коссовича; $Pd_1 = \frac{k_1R^2}{a_q}, Pd_2 = \frac{k_2R^2}{a_q}$ - числа Предводителева (теплообменное и массообменное).

$\gamma_i = PnT_0 + (\nu_i^2 - 1)\theta_0$, где $T_0 = \int_0^1 XF_1(X)J_0(\mu_n X)dx$, $\theta_0 = \int_0^1 XF_2(X)J_0(\mu_n X)dx$.

$\nu_i^2 = \frac{1}{2}\left(\alpha + (-1)^\alpha\sqrt{\alpha^2 - \frac{4}{Lu}}\right)$, где $\alpha = 1 + \frac{1}{Lu} + \varepsilon KoPn$

μ_n - последовательные положительные корни уравнения

$$J_1(\mu) = 0 \qquad (12)$$

$J_0(z)$ и $J_1(z)$ - функции Бесселя от вещественного аргумента z первого рода и нулевого порядка соответственно.

Литература.

1. Афанасов Э.Э., Николаев Н.С., Рогов И.А. и др. Аналитические методы описания технологических процессов мясной промышленности. – М.: Мир, 2003. – 184 с.
2. Бражников А.М. Теория термической обработки мясопродуктов. – М.: Агропромиздат, 1987. – 271 с.
3. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. – М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
4. Снеддон И. Преобразование Фурье. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1955. – 667 с.
5. Волков И.К., Канатников А.Н. Интегральные преобразования и операционное исчисление: Учеб. для вузов. – М: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. – 228 с.

Mathematical description of heat and mass transfer in heat treated sausage goods

B.A. Voronenko DSc, V.V.Pelenko DSc, V.V.Starikov graduate student

Saint-Petersburg State University of Refrigeration & Food Engineering

To describe heat and mass transfer in a product that is a disperse system, a long sausage loaf is assumed to be analyzed not as an aggregate of isolated discrete particles but as a solid homogeneous and isotropic medium. On the basis of prerequisites a mathematical model of combined heat and mass transfer is proposed for heat treatment of a long cylinder sausage loaf.

Key words: capillary-porous bodies, heat treatment, heat and mass transfer, mathematical model, differential equation set, initial and boundary conditions