

УДК 637.5

**Аналитическое решение задачи тепломассопереноса процесса выпечки мелкоштучных булочных изделий при наложении поля ультразвука.**

Вороненко Б.А., Антуфьев В.Т., Иванова М.А.  
Санкт-Петербургский государственный университет  
низкотемпературных и пищевых технологий  
**mtomz85@mail.ru, antufjew2010@yandex.ru**

В статье поставлена и решена аналитическая задача тепловой обработки – выпечки мелкоштучных булочных изделий при наложении поля ультразвука, позволяющая определить температурные поля внутри изделий.

Ключевые слова: тепло – и массоперенос, булочное изделие, ультразвук.

**Analytical solution of a heat and mass transfer problem in batch process of a small a piece bakery product at imposing of a field of ultrasound.**

Antufjev V.T. CSc, Voronenko B.A. DSc, Ivanova M.A.

Saint-Petersburg State University of Refrigeration and Food Engineering  
**mtomz85@mail.ru, antufjew2010@yandex.ru**

In article the analytical problem of thermal processing of a batch small piece bakery product is put and solved at imposing of a field of the ultrasound, allowing to define temperature fields in products.

Keywords: heat and mass transfer, bakery product, ultrasound.

Из опыта работы хлебопекарной промышленности следует, что при выпечке хлеба необходим комбинированный температурный режим – с высокой температурой в начале процесса и значительным понижением ее в конце [1].

Дегустация продукции, полученной в печах различной конструкции, показала, что наилучшими вкусовыми качествами обладают пирожки и булочки из обыкновенной русской печи или печей, работающих по этому принципу [2]. Это обосновано высокой тепловой инерционностью старых

конструкций печей. По мнению авторов, подобный эффект в современных печах возможен с применением ультразвукового поля, уменьшающего толстый пристенный ламинарный слой обогреваемого воздуха у изделия и интенсифицирующего поступление тепла.

Нагрев булочки осуществляется следующими видами теплообмена: конвекцией и лучеиспусканием. При отсутствии ультразвука на первом этапе исследования конвективным теплообменом от окружающего воздуха при составлении математической модели пренебрегали. Чем выше температура источника радиационного инфракрасного излучения, тем обоснованнее эта предпосылка [4]. Но существенное увеличение коэффициента теплоотдачи в присутствии ультразвука теперь требует учитывать поступление тепла конвективным теплообменом от окружающего воздуха.

Существенное увеличение коэффициента теплоотдачи при действии ультразвука приводит к тому, что температура поверхности тела, подвергаемого термической обработке, принимает температуру среды, т.е. температура тела изменяется по закону простого гармонического колебания [6-11]

Принимая обрабатываемый продукт - булочку за тело сферической формы и пренебрегая процессом термодиффузии, для нахождения полей температуры и влагосодержания внутри капиллярнопористого тела необходимо решить известную систему совместного теплопереноса [3]

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a_q \left( \frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{\varepsilon \rho}{\bar{c}_q} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} = a_m \left( \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \quad (2)$$

$$(t > 0, 0 < r < R)$$

при следующих краевых условиях:

$$t(r, 0) = t_0 = \text{const}; \quad (3)$$

$$\bar{u}(r, 0) = \bar{u}_0 = \text{const}; \quad (4)$$

$$t(R, \tau) = t_m \cos(\omega \tau); \quad (5)$$

$$a_m \gamma_0 \frac{\partial \bar{u}(R, \tau)}{\partial r} + \beta \gamma_0 \bar{u}(R, \tau) = 0; \quad (6)$$

$$\frac{\partial t(0, \tau)}{\partial r} = \frac{\partial u(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (7)$$

$$t(0, \tau) < \infty; \bar{u}(0, \tau) < \infty \quad (8)$$

Здесь (1) – уравнение теплопереноса, (2) – уравнение массо-(влаго-) переноса (уравнение диффузии); равенства (3) и (4) описывают равномерные распределения температуры и влагосодержания в момент начала тепловой обработки продукта, (5) - граничное условие первого рода, (6) – граничное условие третьего рода для уравнения (2). Равенства (7) – условия симметрии, неравенства (8) – условия ограниченности температуры и влагосодержания в центре шара.

Краевая задача (1)-(8) решена аналитически методом интегрального преобразования Лапласа. Распределения полей влагосодержания и температуры получены в следующем безразмерном виде:

$$\Theta(X, Fo) = \frac{\bar{u}_0 - \bar{u}(r, \tau)}{\bar{u}_0} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \hat{n} \frac{\sin(\mu_n X)}{X \cos \mu_n} e^{-\mu_n^2 Fo_n}; \quad (9)$$

$$\begin{aligned} T = \frac{t(r, \tau) - t_0}{t_m} = \frac{\varepsilon \hat{E} \hat{t} Lu}{1 - Lu} \Theta(X, F\hat{t}) - t_{om} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \sin(m\pi X)}{m\pi X} e^{-(m\pi)^2 F\hat{t}} \right] - \\ \frac{\varepsilon \hat{K} \hat{t} Lu}{1 - Lu} \left[ 1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \hat{m} \frac{\sin(m\pi X)}{m\pi X} e^{-(m\pi)^2 F\hat{t}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2Bi_m \sin(\sqrt{Lu} \mu_n X) e^{-\mu_n^2 F\hat{t}_m}}{X(Bi_m^2 - Bi_m + \mu_n^2) \sin(\sqrt{Lu} \mu_n)} \right] + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(-1)^m \sin(m\pi X) e^{-(m\pi)^2 F\hat{t}}}{m\pi X \left(1 + \left(\frac{Pd}{(m\pi)^2}\right)^2\right)} + \frac{\gamma_1 \cos(\omega\tau) + \gamma_2 \sin(\omega\tau)}{\left(\operatorname{sh} \sqrt{\frac{Pd}{2}} \cos \sqrt{\frac{Pd}{2}}\right)^2 + \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{Pd}{2}} \sin \sqrt{\frac{Pd}{2}}\right)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $\mu_n$  - последовательные положительные корни характеристического уравнения

