

УДК 664.8.039.51

## Аналитическое исследование процесса сушки пшеничных зародышей инфракрасным облучением

*Д-р техн. наук* Вороненко Б. А. voronenkoboris@mail.ru  
*канд. техн. наук* Демидов С. Ф. demidovserg@mail.ru  
Беляева С. С. SvetBeL21@gmail.com

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО  
Институт холода и биотехнологий  
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9*

***Поставлена и решена аналитически задача совместного тепло- и массопереноса при инфракрасном нагреве пшеничных зародышей***

***Ключевые слова:*** инфракрасный нагрев, тепломассоперенос, математическое описание, пшеничные зародыши.

---

## Mathematical description of heat and mass transfer of wheat germ by infrared heating

*D.Sc. Voronenko B.A., Ph.d. Demidov S.F., Belyaeva S.S..*

*Saint-Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics.  
Institute of Refrigeration and Biotechnology  
191002, St. Petersburg, Lomonosov str., 9*

***Solve the problem of sharing heat and mass transfer in infrared heating wheat germ.***

***Keywords:*** infrared heating, heat and mass transfer, mathematical description, wheat germ.

---

Использование энергии электромагнитного поля инфракрасного (ИК) диапазона является одним из эффективных путей интенсификации тепловой обработки пищевых материалов, позволяющих значительно сократить длительность процесса и повысить качество готовых изделий.

Математически краевую задачу совместного тепло- и массопереноса для однородного и изотропного капиллярно-пористого коллоидного тела основной геометрической формы – неограниченной пластины – можно сформулировать

следующим образом:

требуется решить систему дифференциальных уравнений в частных производных [1]

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_q \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\rho_o \partial U}{c_q \partial \tau} \frac{Q_v}{c_q \rho_o} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = a_m \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - a_m \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (2)$$

$$(\tau > 0, 0 < x < h)$$

при следующих условиях:

$$t(x, 0) = t_0 = \text{const}; \quad (3)$$

$$U(x, 0) = U_0 = \text{const}; \quad (4)$$

$$t(0, \tau) = t_n = \text{const}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial U(0, \tau)}{\partial x} - \frac{\partial t(0, \tau)}{\partial x} = 0; \quad (6)$$

$$-q_q \frac{\partial t(h, \tau)}{\partial x} - q_q \rho_q \tau + \rho_o q_m \tau = 0; \quad (7)$$

$$a_m \rho_o \frac{\partial U(h, \tau)}{\partial x} - a_m \rho_o \frac{\partial t(h, \tau)}{\partial x} - q_m = 0. \quad (8)$$

Здесь (1) – уравнение теплопереноса; (2) – уравнение массо- (влаго-) переноса; равенства (3) и (4) – начальные условия; (5) – граничное условие, описывающее температуру поверхности слоя пшеничных зародышей, прилегающих к тефлоновой подложке сушильной установки; граничное условие (6) – условие влагоизоляции. Граничное условие (7) является уравнением баланса тепла: подведенное тепло к поверхности тела  $q_q(\tau)$  расходуется на испарение жидкости  $\rho q_m(\tau)$  и на нагрев тела ( $-q_q \frac{\partial t(h, \tau)}{\partial x}$ ). Граничное условие (8) – уравнение баланса массы вещества – условие радиационной сушки влажных дисперсных сред.

На основании теоретического вывода [2] и результатов лабораторного эксперимента [3] в уравнение (1) введён внутренний источник тепла, мощность которого снижается от поверхности слоя материала по параболическому закону:

$$\frac{Q_v}{c_q \rho_o} = \frac{\rho_o}{c_q \rho_o} \frac{x^2 - x_{np}^2}{h^2 - x_{np}^2} \quad (9)$$

В [1,4] отмечается, что граничные условия (7) – (8) по своему физическому содержанию отражают большой класс теплообмена и массообмена, включая в себя радиационный теплообмен.

Рассмотрим упрощённую задачу: на основании многих экспериментальных данных [5] пренебрежём членом  $a_m \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}$  в уравнении (2), т.е. не будем учитывать процесс термодиффузии влаги  $U$ , более того, примем термоградиентный коэффициент  $\delta = 0$ , будем считать, что термоградиентный перенос вещества отсутствует. Кроме того, как показывают наши экспериментальные исследования, потоки тепла и влаги через поверхность тела можно считать неизменными.

Аналитическое решение краевой задачи (1) – (9) с учётом отмеченных упрощений получено методом интегрального преобразования Лапласа в следующем обобщённом критериальном виде:

$$\theta = Ki_m [Lu Fo \frac{1}{2} X^2 - \frac{1}{6} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 + 1^m \cos m X e^{-m Lu Fo}}{m^2}] ; \tag{10}$$

$$T = \frac{1}{1 - Lu} Ki_q X + \frac{1}{1 - Lu} Ki_m Ko Lu X \frac{Lu}{2} + \frac{Po}{12(1 - H^2)} [6H^2 X^2 - 2X - 1 + X(4 - X^3)] +$$

$$+ \frac{Ki_m Ko Lu}{1 - Lu} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{2 + 1^m}{m^2 \cos Lu m} \cos Lu(1 - X) m + \cos Lu m \cos m X \right]$$

$$e^{-m Lu Fo} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2 + 1^n}{2^{2n-1}} \frac{2Po}{1 - H^2} \frac{\sin \frac{2n-1}{2} X}{2^{2n-1}} + Ki_q \frac{\sin \frac{2n-1}{2} X}{2^{2n-1}} \right]$$

$$+ \frac{\cos \frac{2n-1}{2} (1 - X)}{2^{2n-1}} - Po \frac{H^2}{1 - H^2} \frac{\cos \frac{2n-1}{2} (1 - X)}{2^{2n-1}} - \frac{Po}{1 - H^2} \frac{2 \cos \frac{2n-1}{2}}{2^{2n-1}} +$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{Ki_m Ko Lu}{1 - Lu} \frac{\overline{Lu} \cos \left\{ \frac{x}{2} (2n - 1) \pi - X \right\}}{\frac{x}{2} (2n - 1) \pi \sin \left\{ \frac{x}{2} (2n - 1) \pi \right\}} - \frac{Ki_m Ko Lu \sin \left\{ \frac{x}{2} (2n - 1) \pi - X \right\}}{\frac{x}{2} (2n - 1) \pi} e^{-\frac{x^2}{4} (2n - 1)^2 Fo} \\
 + & \frac{\frac{x}{2} (2n - 1) \pi \sin \left\{ \frac{x}{2} (2n - 1) \pi \right\}}{\overline{Lu}}
 \end{aligned} \tag{11}$$

### Условные обозначения

$t = t(x, \tau)$  — температура, К, °С;  $t_0$  — начальная температура;  $t_n$  — температура подложки (среды);  $\Delta t = t_n - t_0$ ;  $U = U(x, \tau)$  — влагосодержание, кг влаги/кг абс. сух. вещества;  $U_0$  — начальное влагосодержание;  $x$  — текущая координата, м;  $h$  — высота слоя материала, м;  $a_q$  — коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с;  $a_m$  — коэффициент потенциало- (влаго-) проводности, м<sup>2</sup>/с;  $\varepsilon$  — коэффициент фазового перехода ( $0 < \varepsilon < 1$ );  $\rho$  — удельная теплота испарения (фазового превращения), Дж/кг;  $c_q$  — удельная теплоёмкость материала, Дж/(кг·К);  $\delta$  — термоградиентный коэффициент, 1/К;  $\gamma_0$  — плотность абсолютно сухого вещества, кг/м<sup>3</sup>;  $\frac{Q_v}{c_q \gamma_0}$  — мощность внутреннего источника тепла, Вт/м<sup>3</sup>;  $\omega_0$  — мощность инфракрасного источника, Вт/м<sup>3</sup>;  $\lambda_{пр}$  — предельная длина проникновения инфракрасного излучения, ( $0 < \lambda_{пр} < h$ ), м;  $\lambda_q$  — коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К);  $q_q(\tau)$  — плотность теплового потока, Вт/м<sup>2</sup>;  $q_m(\tau)$  — плотность потока массы вещества, кг/(м<sup>2</sup>·с);  $T = T(X, Fo) = \frac{t(x, \tau) - t_0}{t_n - t_0}$  — безразмерная температура;  $\theta = \theta(X, Fo) = \frac{U_0 - U(x, \tau)}{U_0}$  — безразмерное влагосодержание;  $X = \frac{x}{h}$  — безразмерная координата;  $Fo = \frac{a_q}{h^2}$  — критерий гомохронности (число Фурье);  $Fo_m = \frac{a_m}{h^2} = Lu Fo$ ;  $Lu = \frac{a_m}{a_q}$  — число Лыкова — критерий взаимосвязей интенсивности внутреннего переноса массы (влаги) и тепла в процессе сушки;  $K_0 = \frac{U_0}{c_q \gamma_0 t}$  — число Коссовича;  $P_0 = \frac{\omega_0 h^2}{q_q \gamma_0 t}$  — число Померанцева;  $Ki_q = \frac{q_1 h}{q_q \gamma_0 t}$  — теплообменное число Кирпичёва;  $Ki_m = \frac{q_2 h}{a_m U_0 \gamma_0}$  — массообменное число Кирпичёва;  $N = \frac{\lambda_{пр}}{h}$