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{Bi_m - 1}; \quad (11)$$

$$A_n = \frac{2Bi_m (Bi_m - 1)}{\mu_n (Bi_m^2 - Bi_m + \mu_n^2)};$$

$$A_m = \frac{2(-1)^m Bi_m}{\frac{m\pi}{\sqrt{Lu}} \cos \frac{m\pi}{\sqrt{Lu}} + (Bi_m - 1) \sin \frac{m\pi}{\sqrt{Lu}}};$$

$$\gamma_1 = \operatorname{sh} \sqrt{\frac{Pd}{2}} \cos \sqrt{\frac{Pd}{2}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{Pd}{2}} X \right) \cos \left( \sqrt{\frac{Pd}{2}} X \right) + \operatorname{ch} \sqrt{\frac{Pd}{2}} \sin \sqrt{\frac{Pd}{2}} \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{Pd}{2}} X \right) \sin \left( \sqrt{\frac{Pd}{2}} X \right);$$

$$\gamma_2 = \operatorname{ch} \sqrt{\frac{Pd}{2}} \sin \sqrt{\frac{Pd}{2}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{Pd}{2}} X \right) \cos \left( \sqrt{\frac{Pd}{2}} X \right) - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{Pd}{2}} \cos \sqrt{\frac{Pd}{2}} \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{Pd}{2}} X \right) \sin \left( \sqrt{\frac{Pd}{2}} X \right)$$

Выводы:

1. Поставлена и решена аналитическая задача процесса выпечки булочного изделия при наложении поля ультразвука, позволяющая определять температурные поля внутри выпекаемой тестовой заготовки.

2. Экспериментальная проверка показала удовлетворительное совпадение решений по разработанной математической модели, которая может быть рекомендована для инженерных расчетов.

Обозначения:

$t(r, \tau)$  - температура, °С;  $t\hat{m}$  - амплитуда температурных колебаний на поверхности тела, вызванных ультразвуком, °С;  $t_0$  - начальная температура;

$\bar{u}(r, \tau)$  - влагосодержание;  $\bar{u}_0$  - начальное влагосодержание, кг/(кг абс. сух. вещества);  $\tau$  - время, с.;  $r$  - текущая координата, м;  $R$  - радиус шара (булочки), м.;

$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$  - круговая частота, 1/с.;  $\nu$  - циклическая частота;  $T$  - период колебаний, с.;

$a_q$  - коэффициент температуро-проводности, м<sup>2</sup>/сек;  $a_m$  - коэффициент массопереноса, м<sup>2</sup>/сек;  $\varepsilon$  - критерий фазового превращения;  $\rho$  - удельная теплота фазового превращения, Дж/кг;  $\bar{c}_q$  - удельная теплоемкость тела, Дж/(кг·К);  $\beta$  - коэффициент массообмена, м/с.;  $\gamma_0$  - плотность абсолютно сухого тела, кг/м<sup>3</sup>;  $X = \frac{r}{R}$  - безразмерная координата;  $Fo_q = \frac{a_q \tau}{R^2}$  - число (критерий) Фурье (теплообменное);  $Fo_m = \frac{a_m \tau}{R^2}$  - число Фурье (массообменное);  $Bi_m = \frac{\beta R}{a_m}$  - число Био;  $Pd = \frac{\omega R^2}{a_q}$  - число Предводителя;  $Lu = \frac{a_m}{a_q}$  - число Лыкова;  $Ko = \frac{\rho u_0}{c_q t_m}$  - число Коссовича;  $\Theta = \Theta(X, Fo)$  - безразмерное влагосодержание,  $T = T(X, Fo)$  - безразмерная температура.

Список литературы:

1. Ауэрман Л.Я. Технология хлебопекарного производства: Учебник.- СПб.: Профессия, 2003г.-416с.

2. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло и массопереноса. М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963г.-535с.

3. Гинзбург А.С. Инфракрасная техника в пищевой промышленности. - М.: Пищевая промышленность, 1966г.-376с.

4.Порхаев А.П. Тепло - и массообмен в полуограниченных дисперсных средах// Автореферат докторской диссертации; -М.:МТИПП,1956г.

5.Ключкин В.В., Пахоменкова Т.П., Михайлова Т.Н. О влиянии гармонического изменения перепада давления на характер движения жидкой фазы в массообменных аппаратах.//ЖПХ, №4,1984г.-с.841-845.

6.Белобородов В.В., Забровский Г.П., Вороненко Б.А. Решение дифференциальных уравнений совместного тепло - и массопереноса в связи с хранением масличных семян в элеваторах в зависимости от температуры наружного воздуха.// Процессы массо - и теплопереноса масло - жирового производства. СПб.: Изд-во «КСИ»,2000г.-с.53-63.