Зная теплофизические и массовлагодобменные характеристики продукта,

рассчитывались значения критериев  $Fo$ ,  $Ki_q$ ,  $Ki_m$ ,  $Ko$ ,  $Po$ ,  $Lu$ , входящих в полученные уравнения для расчёта безразмерного потенциала влагосодержания (10) и безразмерного потенциала температуры (11) пшеничных зародышей в процессе инфракрасной сушки.

Решение системы уравнений тепло- и массопереноса (1), (2) при начальных условиях (3), (4) и граничных условиях (5) — (8) даёт зависимость процесса от большой группы тепло- и массообменных чисел подобия.

$$\theta = \theta(X, Fo, Ki_m, Lu), \quad (12)$$

$$T = T(X, Fo, Ki_q, Ki_m, Ko, Po, Lu) \quad (13)$$

Однако не все числа в одинаковой мере влияют на ход процесса. Одни из них преимущественно воздействуют на теплообменные характеристики переноса, другие на массообменные.

Из известных аналитических исследований нестационарных полей потенциалов переноса [6] следует, что при постоянном потоке вещества через поверхность тела различаются две стадии развития процесса. Первая стадия характеризуется прогревом материала и неустойчивым распределением влагосодержания. Из решения (13) следует, что при  $Fo$  стремящемся к бесконечности, членами, содержащими суммы по  $m$  и  $n$ , в связи с быстрым убыванием составляющих  $e^{-m^2 Fo}$  и  $e^{-\frac{n^2}{4}(2n-1)^2 Fo}$ , можно пренебречь, что означает наступление квазистационарного режима, и параболическое распределение температуры по координате  $X$  (рис. 3). Это соответствует физике процесса (рис. 1, 2). При  $Fo$ , стремящемся к бесконечности из (10) следует рост потенциала  $\theta(Fo)$  по линейному закону, что также соответствует физическому закону сушки, т. е.  $U(x, \tau)$  стремится к нулю ( $\theta(X, Fo)$  стремится к единице). В конце первой стадии ( $Fo \approx 0,3$ ) распределение потенциала массопереноса становится параболическим.

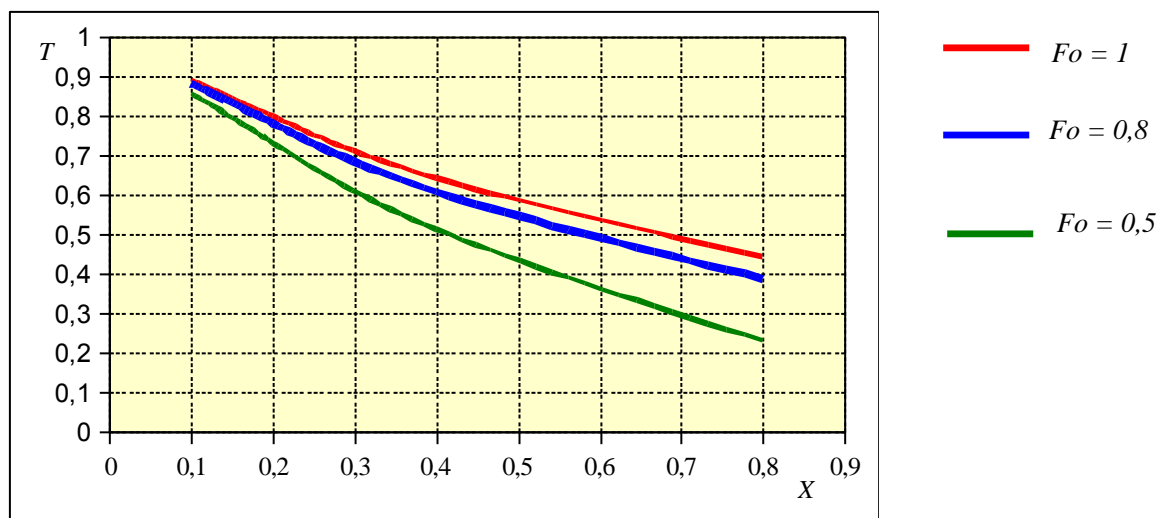


Рис. 1. Зависимость безразмерного потенциала теплопереноса  $T$  от безразмерной координаты  $X$  ( $Lu = 1,8; Ki_m = 0,3; Po = 0,2; H = 0,4; Ko = 7,5$ )

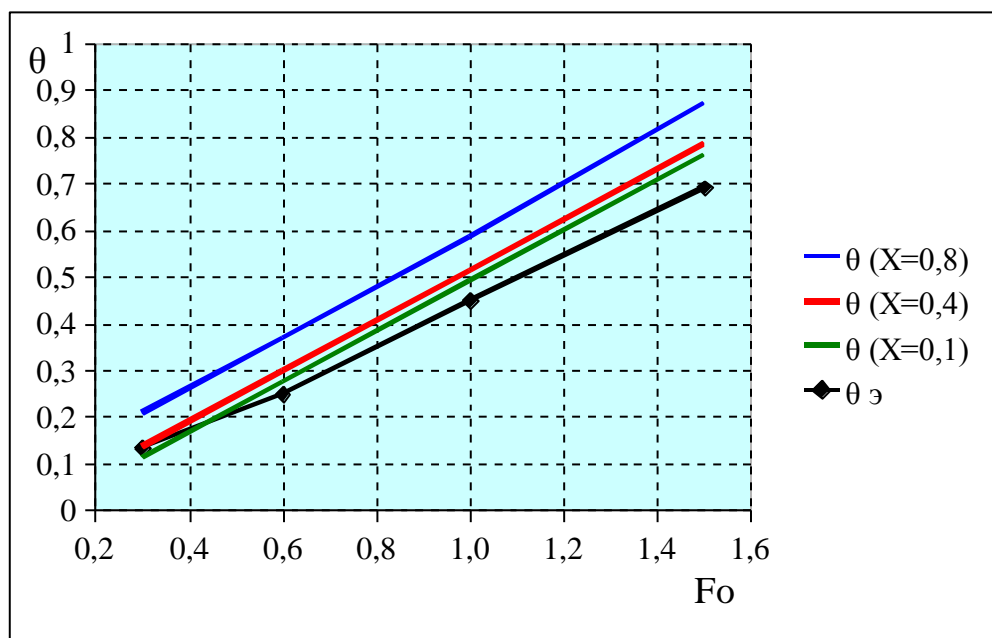


Рис. 2. Зависимость безразмерного потенциала влагопереноса от критериального числа  $Fo$  ( $Lu = 1,8; Ki_m = 0,3; Po = 0,2; H = 0,4; Ko = 7,5$ ); э — экспериментальные значения.

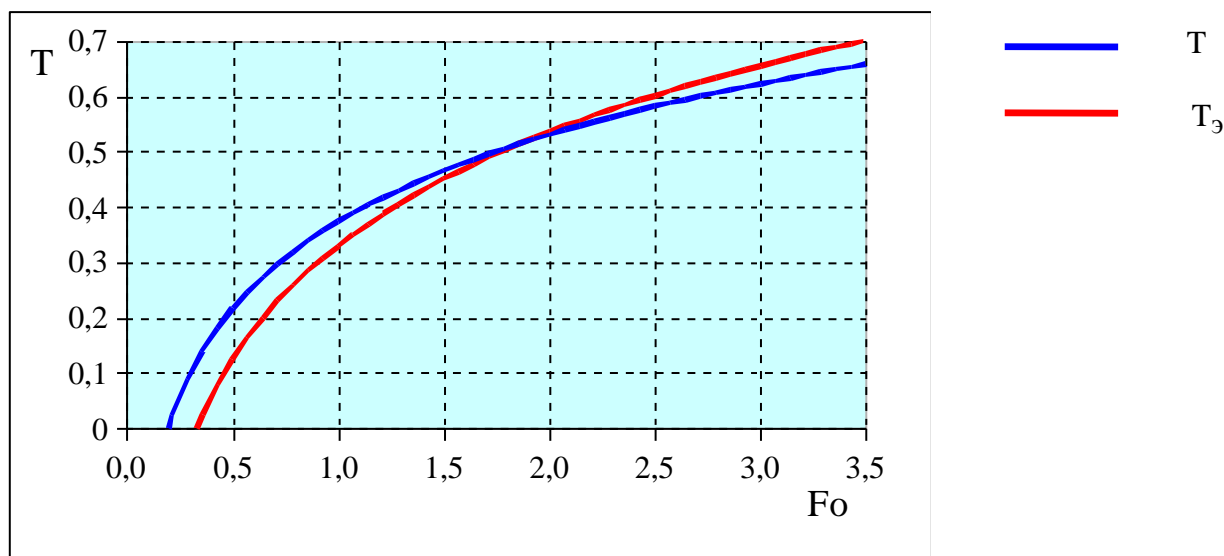


Рис. 3. Зависимость безразмерного потенциала теплопереноса от критериального числа  $Fo$  ( $X = 0,8$ ;  $Lu = 1,8$ ;  $Ki_m = 0,3$ ;  $Po = 0,2$ ;  $H = 0,4$ ;  $Ko = 7,5$ )

Вторая стадия процесса характеризуется дальнейшим развитием полей потенциалов. Эта стадия протекает в упорядоченном или квазистационарном режиме.

Температура поверхностного слоя с самого начала процесса сушки быстро возрастает, в толще тела возникают значительные градиенты температуры. Так как процесс сушки пшеничных зародышей инфракрасным излучением протекает при достаточно низких температурах ( $57^{\circ}\text{C}$  до  $65^{\circ}\text{C}$ ), то основную роль в переносе влаги в материале играет градиент влагосодержания ( $a_m > a_q$ ), число Лыкова  $Lu = \frac{a_m}{a_q}$  изменяется в пределах от 1,4 до 2 (рис. 4). Исследование зависимости  $T(Lu)$  показывает, что чем выше значение критерия взаимосвязи тепло- и массопереноса  $Lu$ , тем интенсивнее происходит прогрев материала и быстрее устанавливается квазистационарное распределение температуры. В то время безразмерный потенциал массопереноса  $\theta$  возрастает (т. е. влагосодержание уменьшается) при удалении от центра материала к поверхности, что характеризует интенсивный характер массопереноса в поверхностном слое и интенсификацию процесса сушки.

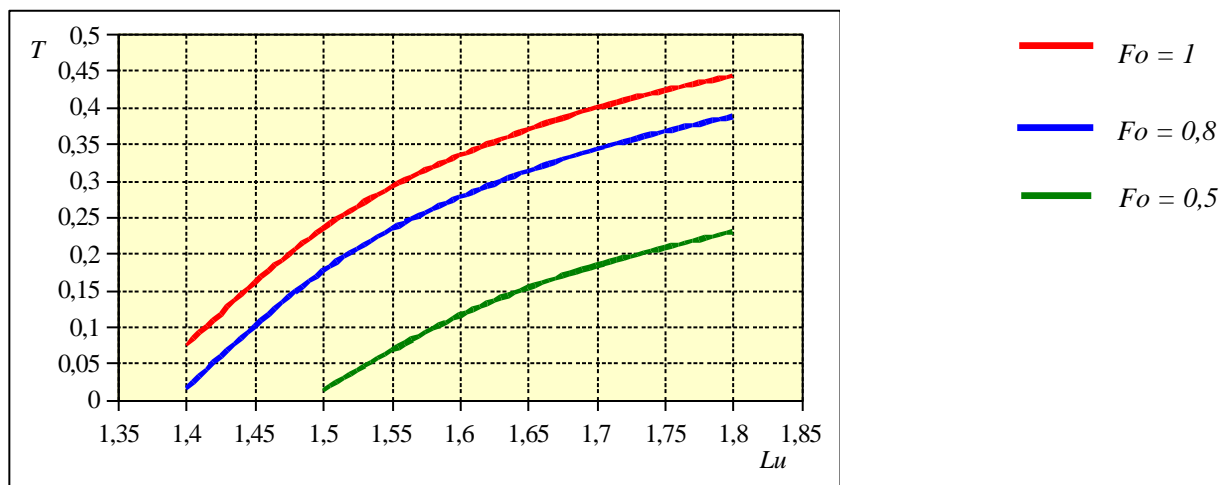


Рис. 4. Зависимость безразмерного потенциала теплопереноса  $T$  от критерия взаимосвязи тепло- и массопереноса  $Lu$ .

Повышение числа Коссовича  $Ko$  не сказывается на изменении потенциала влагосодержания  $\theta$ , но его увеличение влияет на рост  $T$ . Это означает, что до значительных значений  $Fo$  и  $Ko$  в центральных слоях материала испарение жидкости отсутствует.

Увеличение значения массообменного числа Кирпичёва  $Ki_m$  снижает локальную температуру материала по линейному закону (рис. 5), что соответствует известным зависимостям [1].

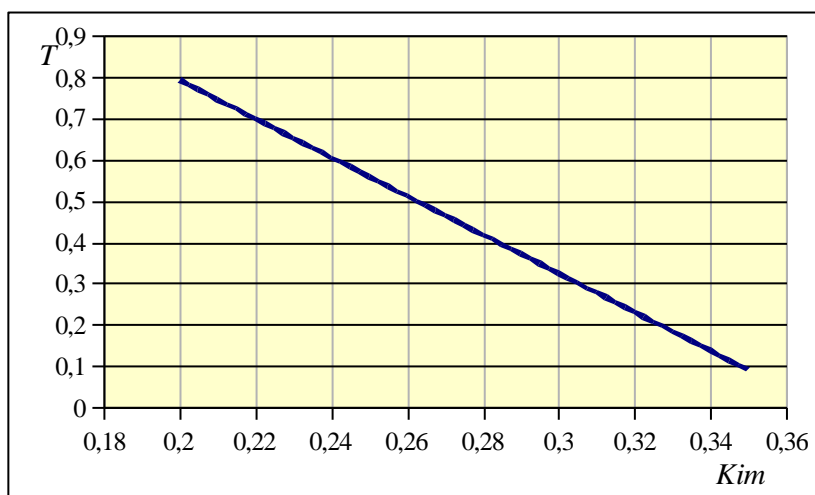


Рис. 5. Зависимость безразмерного потенциала теплопереноса  $T$  от массообменного числа Кирпичёва ( $X = 0,8$ ;  $Lu = 1,8$ ;  $Po = 0,2$ ;  $H = 0,4$ ;  $Ko = 7,5$ )



Одновременно с прогревом материала начинается удаление в окружающую среду вещества (влаги). Массоперенос с самого начала процесса затрагивает всю толщину материала.

Адекватность аналитического решения реальному процессу определялась по критерию [7]

$$\eta = \frac{\sigma_p}{\sigma_s}, \quad (14)$$

где  $\sigma_p$ ,  $\sigma_s$  — средние квадратичные отклонения значений параметра от экспериментальных значений и экспериментальных значений параметра от его среднего значения.

При  $0 < \eta < 1$  уравнение адекватно реальному процессу.

Величина  $\eta$  для  $T$  составила 0,7, а для  $\theta$  — 0,85.

Таким образом, аналитическое решение процесса сушки пшеничных зародышей инфракрасным излучением — работоспособно.

Написана программа вычислительного эксперимента на базе языка программирования Фортран 90, которому традиционно отдаётся предпочтение в научно-технических и инженерных приложениях.

#### Список литературы:

1. Лыков А.В., Михайлов Ю. А. Теория тепло- и массопереноса. - М.-Л.:Госэнергоиздат, 1963. - 536 с.
2. Белобородов В.В., Вороненко Б.А. Решение задачи нагрева тел в электромагнитном поле сверхвысоких частот. // ЖПХ, «Наука» - Ленинградское отделение, № 10, 1984. - С. 2276 — 2282.
3. Стариков В.В.. Интенсификация процесса копчения мясных колбасных продуктов на основе математического моделирования // Автореферат канд. диссер. СПб., СпбГУНиПТ, 2009. - 15 с.
4. Лыков А. В., Михайлов Ю. А. Теория переноса энергии и вещества. - Минск, 1959. - 331 с.
5. Рогов И. А., Некрутман С. В. Сверхвысокочастотный и инфракрасный нагрев пищевых продуктов. - М.: Пищевая пром-сть, 1976. - 212 с.
6. Лыков, А. В. Теория сушки. -М.: Энергия, 1968.-472 с.
7. Бородюк В. П. Критерий оценки работоспособности математического описания//Сборник «Автоматизация химических производств», вып. 1 НИИТЭХИМ. -М., 1969. -С.41 -48.